

Kružnice

Ota Setzer (author): Kružnice. (Czech). Praha: Jednota československých matematiků a fyziků, 1950.

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/402910>

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



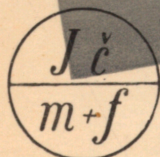
This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

Brain

k vedení

OTA SETZER

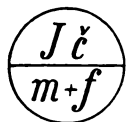
Kružnice



SVAZEK I2

KRUŽNICE

OTA SETZER



PRAHA 1950

PŘÍRODOVĚDECKÉ NAKLADATELSTVÍ

VYDALA

JEDNOTA ČESKOSLOVENSKÝCH MATEMATIKŮ A FYSIKŮ

ÚVOD.

Pro snadný způsob svého sestrojení se těšila kružnice značné pozornosti geometrů všech věků.

Z dochovaných dokladů víme, že ze starověkých národů Egyptané znali kružnici a že Bablyoňané jí užívali v astronomii. Velmi důkladně si všímali kružnice matematikové starého Řecka. Thales z Miletu (6. stol. před Kr.) řešil pomocí ní úlohy o obvodových úhlech, Hippokrates z Chiu (5. stol. před Kr.) se marně snažil svými kruhovými měsíčky stanovit konstruktivně obsah kruhu na základě úhelníků. Eukleides z Alexandrie (3. stol. před Kr.) věnoval kruhu 3. knihu svých proslulých Základů, Archimedes ze Syrakus se velmi přiblížil přesnému výpočtu délky kružnice, Apollonius z Pergy se zabýval konstruktivními úlohami o kružnici právě tak jako Pappos z Alexandrie o několik století později. O kružnici se dočteme též z bible. Také jména některých novodobých matematiků (Eulera, Pascala, Desarguesa, Steinera) jsou úzce spjata s geometrií kružnice.

Zvláštní skupinu úloh tvoří konstrukce, při nichž se užívá jen kružítka. Jest jim věnována kap. 10.

Kruhové oblouky jsou součástí některých křivek, s nimiž se čtenář seznámí v kap. 9.

Kružnice má praktické upotřebení i ve stavitelství. Rotundy měly kruhový půdorys a pro některé slohy — gotický a románský — jest kruhový oblouk charakteristický.

Úzce vyměřený rozsah svazku způsobuje, že není možno prováděti do detailů přesně důkazy všech pouček, které si ostatně — alespoň v hlavních rysech — osvojil čtenář na škole II. stupně. Proto jsem v 1. kap. shrnul nejnutnější z nich vždy s návodem, jak by si je čtenář mohl sám odvoditi. Čtenáře prosím dále, aby si při všech úlohách a větách, k nimž není připojen obrázek, potřebný obrazec sám podle připojeného návodu sestrojil a tak se aktivně seznamoval s tímto zajímavým úsekem geometrie.

I. ZÁKLADNÍ MĚŘICKÉ POUČKY.

K dalším výkladům si nejprve zopakujeme některé základní geometrické poučky, které bývají dokazovány již na škole 2. stupně. Omezíme se jen na nejnnutnější z nich (u některých uvádím v závorce návod k příslušnému důkazu):

Úhly s rameny rovnoběžnými: 1,1. Dva úhly, jejichž odpovídající si ramena jsou navzájem rovnoběžná ($a_1 \parallel a_2$, $b_1 \parallel b_2$) a mají též smysl, jsou stejně velké. (Rovnoběžným posunutím lze je ztotožniti.)

1,2. Dva úhly s rameny rovnoběžnými, ale opačných smyslů, jsou stejně velké. (Posunutím se převedou na stejně velké vrcholové.)

1,3. Dva úhly s rameny rovnoběžnými, v nichž jedna dvojice ramen má též smysl a druhá smysl opačný, jsou výplňkové, t. j. jejich součet činí 180° . (Rovnoběžným posunutím přejdou ve výplňkové úhly vedlejší.)

Úhly s rameny kolmými: 1,4. Dva ostré úhly s rameny navzájem kolmými jsou stejně velké. (Otočením jednoho z nich o 90° kolem jeho vrcholu a pak rovnoběžným posunutím lze oba úhly ztotožniti.)

Úhly v trojúhelníku: 1,5. Součet vnitřních úhlů v trojúhelníku měří 180° . (Jedním vrcholem vedte rovnoběžku s protilehlou stranou a užíjte věty 1,2!)

1,6. Součet vnějších úhlů v trojúhelníku jest 360° . (Jedním vrcholem vedte rovnoběžku s třetí stranou a užíjte opět věty 1,2!)

1,7. Vnější úhel trojúhelníka se rovná součtu obou protilehlých úhlů vnitřních. (Vrcholem vnějšího úhlu se vede rovnoběžka s protilehlou stranou a užíje se vět 1,1 a 1,2.)

1,8. Součet dvou stran trojúhelníka je vždy větší než strana třetí.

1,9. V trojúhelníku leží proti většímu úhlu delší strana a naopak proti delší straně větší úhel.

2. JAK VZNIKÁ KRUŽNICE. MEZIKRUŽÍ.

Chce-li zahradník vytvořiti na vodorovné rovině kruhový záhon, zarazí do země ve středu S plánovaného kruhu kolík, upevní na něj motouz délky r , na jehož druhém konci je hrot, jímž může již opisovati obrys svého záhonu — kružnici. Musí však dbáti, aby po celou dobu pohybu byl motouz napjat.

Vzdálenost kteréhokoli bodu na kružnici od jejího středu je tedy stále táž, říkáme jí poloměr a značíme r (od lat. slova radius). Po určité době se vrátí písčící hrot do původní polohy, kružnice jest křivka uzavřená. Plocha, již ohraničuje, je kruh.

Právě tak jako v přírodě, rýsujeme kružnice na papíře kružítkem. Jeden hrot kružítko zůstává stále zabodnut ve středu rýsované kružnice a druhý hrot (s tuhou) opisuje kružnici při neměnné vzdálenosti hrotů.

Z vytvoření kružnice vidíme, že body uvnitř kružnice mají vzdálenost v od jejího středu menší než r (píšeme $v < r$), body vně kružnice jsou od středu vzdáleny více než poloměr ($v > r$) a jenom pro body na kružnici je tato vzdálenost rovna délce poloměru ($v = r$). Uvedenou vlastnost vyjadřujeme pak větou:

2.1. Kružnice jest geometrickým místem bodů,*) které mají od pevného bodu (středu) stálou vzdálenost ($= r$).

Jestliže náš zahradník chce vytvořiti kolem svého záhonu stejně širokou pěšinku šířky δ , prodlouží motouz o úsečku δ na novou délku $R = r + \delta$ a tímto poloměrem opíše kolem téhož středu novou kružnici. Plocha vzniklá mezi oběma kružnicemi je mezikruží. Rozdíl poloměrů je šířka mezikruží: $\delta = R - r$.

Kružnice o témž středu nazýváme soustředné.

Buďtež k_1, k_2 soustředné kružnice o společném středu S a poloměrech r_1, r_2 ($r_1 > r_2$)! Podle definice 2.1 obsahuje kružnice k_1 jen body, které mají od bodu S neměnnou vzdálenost r_1 , neleží však na ní žádný bod, který má od S vzdálenost jinou, na př. r_2 a který by proto byl bodem kružnice k_2 . Právě tak na kružnici k_2 leží jen body, jejichž

*) Geom. místo bodů jest souhrn všech bodů, které vyhovují určité podmínce a mimo ně žádný jiný bod tuto podmínku nesplňuje.

vzdálenost od bodu S jest r_2 . Žádný z bodů kružnice k_2 nemůže proto mít od S vzdálenost r_1 . Neexistuje tedy bod, který by ležel současně na obou soustředných kružnicích.

2.2. Dvě soustředné kružnice se neprotínají.

Cvičení:

1. Je dán bod A . a) Narýsujte kružnici, která prochází bodem A a má poloměr 3 cm! b) Kolik je takových kružnic? c) Kde leží středy všech těchto kružnic? d) Narýsujte geom. místo těchto středů!

2. Jsou dány body A, B ve vzdálenosti 5 cm od sebe ($\overline{AB} = 5$ cm). a) Vyhledejte bod C , který má od obou bodů A i B vzdálenost 4 cm ($\overline{AC} = \overline{BC} = 4$ cm)! b) Kolik je takových bodů C , jež vyhovují úloze? c) Jakou polohu mají vzhledem k spojnici AB ? d) Jaký obrazec tvoří body A, B, C ? e) Sestrojte kružnici, která má střed v C a prochází body A a B !

3. Tutéž úlohu řešte pro bod D , aby $\overline{AD} = \overline{BD} = 3$ cm! a) Můžeme žádati, aby vzdálenost hledaného bodu D od daných bodů byla libovolně velká? b) Jaká je nejmenší možná vzdálenost $\overline{AD}$? c) V jaký obrazec přejde v tomto krajním případě $\triangle ABD$?

4. Podle předchozí úlohy narýsujte několik kružnic (různých poloměrů) svazku kružnic, t. j. kružnic, které jdou dvěma pevnými body A a B ! Narýsujte z nich také tu, jež má nejmenší možný poloměr!

5. Narýsujte mezikruží, jehož šířka $s = 2$ cm, víte-li, že má střed v daném bodě S a že jeho vnitřní kružnice jde daným bodem L !

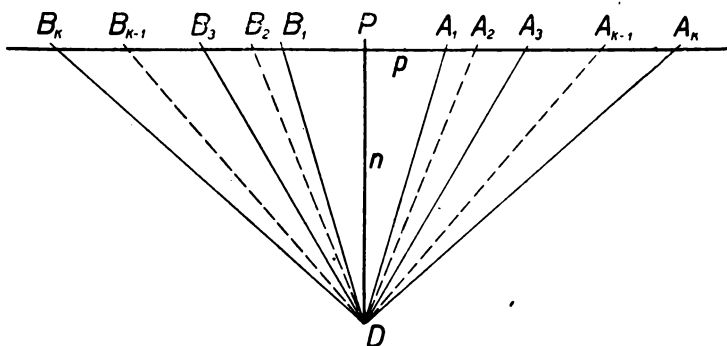
6. Dokažte, že body ležící uvnitř menší kružnice mezikruží leží všechny také uvnitř větší kružnice! Co platí o bodech, které leží vně větší kružnice mezikruží? Můžeme tvrditi, že body ležící vně menší kružnice leží též vně větší kružnice? O kterých bodech to neplatí?

3. KRUŽNICE A PŘÍMKA.

Z daného bodu D spustíme kolmici n na danou přímku p ! (Obr. 1.) Patu této jediné kolmice označme P ! Na přímku p nanese oběma směry úsečky: $\overline{PA_1} = \overline{PB_1}$, $\overline{PA_2} = \overline{PB_2}$, $\overline{PA_3} = \overline{PB_3}$, ... $\overline{PA_k} = \overline{PB_k}$ tak, že body A a B s větším indexem mají od P větší vzdálenost: $\overline{PA_1} < \overline{PA_2} < \overline{PA_3} < \dots < \overline{PA_k}$, $\overline{PB_1} < \overline{PB_2} < \overline{PB_3} < \dots < \overline{PB_k}$. Ve vzniklých trojúhelnících DA_1A_2 , DA_2A_3 , DA_3A_4 , ... $DA_{k-1}A_k$ jsou $\hat{A_2A_1D}$, $\hat{A_3A_2D}$, $\hat{A_4A_3D}$, ... $\hat{A_kA_{k-1}D}$ vnějšími úhly pravoúhlých

trojúhelníků $A_1PD, A_2PD, \dots A_{k-1}PD$, a proto podle poučky 1,7 tupé. V tupouhlých trojúhelnících jsou zbývající dva úhly vždy ostré (1,5). V našem případě jsou úhly $A_1\hat{A}_2D, A_2\hat{A}_3D, \dots A_{k-1}\hat{A}_kD$ úhly ostré. Odtud plyne:

$$A_1\hat{A}_2D < A_2\hat{A}_1D, A_2\hat{A}_3D < A_3\hat{A}_2D \dots A_{k-1}\hat{A}_kD < A_k\hat{A}_{k-1}D$$



Obr. 1.

Přihlédneme-li k větě 1,9, odvodíme snadno:

$$\overline{DA}_1 < \overline{DA}_2 < \overline{DA}_3 < \dots < \overline{DA}_{k-1} < \overline{DA}_k.$$

Obdobnou úvahou pro body $B_1, B_2, B_3, \dots, B_k$ dokážeme:

$$\overline{DB}_1 < \overline{DB}_2 < \overline{DB}_3 < \dots < \overline{DB}_{k-1} < \overline{DB}_k.$$

Ze souměrnosti podle kolmice n kromě toho vyplývá, že kterékoli úsečky $\overline{DA}_i, \overline{DB}_i$ jsou pro stejné indexy i stejné: $\overline{DA}_i = \overline{DB}_i$.

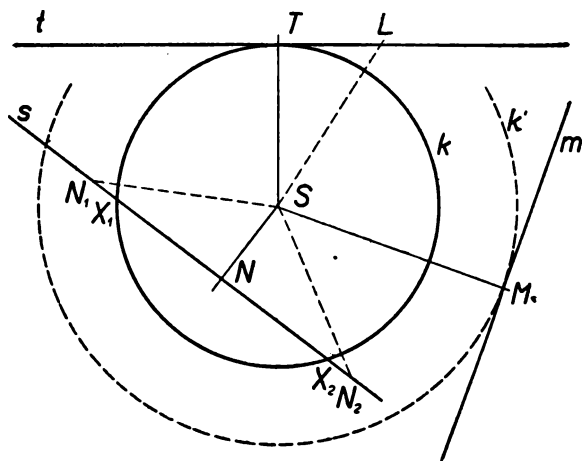
Čím body A (resp. B) na přímce p volíme dále od paty P , tím větší jest jejich vzdálenost od D . Ze všech vzdáleností bodů A od D jest délka kolmice PD nejkratší. Tento poznatek lze vyjádřit též takto:

Je-li $h < i < k$, pak nutně $\overline{DA}_h < \overline{DA}_i < \overline{DA}_k$.

Uvedených výsledků použijeme nyní při vyšetřování vzájemné polohy kružnice a přímky. (Obr. 2.)

Zvolme si libovolnou přímku t , jejíž vzdálenost v od středu S dané kružnice k se rovná jejímu poloměru r ! Tato vzdálenost se nám jeví jako kolmice $\overline{ST}$ spuštěná z bodu S na přímku t . Podle volby přímky

t jest: $v = \overline{ST} = r$. Pata T této kolmice leží podle 2,1 na kružnici k . Zvolíme-li na t libovolný jiný bod L , jest podle předchozího jeho vzdálenost $\overline{SL}$ od středu S vždy větší než $\overline{ST}$: $\overline{SL} > r$, proto bod L leží vně kružnice k . To platí pro všechny body přímky t kromě bodu T , který jediný leží na kružnici k .



Obr. 2.

Přímce, která má s kružnicí jediný společný bod, říkáme tečna kružnice, společný bod obou čar jmenujeme bodem dotykovým. V našem případě je přímka t tečnou a bod T dotykovým bodem. Vidíme, že k tomu, aby přímka byla tečnou kružnice stačí, když její vzdálenost od středu je rovna poloměru. Přitom je tečna kolmá k poloměru dotykového bodu.

Známe-li střed S kružnice a jednu její tečnu t , spustíme z bodu S kolmici na t , vzdálenost $\overline{ST}$ je již poloměrem hledané kružnice.

Budiž vzdálenost zvolené přímky m od středu S kružnice k větší než její poloměr r ! Pata kolmice z bodu S na přímku m je M , pak podle volby $\overline{SM} > r$.

Z týchž důvodů jako prve je vzdálenost kteréhokoli bodu přímky m od středu S větší než délka kolmice $\overline{SM}$ a tím spíše větší než r .

Všechny body přímky m jsou tedy od středu S vzdáleny více než r , leží vně kružnice k , žádný z nich na kružnici. Přímka, která nemá s kružnicí společný bod, jest nesečna kružnice.

V našem případě je přímka m nesečnou kružnice k . Stačilo k tomu, aby měla od středu kružnice vzdálenost větší než poloměr.

Konečně zvolme přímku s ve vzdálenosti $\overline{SN} < r$! Naneseme-li od paty N kolmice na přímku s oběma směry délku poloměru do bodů N_1 a N_2 , jest: $\overline{NN}_1 = \overline{NN}_2 = r$. V pravoúhlých trojúhelnících SNN_1 , SNN_2 jest $\sphericalangle SNN_1 > \sphericalangle N_1SN$, $\sphericalangle SNN_2 > \sphericalangle N_2SN$ a podle 1,9: $\overline{SN}_1 > \overline{NN}_1$, $\overline{SN}_2 > \overline{NN}_2$ čili $\overline{SN}_1 > r$, $\overline{SN}_2 > r$. Body N_1, N_2 jsou vnějšími body kružnice k . Podle úvahy ze začátku této kapitoly musí na přímce s mezi bodem N , jehož vzdálenost od S je menší než r , a mezi bodem N_1 (resp. N_2), jehož vzdálenost od S je větší než r , ležeti bod X_1 (resp. X_2), jehož vzdálenost od S je právě r . Ze souměrnosti podle SN plyne, že $\overline{NX}_1 = \overline{NX}_2$. Body X_1, X_2 jsou průsečíky přímky s s kružnicí k . Přímka, která má s kružnicí dva body společné, je sečna kružnice.

V našem případě přímka s je sečnou kružnice k . Stačilo k tomu, aby její vzdálenost od středu kružnice byla menší než poloměr.

Uvedenými třemi případy jsou všechny možné vzájemné polohy kružnice a přímky vyčerpány.

Shrneme si je v tento přehledný výsledek:

Je-li vzdálenost přímky od středu S kružnice k

$v < r$, je přímka sečna..... 3,1,

je-li: $v = r$, je přímka tečna..... 3,2,

je-li: $v > r$, je přímka nesečna .. 3,3.

Sečna kružnice ji protíná jen ve dvou bodech X_1, X_2 . Kdyby ji protínala ještě v 3. bodě X_3 , pak by podle 2,1 $\overline{SX}_3 = r$, rovnoramenné trojúhelníky X_1SX_2 , X_2SX_3 by měly základny v téže přímce s a jedno rameno společné (na př. $\overline{X_2S}$). Součet úhlů při základně $\widehat{SX_2X_1}$ a $\widehat{SX_2X_3}$ (jež jsou v rovnoramenných trojúhelnících vždy ostré), by byl úhel přímý, což jest nemožné, a proto:

3.5. Žádné tři body kružnice neleží v přímce.

Úsečka, kterou na sečně vytíná kružnice, jest tětiva. V případě, že sečna jde středem kružnice ($v = 0$), stává se tětiva průměrem.

Označujeme jej d (od řec. slova *diametros*): $d = 2r$. Jinak platí podle obrázku: $\overline{X_1 X_2} < \overline{X_1 S} + \overline{S X_2}$, $\overline{X_1 X_2} < 2r$.

3.6. Průměr jest nejdelší tětivou kružnice.

Cvičení:

7a. Narýsujte několik kružnic, které se dotýkají dané přímky t v daném bodě T (po obou jejich stranách)! b) Co je geom. místem středů těchto kružnic?

8. Co vyplňují středy všech kružnic, které mají poloměr $r = 2$ cm a dotýkají se dané přímky t ? Narýsujte toto geom. místo bodů!

9. Dané přímky a, b svírají úhel 60° . Sestrojte kružnici poloměru $r = 1$ cm, která se dotýká přímek a i b !

10. Sestrojte kružnici poloměru $r = 2$ cm, která prochází daným bodem A a dotýká se dané přímky a (vzdálenost A od a volte 3 cm)!

11. Narýsujte mezikružší, jehož jedna kružnice se dotýká dané přímky a v daném bodě A (A na a) a jehož druhá kružnice se dotýká jiné dané přímky b v bodě B (B na b)!

12. Dvě přímé trati svírají úhel 135° . Jsou spojeny kruhovým obloukem poloměru 400 m. Narýsujte v měřítku 1 : 20 000!

13. Na dané kružnici určete bod, který jest nejdále od dané tětivy kružnice!

14. Cirkusový stan kruhového půdorysu leží stranou přímé silnice. Určete graficky, v kterém místě jest vhod, aby byl nejbližší silnici!

15. Dána kružnice $k(S, 4 \text{ cm})$ a bod $A(\overline{AS} = 7 \text{ cm})$. Sestrojte kružnici k' , která má střed v bodě A a pólí kružnici k !

4. DVĚ KRUŽNICE.

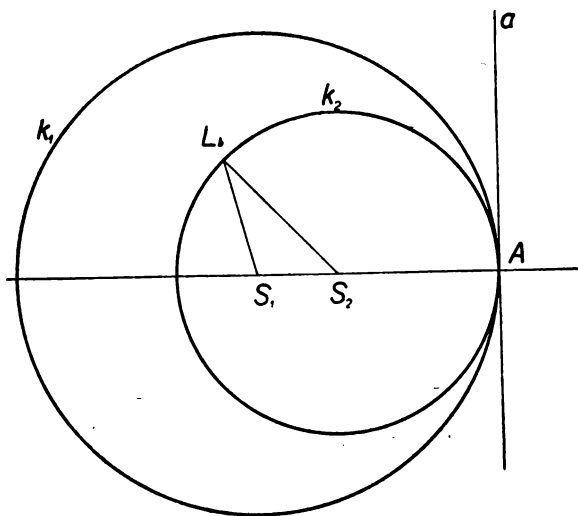
Zkoumejme vzájemnou polohu dvou kružnic k_1, k_2 o různých střezech S_1, S_2 a různých poloměrech r_1, r_2 ($r_1 > r_2$)! Spojnici $\overline{S_1 S_2}$ jmenujeme střednou (centrálou) a její délku označíme c . Tato délka c může vzhledem k poloměrům r_1, r_2 nabývat postupně těchto hodnot:

- a) $0 < c < r_1 - r_2$, b) $c = r_1 - r_2$, c) $r_1 - r_2 < c < r_1 + r_2$,
d) $c = r_1 + r_2$, e) $c > r_1 + r_2$.

Jiných možností není, neboť případ $c = 0$ jsme již probrali při soustředných kružnicích.

Zvolíme-li si v případě a) na kružnici k_2 libovolný bod L_a , jest podle definice $\overline{S_2 L_a} = r_2$ a podle naší podmínky $\overline{S_1 S_2} < r_1 - r_2$, proto $\overline{S_1 S_2} + \overline{S_2 L_a} < r_1$, v $\triangle S_1 S_2 L_a$ jest podle 1,8: $\overline{S_1 L_a} < \overline{S_1 S_2} + \overline{S_2 L_a}$ a tím spíše: $S_1 L_a < r_1$, čili kterýkoli bod kružnice k_2 má od S_1 vzdálenost menší než r_1 , leží proto uvnitř kružnice k_1 , celá kružnice k_1 leží uvnitř k_2 , kružnice nemají společný bod, neprotínají se.

b) Budiž: $c = r_1 - r_2$ (Obr. 3.)! Od bodu S_2 nanese se na prodlouženou spojnici $S_1 S_2$ délku r_2 do bodu A (na opačnou stranu než je bod S_1). Podle konstrukce leží bod A na k_2 ($\overline{S_2 A} = r_2$), podle dané podmínky: $S_1 A = c + r_2 = r_1$, bod A leží také na k_1 . Obě kružnice mají



Obr. 3.

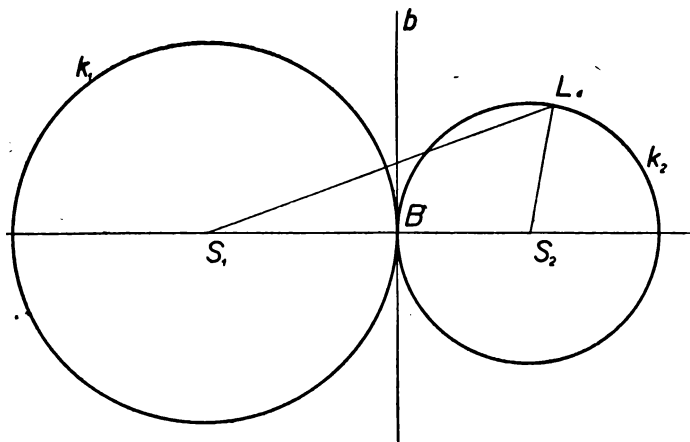
společný bod A a jak vyplývá z vlastnosti točny, též společnou točnu a v bodě A . Každý jiný bod L_b na kružnici k_2 má od středu S_1 vzdálenost menší než r_1 , neboť:

$$\overline{S_1 L_b} < \overline{S_1 S_2} + \overline{S_2 L_b}, \quad \overline{S_1 L_b} < r_1 - r_2 + r_2, \quad \overline{S_1 L_b} < r_1.$$

Každý bod kružnice k_2 (kromě A) leží uvnitř kružnice k_1 .

Dříve než budeme vyšetřovati polohu c), zabývejme se případem d) $c = r_1 + r_2$ (Obr. 4)! Nanese-li od středu S_2 směrem k S_1 úsečku r_2 , leží koncový bod B této úsečky na kružnici k_2 ($\overline{S_2 B} = r_2$), ale po-

dle sestrojení také na k_1 , neboť: $\overline{S_1B} = \overline{S_1S_2} - \overline{S_2B} = c - r_2 = r_1 + r_2 - r_2 = r_1$. Obě kružnice mají společný bod B a také tečna $\underline{b}$ vedená v něm kolmo k $\overline{S_1S_2}$ jest společná.



Obr. 4.

Kterýkoli jiný bod L_a kružnice k_2 má od středu S_1 vzdálenost větší než r_1 :

$$\overline{S_1L_a} + \overline{S_2L_a} > \overline{S_1S_2}, \quad \overline{S_1L_a} + r_2 > r_1 + r_2, \quad \overline{S_1L_a} > r_1$$

proto všechny ostatní body kružnice k_2 (kromě bodu B) leží vně kružnice k_1 .

V obou případech b) i d) měly obě kružnice jeden společný bod (dotkový) a v něm společnou tečnu kolmou k středně. Říkáme, že se navzájem dotýkají. V případě b) leží obě tyto kružnice po téže straně společné tečny, mají vnitřní dotyk, dotýkají se zevnitř. V případě d) leží po různých stranách společné tečny, dotýkají se zevně, mají vnější dotyk.

c) Z polohy b) jsme mohli přejít do polohy d), kdybychom byli posunuli kružnici k_2 ve směru $\overline{S_1S_2}$ o délku $2r_2$. Označujeme-li průsečíky středně a pohybující se kružnice k_2 stále A_i a B_i , zůstává při tomto ohraničeném pohybu ($r_1 - r_2 < c < r_1 + r_2$) bod A_i stále vnějším a bod B_i stále vnitřním bodem kružnice k_1 . Chceme-li přejít

od vnitřního bodu B_i k vnějšímu bodu A_i po horní půlkružnici k_2 , musíme nutně v některém bodě X_1 přebročit kružnici k_1 , volíme-li dráhu z A_i do B_i po dolní půlkružnici k_2 , musíme ze stejného důvodu přejít kružnici k_1 v dalším bodě X_2 . Obě kružnice se protínají ve dvou bodech.

S tímto výsledkem přímo souvisí známý poznatek, že ze tří úseček r_1, r_2, c lze vždy sestrojiti trojúhelník, platí-li: $r_1 - r_2 < c < r_1 + r_2$. e) Je-li konečně $c > r_1 + r_2$, neboli $c - r_2 > r_1$ a je-li L_e libovolný bod kružnice k_2 ($\overline{S_2 L_e} = r_2$), pak podle 1,8 platí: $\overline{S_1 L_e} + \overline{S_2 L_e} > \overline{S_1 S_2}$, $\overline{S_1 L_e} + r_2 > c$, $\overline{S_1 L_e} > c - r_2$ a tím spíše $\overline{S_1 L_e} > r_1$.

Všechny body kružnice k_2 leží vně kružnice k_1 .

Cvičení.

16. Trojúhelník ABC má strany $\overline{AB} = 4$ cm, $\overline{AC} = 6$ cm, $\overline{BC} = 8$ cm. Kolem jeho vrcholů jsou opsány kružnice $k_1(A, r_1 = 1$ cm), $k_2(B, r_2 = 3$ cm), $k_3(C, r_3 = 5$ cm). Jaká je vzájemná poloha těchto tří kružnic?

17. Kolem vrcholů trojúhelníka z předešlého příkladu jsou opsány kružnice $k_4(A, r_4 = 9$ cm), $k_5(B, r_5 = 5$ cm), $k_6(C, r_6 = 3$ cm). Určete vzájemnou polohu kružnic k_4, k_5, k_6 !

18. a) Sestrojte kružnici, která se dotýká dané kružnice k ($S, r = 4$ cm) v jejím bodě T α) vně, β) uvnitř! b) Kolik je takových kružnic? c) Sestrojte geom. místo středů těchto kružnic!

19. Kde leží středy kružnic poloměru $r = 1$ cm, které se dotýkají dané kružnice k ($S, r_1 = 4$ cm)? Narýsujte toto geom. místo bodů!

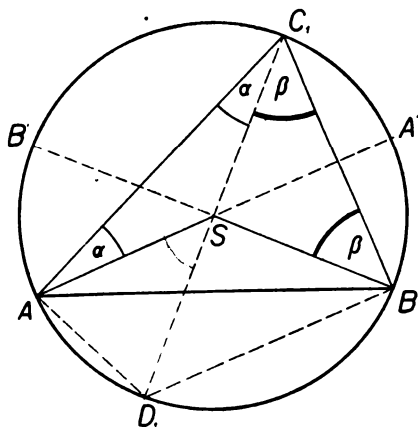
5. OBVODOVÉ ÚHLY V KRUŽNICI.

Koncové body libovolné tětivy $\overline{AB}$ spojme se středem S (obr. 5)! Poloměry SA, SB svírají úhel $\widehat{ASB}$, jehož vrchol leží ve středu kružnice. Budeme jej nazývati úhel středový. Spojujeme-li naproti tomu jednotlivé body obvodu kružnice s koncovými body A, B naší tětivy, vznikají úhly obvodové, na př. $\widehat{AC_1B}, \widehat{AC_2B} \dots$ Všimněme si jednoho z nich, třeba úhlu $\widehat{AC_1B}$! Spojnice jeho vrcholu C_1 se středem S protne kružnici po druhé v bodě D_1 . Trojúhelníky $\triangle AC_1S$ a $\triangle BC_1S$ jsou rovnoramenné ($\overline{AS} = \overline{BS} = \overline{CS} = r$), proto jejich úhly při základně jsou stejně velké:

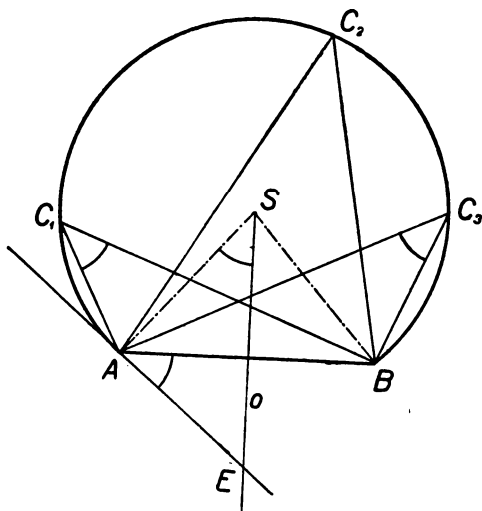
$$\widehat{SAC_1} = \widehat{SC_1A} = \alpha, \quad \widehat{SBC_1} = \widehat{SC_1B} = \beta.$$

Úhol $\widehat{D_1SA}$ je vnějším úhlem $\triangle ASC_1$, proto se rovná součtu dvou protilehlých úhlů vnitřních (podle 1,7): $\widehat{D_1SA} = \widehat{SAC_1} + \widehat{SC_1A}$. Oba sčítanci na pravé straně rovnice jsou stejní, proto: $\widehat{D_1SA} = 2 \cdot \widehat{SC_1A}$. Obdobně odvodíme z $\triangle BSC_1$: $\widehat{D_1SB} = 2 \cdot \widehat{SC_1B}$. Sečtení obou rovnic vede ke vztahu: $\widehat{D_1SA} + \widehat{D_1SB} = 2 \cdot (\widehat{SC_1A} + \widehat{SC_1B})$, což nám podle obrázku dává závislost mezi úhly: $\widehat{ASB} = 2 \cdot \widehat{AC_1B}$.

Stejnou úvahu můžeme provést pro libovolný bod $C_2, C_3, \dots$ na obvodě kružnice, pokud ho volíme mezi body A', B' . Pro obvodové úhly, jejichž vrcholy leží na kružnici mezi body A a B' nebo A' a B , postupujeme při důkazu stejně, jenom sčítání rovnic nahradíme odčítáním. Výsledek jest stále týž:



Obr. 5.



Obr. 6.

5.1. Středový úhel se rovná dvojnásobnému úhlu obvodovému nad týmž obloukem.

Protože k témuž jedinému středovému úhlu kružnice přísluší více obvodových úhlů nad týmž obloukem, musí býti všechny tyto obvodové úhly navzájem stejně velké. ♦

5.2. Všechny obvodové úhly nad týmž obloukem kružnice jsou stejně velké.

Nahradíme-li tětivu $\overline{AB}$ průměrem, přejde středový úhel v přímý (180°) a příslušný obvodový úhel, který je jeho polovinou, bude pravý.

5.3. Všechny obvodové úhly nad průměrem kružnice jsou pravé.

Tento důležitý poznatek je znám v geometrii již velmi dlouho. Ponejprv jej vyslovil řecký filosof a matematik Thales z Miletu (v 6. stol. před Kr.). Podle něho nazýváme právě dokázanou poučku větou Thaletovou.

Použijeme-li Thaletovy věty v našem obrazci pro průměr $\overline{C_1D_1}$, vidíme, že úhly $\widehat{C_1AD_1}$ a $\widehat{C_1BD_1}$ jsou pravé. Protože součet vnitřních úhlů ve čtyřúhelníku AD_1BC_1 je 360° (součet úhlů ve dvou trojúhelnících), a dva z nich jsou pravé, musí součet zbývajících dvou být 180° . Z toho plyne, že úhly $\widehat{AD_1B}$ a $\widehat{AC_1B}$ jsou výplňkové (jejich součet jest 180°).

5.4. Obvodové úhly nad touž tětivou, jejichž vrcholy leží po různých stranách tětivy, jsou výplňkové.

Chceme-li naopak sestrojiti vrcholy všech úhlů dané velikosti γ , jejichž ramena jdou pevnými body A a B , sestrojíme (obr. 6) při tětivě $\overline{AB}$ v bodě A úhel γ , zvaný úsekový, k jeho druhému rameni t vedeme kolmici a vyhledáme její průsečík S s osou úsečky $\overline{AB}$. Poloměrem $\overline{SA}$ opíšeme nad tětivou $\overline{AB}$ kruhový oblouk. Ze dvou možných oblouků zvolíme při ostrém úhlu γ větší, při tupém γ menší z nich. Pro naše úhly plyne z konstrukce: $\widehat{ASE} = \widehat{EAB}$ (úhly s rameny navzájem kolmými) a podle dokázané věty: $\widehat{AC_1B} = \widehat{AC_2B} = \frac{1}{2}\widehat{ASB} = \widehat{ASE} = \widehat{EAB} = \gamma$, čímž dokázáno, že úsekový úhel (se-
vřený tětivou a tečnou kružnice v jejím koncovém bodě) se rovná příslušnému úhlu obvodovému a tím potvrzena správnost konstrukce.

Cvičení:

20. Z kterého bodu se jeví strany trojúhelníka ABC ($a = 10$ cm, $b = 9$ cm, $c = 8$ cm) v témž zorném úhlu?

21. Čelní fronta budovy obdélníkového půdorysu ($a = 60$ m, $b = 40$ m) jeví se pozorovateli v zorném úhlu $\alpha = 22\frac{1}{2}^\circ$, boční fronta γ zorném úhlu

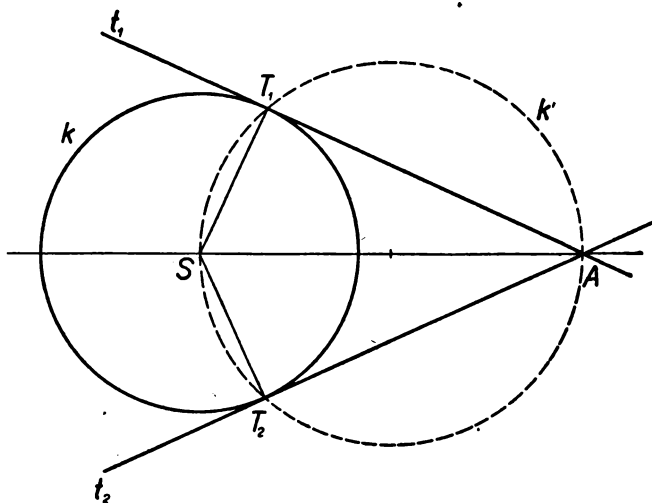
$\beta = 30^\circ$. Určete graficky (měř. 1 : 2000), jak daleko stojí pozorovatel od rohu budovy (úloha Pothenotova)!

22. Dán obdélník a přímka, která jej seče. Stanovte na ní bod, z něhož se jeví úhlopříčky obdélníka v témž zorném úhlu!

6. SPOLEČNÉ TEČNY KRUŽNIC.

Věty Thaletovy lze s výhodou užít při řešení úlohy: Ke kružnici k vedte z bodu A tečny (obr. 7)!

Protože hledané tečny jsou kolmé k příslušným poloměrům, převádí se naše úloha na sestrojení pravoúhlých trojúhelníků ST_1A a ST_2A , které mají přeponu v úsečce $\overline{AS}$ a vrchol pravého úhlu na dané



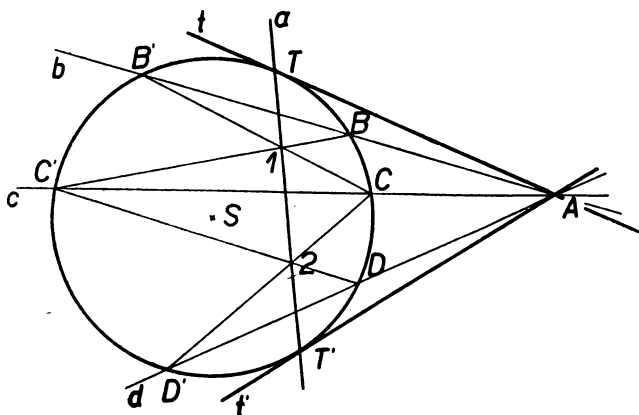
Obr. 7.

kružnici k . Stačí, když nad průměrem $\overline{AS}$ sestrojíme pomocnou kružnici k' a vyhledáme její průsečíky T_1, T_2 s kružnicí danou. Spojnice $\overline{AT_1}$ a $\overline{AT_2}$ jsou hledané tečny t_1, t_2 . Ze shodnosti obou trojúhelníků vyplývá rovnost úseček $\overline{AT_1} = \overline{AT_2}$.

6.1. Z bodu mimo kružnici lze k ní vést dvě stejně dlouhé tečny.

Předchozí úlohu lze řešit i jinak, a to pouhým pravítkem (obr. 8):

Bodem A vedeme ke kružnici k tři libovolné sečny b, c, d . Jejich průsečíky s kružnicí jsou postupně: $B, B' - C, C' - D, D'$. Spojíme-li průsečíky 1, 2 úhlopříček ve vzniklých čtyřúhelnících $BCC'B', CDD'C'$, protíná tato spojnice a kružnici k ve dvou bodech T, T' . Spojnice $t = AT, t' = AT'$ jsou hledané tečny, body T, T' příslušné dotykové body. Důkaz této konstrukce by vyžadoval znalost projek-
tivní geometrie.



Obr. 8.

Chceme-li zobraziti dvě kola $k_1(S_1, r_1)$ a $k_2(S_2, r_2)$ spojená napjatým řemenem a točící se stejným směrem, musíme sestrojiti takové přímky, které se současně dotýkají obou kružnic k_1 i k_2 . Tyto přímky jsou společné tečny kružnic k_1, k_2 (obr. 9).

Je-li $r_1 > r_2$, sestrojíme nejprve pomocnou kružnici k' kolem středu S_1 poloměrem $r_1 - r_2$. Ze středu S_2 vedeme k ní tečny t_1', t_2' . Přímky t_1 a t_2 s nimi rovnoběžné ve vzdálenosti r_2 (na opačné straně od S_1) jsou vnější společné tečny.

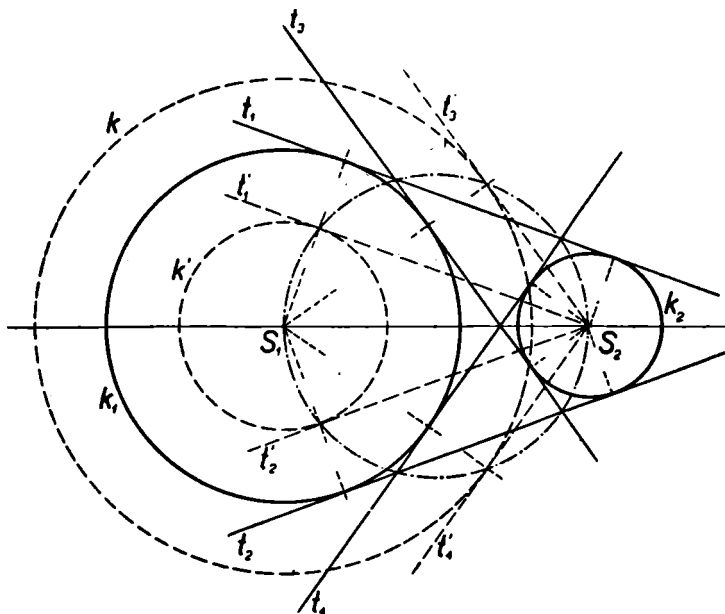
Kdyby se měla kola točiti opačným směrem, použili bychom řemene zkříženého. V obraze by to byly vnitřní společné tečny.

K jejich sestrojení použijeme pomocné kružnice k'' kolem středu S_1 poloměrem $r_1 + r_2$. Ze středu S_2 vedeme k ní tečny t_3'', t_4'' . Hledané tečny t_3, t_4 jsou s nimi rovnoběžné ve vzdálenosti r_2 (směrem k S_1).

Cvičení:

23. Dána kružnice $k(S, 4 \text{ cm})$ a bod $A(\overline{AS} = 7 \text{ cm})$. Sestrojte kružnici k' , která má střed v A a protíná kružnici k kolmo (tečny v průsečném bodě jsou kolmé)!

24. Na dané přímce p určete bod, z něhož se daná kružnice $k(S, 4 \text{ cm})$ jeví v zorném úhlu $\alpha = 30^\circ$!



Obr. 9.

7. KRUŽNICE A TROJÚHELNÍK.

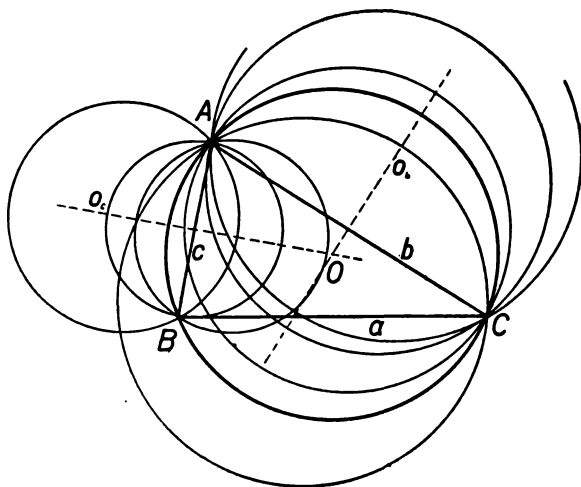
Vedeme-li půlčím bodem S_c dané úsečky $c = \overline{AB}$ k ní kolmici o_c , jest přímka o_c osou souměrnosti úsečky c a každý její bod C_i jest od obou koncových bodů A a B stejně vzdálen, o čemž se snadno přesvědčíme překlápěním pravoúhlých trojúhelníků ASC_i kolem osy o_c do shodných trojúhelníků BSC_i . Body C_i lze považovati za středy kružnic poloměrů $\overline{C_iA} = \overline{C_iB}$, které procházejí současně body A i B . Kružnice, jdoucí dvěma pevnými body A, B , tvoří svazek kružnic

(viz př. 4, kap. 2). Zvolme si třetí bod C , který neleží na přímce AB ! S body A, B tvoří trojúhelník ABC . Body A, C je určen jiný svazek kružnic, jejichž středy leží na ose o_b úsečky $b = \overline{AC}$. Snadno nahlédneme, že lze sestrojiti kružnici, která patří do obou svazků. Je to kružnice k jdoucí všemi třemi body A, B, C (obr. 10). Říkáme jí kružnici trojúhelníku ABC opsaná, trojúhelník jest jí vepsán. Střed opsané kružnice O leží v průsečíku os stran o_a , o_b a má od všech tří vrcholů stejnou vzdálenost r :

$$\overline{AO} = \overline{BO} = r \text{ (vlastnost bodů osy } o_c),$$

$$\overline{AO} = \overline{CO} = r \text{ (vlastnost bodů osy } o_b), \text{ odtud také:}$$

$$\overline{BO} = \overline{CO} = r \text{ (vlastnost bodů osy } o_a).$$



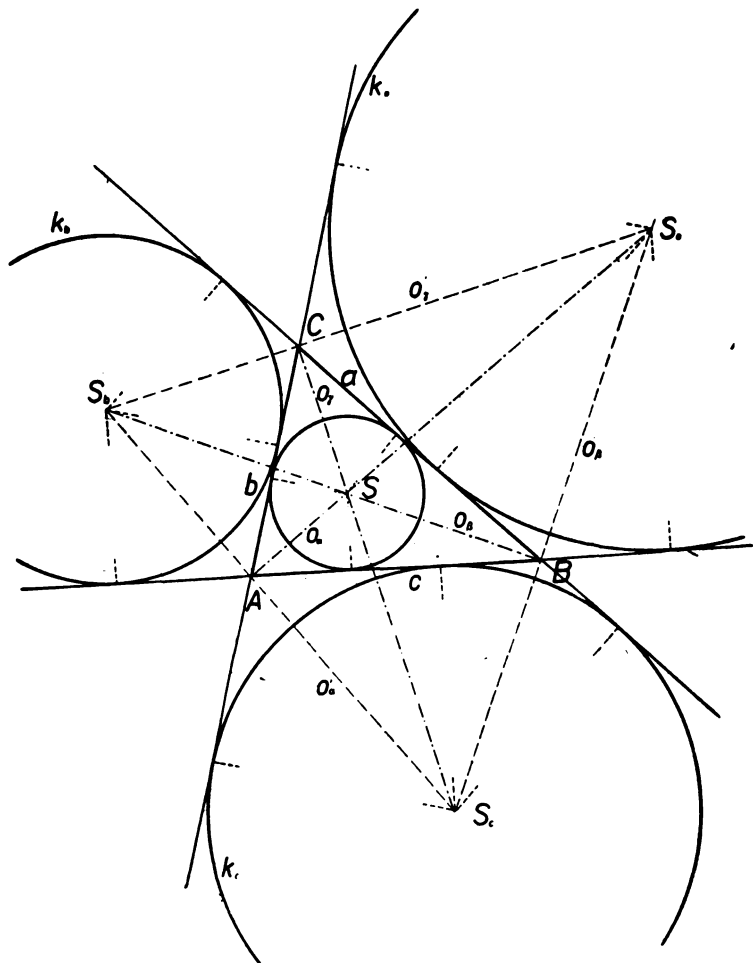
Obr. 10.

Bod O leží i na třetí ose o_a úsečky $\overline{BC}$. Tuto osu není třeba přihledání středu O sestrojovati.

7.1. Osy stran trojúhelníka se protínají v jednom bodě, který je středem kružnice trojúhelníku opsané.

Tato kružnice jest jen jedna, protože dvě přímky (o_b, o_c) se protínají jen v jednom bodě.

Položme si nyní úlohu, naléztli uvnitř daného trojúhelníka ABC bod S , který je od všech tří jeho stran stejně vzdálen (obr. 11)! Rozpůlíme-li vnitřní úhel $\gamma = \widehat{ab}$ přímkou o_γ ($\widehat{ao_\gamma} = \widehat{bo_\gamma}$), má každý bod C_i této osy souměrnosti stejnou vzdálenost od obou ramen a i b . Je středem kružnice, která se dotýká přímky a i b . Poloměr této kružnice je délka kolmice spuštěné z bodu C_i na a nebo b . Právě tak body



Obr. 11.

(uvnitř $\triangle$), stejně vzdálené od stran a , c leží na ose o_β vnitřního úhlu $\beta = \widehat{ac}$ a jsou středy kružnic, které se dotýkají stran a a c . Jediný průsečík S os o_β , o_γ má ode všech tří stran trojúhelníka stejnou vzdálenost, je tedy středem kružnice, jež se dotýká všech jeho stran. Jest to kružnice trojúhelníku vepsaná, trojúhelník jest jí opsán. Obdobně jako prve usoudíme, že také osa o_α vnitřního úhlu α jde bodem S .

7.2. Osy vnitřních úhlů trojúhelníka se protínají v jednom bodě, který je středem kružnice trojúhelníku vepsané.

Kdybychom sestavovali osy vždy dvou vnějších úhlů, na př. o_α' , o_β' , byl by jejich průsečík S_c vně trojúhelníka, ale též stejně vzdálen od všech tří jeho stran. Bod S_c je středem kružnice poloměru ρ_c , která se dotýká strany c a prodloužených stran a a b , jest trojúhelníku připsána. V průsečících S_a os o_β' , o_γ' a S_b os o_α' , o_γ' vnějších úhlů jsou středy dalších dvou připsaných kružnic poloměrů ρ_a , ρ_b .

Cvičení:

25. Jsou dány body A , B , C , D (žádné dvě jejich spojnice nejsou rovnoběžné). Narýsujte mezikružší, jehož jedna kružnice jde body A , B a druhá body C , D !

26. Když jsme narýsovali kružnici, ztratili jsme její střed. Pomozte nám jej nalézt! Vám se ovšem tato nehoda nestane, protože si jistě vyznačíte střed kružnice dříve, než ji začnete rýsovat.

27. Do kruhové výseče ($r = 6$ cm, $\alpha = 45^\circ$) vepište kružnici!

28. Narýsujte půdorys věnce 12 shodných po dvou se vzájemně dotýkajících kuliček ložiska, jehož vnější poloměr $R = 8$ cm!

29. Do mezikružší, jehož vnitřní poloměr $r = 5$ cm, vepište 8 navzájem se dotýkajících shodných kružnic!

30. Plynojem kruhového půdorysu se jeví ze vzdálenosti 60 m ve vodorovném zorném úhlu $\alpha = 30^\circ$. Určete graficky v měřítku 1 : 1000 délku jeho průměru!

31. Do rovnostranného trojúhelníka ($a = 10$ cm) vepište tři kružnice, z nichž každá se dotýká dvou stran trojúhelníka a zbývající dvou kružnic! Tato úloha ve zcela obecném případě (různostranný trojúhelník) je označována jako Malfattiho problém a řeší se složitými konstrukcemi.

32. Ověřte si pokusně tuto — velmi zjednodušenou — větu Poncellovu: Jsou-li kružnice k_1 a k_2 v takové poloze, že existuje trojúhelník ABC do kružnice k_1 vepsaný a současně kružnici k_2 opsaný, pak trojúhelníků této vlastnosti je nekonečně mnoho!

33. Hřiště má tvar rovnoramenného lichoběžníka (základny $a = 38$ m, $c = 25$ m, výška $v = 42$ m). Na jeho obvodě je běžecká dráha, jejíž vnější hranici tvoří části ramen b a d a dva kruhové oblouky, které se dotýkají obou ramen a vždy jedné základny. Narýsujte v měř. 1 : 500 a zjistěte odtud délku přímé části dráhy!

8. APOLLONIOVA KRUŽNICE.

Dvěma trojúhelníkům $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, jejichž odpovídající si úhly jsou stejně velké ($\alpha_1 = \alpha_2$, $\beta_1 = \beta_2$, $\gamma_1 = \gamma_2$) říkáme podobné.

O nich — jak bude dokázáno v jiném svazku této sbírky — platí poučka:

8.1. V podobných trojúhelnících jsou odpovídající si strany v témž poměru ($a_1 : a_2 = b_1 : b_2 = c_1 : c_2$) a naopak:

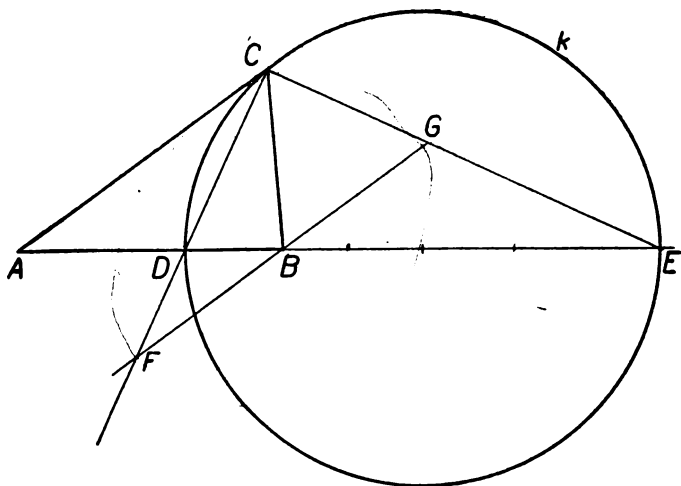
8.2. Jsou-li ve dvou trojúhelnících odpovídající si strany úměrné, jsou trojúhelníky podobné a mají tudíž navzájem stejné úhly.

Nyní k vlastní úloze: Sestrojiti geom. místo bodů, jejichž vzdálenosti od dvou daných bodů A a B jsou v daném poměru $p : q$ ($p > q$). Nejprve si určíme na spojnici AB body D a E , vyhovující naší podmínce. Rozdělíme-li úsečku $\overline{AB}$ na $p + q$ stejných dílů, leží bod D v koncovém bodě p dílu (počítáno od A), rozdělíme-li ji na $p - q$ stejných dílů a nanášíme-li tyto díly od A přes B , jest koncový bod p dílu hledaným bodem E . Nad průměrem $\overline{DE}$ sestrojíme kružnici, která se nazývá Apolloniova (obr. 12).

Spojme libovolný bod C_i této Apol. kružnice s body A, B, D, E ! Protože úsečka $\overline{DE}$ jest jejím průměrem, jest podle Thalotovy poučky úhel $\widehat{DC_iE}$ pravý. Nyní vedeme bodem B rovnoběžku so spojnici $\overline{AC_i}$. Tato rovnoběžka protne spojnici C_iD a C_iE v bodech F a G . Protože podle 1,1 a 1,2 úhel $\widehat{C_iAD} = \widehat{GBE} = \widehat{DBF}$, jsou trojúhelníky $\triangle ADC_i$ a $\triangle BDF$ podobné, právě tak, jako trojúhelníky $\triangle AEC_i$ a $\triangle BEG$. Odpovídající si strany jsou proto úměrné: $\overline{AD} : \overline{BD} = \overline{AC_i} : \overline{BF}$, $\overline{AE} : \overline{BE} = \overline{AC_i} : \overline{BG}$. Podle konstrukce je poměr na levých stranách obou úměr týž ($p : q$), proto i poměry na pravých stranách jsou tytéž:

$$\overline{AC_i} : \overline{BF} = \overline{AC_i} : \overline{BG} = p : q, \quad .$$

čož lze splniť jen, když: $\overline{BF} = \overline{BG}$. V pravoúhlém trojúhelníku FGC , je bod B středem přepony a současně tedy středem opsané kružnice, proto: $\overline{BF} = \overline{BG} = \overline{BC}$.



Obr. 12.

Dosadíme-li tento výsledek do předchozí úměry, dostaneme konečně:

$$\overline{AC_i} : \overline{BC_i} = p : q.$$

Každý bod Apol. kružnice má od bodů A a B daný poměr vzdáleností $p : q$.

Kdybychom však při téže volbě bodů A, B, D, E volili bod C_1 mimo Apol. kružnici, platily by všechny předchozí úvahy beze změny až na podmínku o velikosti úhlu $\widehat{DC_1E}$, který by nebyl pravý, a proto v tomto případě $\overline{BF} = \overline{BG} \neq \overline{BC_i}$, úsečky $\overline{AC_i}, \overline{BC_i}$ nejsou v poměru $p : q$.

8.3. Apolloniova kružnice je geometrickým místem bodů, které mají od dvou pevných bodů stálý poměr vzdáleností.

Tato kružnice má své jméno od řeckého matematika Apollonia z Pergy, který žil v Alexandrii kolem r. 200 př. Kr. a proslavil se řešením četných úloh o kružnici i o jiných kuželosečkách (elipse, hyperbole, parabole).

Cvičení:

34. V trojúhelníku ABC ($\overline{AB} = 6$ cm, $\overline{AC} = 7$ cm, $\overline{BC} = 5$ cm) určete na výšce v_c bod D , jehož vzdálenosti od A a B jsou v poměru $2 : 1$!

35. Tři místa A , B , C tvoří trojúhelník o stranách $\overline{AB} = 9$ km, $\overline{BC} = 10$ km, $\overline{AC} = 12$ km. Určete (v měř. $1 : 100\,000$) uvnitř trojúhelníka bod D , do něhož dorazí současně z A chodec, jdoucí přímou pěšinou 6 km/hod., z B povoz, jedoucí přímou cestou 10 km/hod. a z C cyklista, jedoucí přímou silnicí 15 km/hod., vyrazili-li v tomtéž okamžiku!

36. Mezikruží kruhového terče ($1, 2, 3, \dots, 10$) měla šířku rovnou vnitřnímu poloměru. Byl-li zásah na rozhraní dvou polí, počítal se již do vnitřního (lepšího) pole. Po třech ranách zjistil střelec, že má po jedné desítce (bod A), devítce (B) a osmičce (C), vždy jen těsně. Když chtěl později ve střelbě pokračovat, shledal, že terč zmizel, zbyly jen otvory A , B , C ve dřevě. Jak nalezne střed terče a jednotlivé kružnice?

37. Vedoucí umístil na hřišti 3 družstva žáků takto: I. (10 ž.) v bodě A , II. (8 ž.) v bodě B a III. (12 ž.) v bodě C . ($\overline{AB} = 30$ m, $\overline{AC} = 24$ m, $\overline{BC} = 28$ m). Při hře musí I. členové družstva doběhnouti k metě D a vrátiti se na své místo, pak běží další, až se všichni vystřídají. Kde vytýčí vedoucí metu, aby tato hra o závod byla spravedlivá ($1 : 400$)?

9. KŘIVKY SLOŽENÉ Z KRUHOVÝCH OBLOUKŮ.

Vhodným spojováním kružnic, které se dotýkají zevně nebo zevnitř, můžeme vytvořiti různé křivky buď uzavřené nebo ubíhající do nekonečna.

Ve všech obrazech této kapitoly jest střed kruhového oblouku označen touž číslicí jako příslušný oblouk. Kruhové oblouky rýsujte podle obrázků v pořadí číslic!

Ovál: Základní čtyřúhelník 1324 (obr. 13) je kosočtverec. Ovál nesmíme zaměňovat s elipsou, již se velmi podobá.

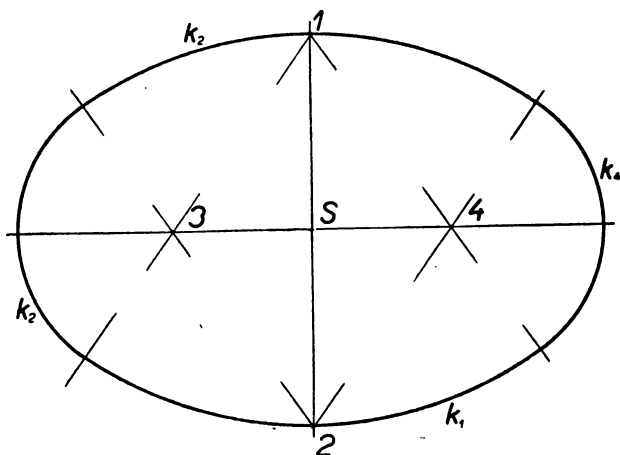
Vejcovka: Viz obr. 14!

Trojlist (obr. 15), který jest základním obrazcem gotických kružeb, má za základ rovnostranný trojúhelník 123 a kruhové oblouky stejných poloměrů.

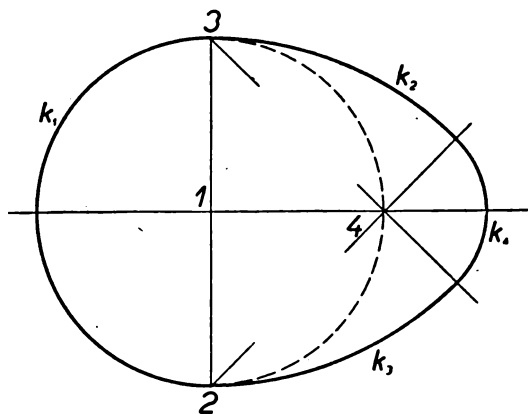
Závitnice (spirála): Půlkružnice nad přímkou p (obr. 16) mají střed v bodě 1, dolní půlkružnice v bodě 2. Bod 2 může býti v koncovém bodě první horní půlkružnice.

Vlnovka: Vyšrafované rovnoramenné trojúhelníky v obr. 17 jsou shodné.

Zvláštní případ nastane, když body 1234 ... jsou v jedné přímce, oblouky přejdou v půlkružnici.



Obr. 13.



Obr. 14.

Cvičení:

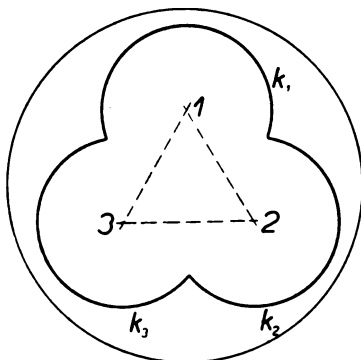
38. Narýsujte ovál v případě, že trojúhelník 234 jest rovnostranný ($a = 4 \text{ cm}$)!

39. Narýsujte trojlíst, jehož kružnice se navzájem dotýkají!

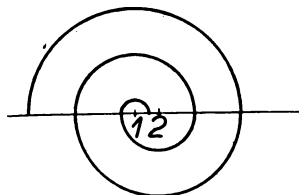
40. Zobraďte ve skutečné velikosti část profilu svinovací záclony (rolety) z vlnitého plechu, jestliže na 1 bm plechu připadá 25 polovin vysokých 1 cm!

41. Bruslař kreslí na ledě „osmičky“ složené ze dvou stejně velkých kružnic, které se navzájem dotýkají. Jak velká může být nanejvýš tato osma na čtvercovém kluzišti o straně 35 m? Narýsujte v měřítku 1 : 500!

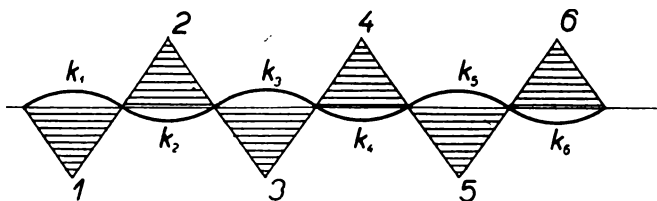
42. Dán čtverec $ABCD$ ($\overline{AB} = 1$ cm). Sestrojte spirálu, složenou ze čtvrtkružnic! První má střed A , poloměr $\overline{AD}$, druhá má střed B , další C atd.



Obr. 15.



Obr. 16.



Obr. 17.

10. MASCHERONIHO ÚLOHY.

Přesnost, s jakou narýsujeme kružnici, závisí na správném zabodnutí hrotu kružítko do jejího středu a na rozevření kružítko tak, aby druhý hrot měl od středu správnou vzdálenost r . Naproti tomu při rýsování přímky musíme hranu pravítka, která nebývá vždy

Dánský matematik Georg Mohr věnoval část své knihy Euklides Danicus (1672) těmto konstrukcím. Soustavně se však jimi zabýval italský matematik Lorenzo Mascheroni v knize Geometria del Compasso (1797), kde dokázal, že všechny úlohy, které se sestavují pravítkem a kružítkem, lze provádět pouhým kružítkem. Podle něho nazýváme úlohy tohoto druhu mascheronské. Na ukázkou z nich provedeme tyto:

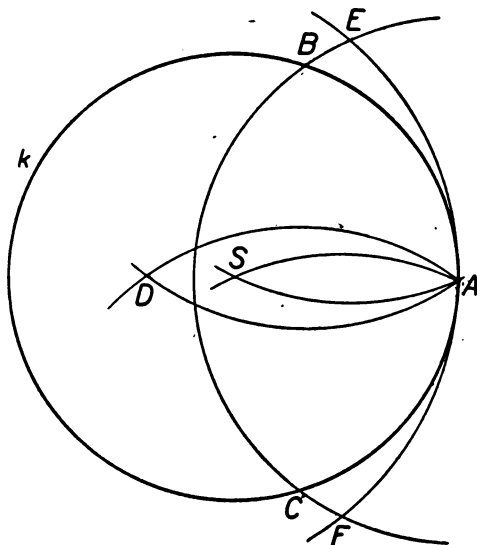
Podle obrazce sestrojujeme kruhové oblouky týchž poloměrů $r = \overline{AB}$, trojúhelníky $AB1$, $12B$, $BC2$, $23C$ a $CD3$ jsou rovnostranné, $\overline{AD} = 3 \cdot \overline{AB}$.

27

o poloměru $\overline{4A} = \overline{4X}$ resp. $\overline{5A} = \overline{5X}$, jež se protnou v bodě X . Úsečka $\overline{AX} = \frac{1}{3} \cdot \overline{AB}$. Správnost plyne z podobnosti rovnoramenných trojúhelníků $AD4'$ a $A4X$, které mají společný úhel při základně $DA4$. Jejich příslušné strany jsou úměrné:

$$\overline{AX} : \overline{A4} = \overline{A4} : \overline{AD}, \text{ neboli } \overline{AX} : \overline{AB} = r : 3r = 1 : 3.$$

Nalézti neznámý střed S narýsované kružnice k (obr. 19):



Obr. 19.

Postupně rýsujeme kruhové oblouky (první písmeno značí střed kružnice, uvedená úsečka její poloměr): 1. $\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{AE} = \overline{AF}$ (bod A i poloměr $\overline{AB}$ libovolný), 2. $\overline{BA} = \overline{BD}$, 3. $\overline{CA} = \overline{CD}$, 4. $\overline{DA} = \overline{DE} = \overline{DF}$, 5. $\overline{EA} = \overline{ES}$, 6. $\overline{FA} = \overline{FS}$. Důkaz vyplývá z podobnosti rovnoramenných trojúhelníků ADF a AFS , po př. ABD a ASB .

Do kružnice k vepsati pravidelný mnohoúhelník (obr. 20):

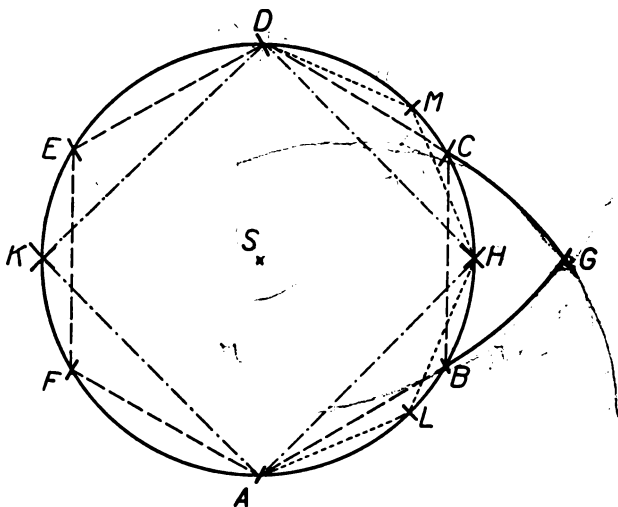
Poloměr r lze nanést na obvod kružnice k celkem šestkrát. Strany vepsaného pravidelného šestiúhelníka jsou proto:

$$a_6 = r = \overline{AB} = \overline{BC} = \dots = \overline{FA}.$$

Vepsaný rovnostranný trojúhelník dostaneme spojováním ob jeden vrchol:

$$a_3 = \overline{AC} = \overline{CE} = \overline{EA}.$$

V pravoúhlém trojúhelníku ACD jest: $\overline{AD} = 2r$, $\overline{CD} = r$ a podle Pythagorovy věty: $a_3 = \overline{AC} = r\sqrt{3}$.



Obr. 20.

Kruhové oblouky $AC = AG$ a $DB = DG$ se protínají v bodě G . V pravoúhlém trojúhelníku ASG jest: $\overline{AS} = r$, $\overline{AG} = r\sqrt{3}$ a opět podle Pythagorovy věty: $\overline{SG} = r\sqrt{2} = a_4$, což je délka strany vepsaného čtverce. Kruhové oblouky $AH = AK = SG$ opsané kolem A vytknou na kružnici k zbývající vrcholy čtverce $AHDK$.

Přetneme-li kružnici k kruhovým obloukem opsaným kolem G poloměrem r v bodech L, M , vznikne čtverec $SLGM$ a v něm úhel GSL měří 45° .

Proto úsečky $\overline{AL} = \overline{LH} = \overline{HM} = \overline{MD} = \dots$ jsou stranami vepsaného pravidelného osmiúhelníka.

Výsledky cvičení:

1. b) nekonečně mnoho, c) na kružnici (střed A , $r = 3$ cm), 2. a) C v průsečíku kružnic k_1 (A , 4 cm), k_2 (B , 4 cm), b) dva, c) souměrně položené podle $\overline{AB}$, d) rovnoramenný $\triangle$, 3. a) alespoň $\frac{1}{2}\overline{AB}$, b) ($\frac{1}{2}\overline{AB}$, c) v úsečku $\overline{AB}$, 4. viz 3., 5. $k_1(S, r = \overline{SL})$, $k_2(S, r + \delta)$, 6. a) je-li $v < r$, tím spíše $v < R$, b) leží také vně menší kružnice, c) ne, d) o bodech uvnitř mezikruží, 7. a) středy na kolmici $k \perp t$ v bodě T , b) $= a$, 8. 2 rovnoběžky po obou stranách t ve vzdálenosti 2 cm, 9. středy v průsečících rovnoběžek $a'a''$ a $b'b''$ vedených ve vzdál. 1 cm od a a b , 4 řešení, 10. střed v průsečíku kružnice $k(A, 2$ cm) a rovnoběžky $a' || a$ ve vzdál. 2 cm, 11. střed v průsečíku kolmic $k_1 \perp a$ bodem A , $k_2 \perp b$ bodem B , 12. viz 9., střed v tupém úhlu, 13. koncový bod průměru kolmého k těživě, 14. v koncovém bodě průměru kolmého k silnici, 15. k' jde koncovými body průměru kolmého k SA , 16. k_1, k_2, k_3 se po dvou dotýkají zevně, 17. k_5 a k_6 se dotýkají zevně, k_5 i k_6 se dotýkají kružnice k_4 zevnitř, 18. středy na prodlouž. průměru $\overline{ST}$, 19. na kružnicích k_1 (S , 3 cm), k_2 (S , 5 cm), 20. v průsečíku kružnic k_1 (tětíva $\overline{AB}$, obv. úhel 120°), k_2 ($\overline{AC}$, 120°), 21. 34 m, 22. v průsečících přímký s osami stran a s opsanou kružnicí, 23. z A tečny ke k , 24. nad libov. poloměrem $\overline{LS}$ pravoúhlý $\triangle ALS$ ($\widehat{LAS} = 15^\circ$, $\widehat{SLA} = 90^\circ$), průsečík p s kružnicí k' ($S, r = \overline{SA}$), 25. střed v průsečíku os úseček $\overline{AB}$ a $\overline{CD}$, 26. do kružnice vepsati libovolný $\triangle$, v něm osy stran, 27. oba poloměry a tečna kolmá k ose úhlu α omezí rovnoramenný $\triangle$, jemu se vepíše kružnice, 28. podle 27. se vepisují kružnice do 12 výsečí ($R = 8$ cm, $\alpha = 30^\circ$), 29. trojúhelníkům, jež jsou opsány 8 výsečím ($r = 5$ cm, $\alpha = 45^\circ$), připisují se kružnice, 30. 40 m, 31. kružnice se vepisují trojúhelníkům, ve které je daný $\triangle$ rozdělen výškami, 32. obecnému $\triangle ABC$ se opíše kružnice k_1 a vepíše k_2 , z libov. bodu A_i na k_1 se vedou tečny ke k_2 , spojnice jejich druhých průsečíků B_i, C_i s kružnicí k_1 je tečnou k_2 , 33. přímá část 11 m, 34. v průsečíku Apol. kružnice k_1 ($A, B, 2:1$) s výškou v_c , 35. v průsečíku Apol. kruž. k_1 ($A, B, 3:5$), k_2 ($B, C, 2:3$), 36. v průsečíku Apol. kruž. k_1 ($A, B, 1:2$), k_2 ($A, C, 1:3$), 37. v průsečíku Apol. kruž. k_1 ($A, B, 4:5$), k_2 ($B, C, 3:2$), 38. viz obr. 12, 39. $r = \frac{1}{2}$ strany 12, 40. kruh. oblouky opsané rovnoramenným trojúhelníkům ($z = 4$ cm, $v = 1$ cm), 41. kružnice vepsané do dvou $\triangle$, ve které dělí čtverce jedna úhlopříčka, $\varrho = 10\frac{1}{4}$ m, 42. $r_1 = 1$ cm, $r_2 = 2$ cm, $r_3 = 3$ cm ...

ÖBSAH.

	Str.
Úvod	3
1. Základní měřické poučky	4
2. Jak vzniká kružnice. Mezikruží	5
3. Kružnice a přímka	6
4. Dvě kružnice	10
5. Obvodové úhly v kružnici	13
6. Společné tečny kružnic	16
7. Kružnice a trojúhelník	18
8. Apolloniova kružnice	22
9. Křivky složené z kruhových oblouků	24
10. Mascheroniho úlohy	26
Výsledky cvičení	30

Spisovatel *Ota Setzer.*

Název díla *Kružnice.*

Knižnice *Brána k věděni, sv. 12.*

Redaktor sbírky *Vítězslav Jozísek.*

Šefredaktor *Miroslav Střída.*

Stran 32 a 20 obrazců. Náklad 5 500 výtisků. Vydání 1.

49 904/50/III. Sazba 12. IX. 1950. Tisk 16. XI. 1950.

Vytiskly *Středočeské tiskárny n. p., závod 07, Prometheus, Praha 8.*

Vysazeno písmem Extended. Všeobecná daň 1 %. Cena brož. 11 Kčs.

