

Imaginární elementy v geometrii

Ladislav Seifert (author): Imaginární elementy v geometrii. (Czech).
Praha: Jednota českých matematiků a fyziků, 1941.

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/402973>

Terms of use:

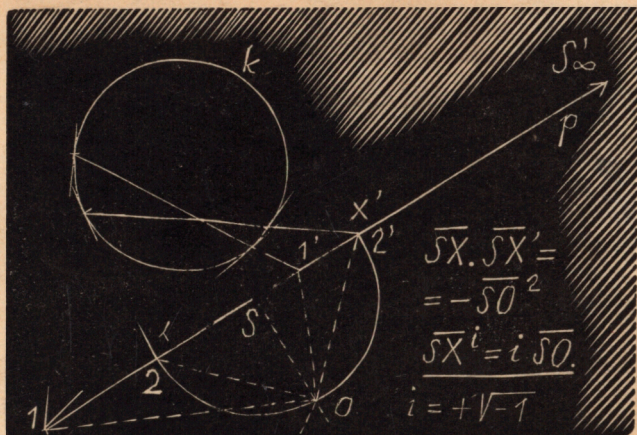
© Jednota českých matematiků a fyziků

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

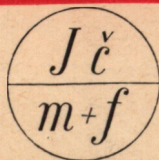
C E S T A K V Ě D Ě N Í S V. 10.



PROF. DR. LADISLAV SEIFERT

IMAGINÁRNÍ ELEMENTY V GEOMETRII

JEDNOTA ČESKÝCH MATEMATIKŮ A FYSIKŮ V PRAZE



K 14,40

L. Seifert:

IMAGINÁRNÍ ELEMENTY V GEOMETRII

Obecnost mnohých vět elementární matematiky spočívá na předpokladu, že byla zavedena čísla komplexní. Aby tomu bylo podobně s větami elementární geometrie rovinné a v prostoru, je třeba zavést imaginární body, přímky, příp. celé křivky, imaginární roviny atd. Seifertova knížka jednoduchým způsobem — vycházejíc od elementární geometrie analytické — uvádí čtenáře do klasických metod takového zavedení — do geometrie projektivní — která v minulém století přinesla tolik nového; definuje jak páry sdružených imaginárních elementů v jednomocných reálných útvarech, tak — podle Staudta — jednotlivé samotné imaginární prvky.

Vedle všech základních konstrukcí s těmito prvky nebo s těmito prvky a prvky reálnými (jako na př. určení imaginárních průsečíků přímky a kružnice, nebo určení roviny třemi imaginárními body a pod.) najde zde čtenář zmínky o imaginárních mimoběžkách, o imaginárních kuželosečkách, o komplexní rovině atd.

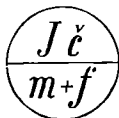
K 14,40

C E S T A K V Ě D Ě N Í

PROF. DR. LADISLAV SEIFERT

IMAGINÁRNÍ ELEMENTY V GEOMETRII

S 26 obrázků



Vyšlo jako 10. svazek sbírky

C E S T A K V Ě D Ě N Í

vydávané Jednotou českých matematiků a fysiků v Praze za redakce

Dra R. BRDIČKY, Dra F. VYČICHLO a Dra L. ZACHOVALA

1 9 4 1

NÁKLADEM JEDNOTY ČESKÝCH MATEMATIKŮ A FYSIKŮ V PRAZE

TISKEM KNIHTISKÁRNY „PROMETHEUS“ V PRAZE VIII

Veškerá práva vyhrazena.

PŘEDMLUVA.

Abiturient střední školy, ba často i ten, kdo již pronikl hlouběji do některých odvětví matematiky, má obvykle jen mlhavou představu o imaginárních geometrických útvarech. Zpravidla ví, že na př. kvadratické úlohy mohou mít řešení pomyslná, ale dalšího vysvětlení a významu této skutečnosti se mu nedostane; v učebnicích elementární geometrie se hledí autoři spíše těmto případům vyhnouti. Prvá příležitost, kde se studující s imaginárními elementy blíže seznamuje, bývá syntetická geometrie kuželoseček, ale je otázka, je-li toto místo nejvhodnější, když přece nepřirozeněji se k imaginárním elementům přichází cestou analytickou.

Při výkladu některých partií matematiky je dobře přidržeti se cesty skutečného vývoje; takový výklad bývá nepřirozenější a nejjednodušší. Podobný postup hleděl jsem zachovati i v tomto spisku, při čem jsem měl na zřeteli především stránku konstruktivní. Doufám, že se mi podařilo zaplniti mezeru, kterou obvykle pociťuje začátečník, dokud se mu nepodaří ji vyplniti srovnáváním výsledků geometrických s analytickými, a že mu zároveň bude tento výklad povzbuzením, aby věnoval pozornost moderní geometrii imaginárních útvarů, o které není možno se tu rozepisovati a jejíž nepatrnou ukázkou je dodatek připojený na konci spisku.

Děkuji panu redaktorovi této sbírky, p. dr. *F. Vyčichlovi*, za četné rady a pomoc při sepsání spisku a *Jednotě českých matematiků a fysiků* za to, že jej vydala, a tiskárně *Protheus*, že věnovala tisku a úpravě nevšední péči.

Brno, v prosinci 1940.

L. Seifert.

ÚVOD.

Sledujeme-li vývoj aritmetiky, vidíme, jak postupně od čísel celých, s nimiž se shledáváme již na úsvitě kultury, přišla v užívání čísla lomená neboli zlomky, pak čísla záporná, čísla irracionální a naposledy čísla soujenná neboli komplexní (imaginární), jež dostáváme, přičteme-li k reálným číslům násobky imaginární jednotky $i (= + \sqrt{-1})$. Historický vývoj se shoduje s obvyklým postupem školským. Zavedením komplexních čísel se velmi zjednodušila teorie rovnic.*) Kdybychom se omezili jen na reálná čísla, museli bychom říci, že rovnice druhého stupně s reálnými součiniteli má buď dva, nebo jeden, nebo žádný kořen, nebo kratčeji: Rovnice druhého stupně má nejvýše dva kořeny. Pripustíme-li čísla komplexní, můžeme tvrditi obecně: Rovnice druhého stupně má vždy dva kořeny. O rovnici n -tého stupně s reálnými koeficienty museli bychom podobně říkat, že má nejvýše n kořenů a rozeznáváti případy, kdy má 1, 2, 3, ..., n kořenů, nebo kdy nemá kořen. Pripustíme-li však komplexní čísla a máme náležitý zřetel k násobnosti kořenů, můžeme vysloviti větu velmi obecnou: Rovnice n -tého stupně má n kořenů. Pokrok matematiky záleží v tom, že se podaří různé věty spojit v obecnější a různé vlastnosti objasniti s téhož hlediska. To se obyčejně stane, podaří-li se nějaký pojem rozšířiti čili zobecniti neb zavéstí nový, širší, jako se stalo v uvedeném případě s pojmem čísla, který byl rozšiřován postupně zavedením zlomků, čísel záporných, irracionálních a konečně komplexních.

Podobné důvody, jaké vedly v algebře k zavedení komplexních čísel, vedly i v geometrii k zavedení imaginárních elementů. Průsek přímky s kuželosečkou vede na př. v analytické geometrii na rovnici stupně druhého, průsek přímky s křivkou stupně n na rovnici n -tého stupně, a říkáme, že přímka seče kuželosečku ve dvou bodech, křivku n -tého

*) Viz dr. Š. Schwarz: O rovnicích. Cesta k vědě, sv. 1.

stupně v n bodech. Tu ovšem připouštíme, že komplexní řešení jsou stejně platná s reálnými. To nám dovoluje vysloviti větu tak obecnou. Úkolem podrobnějšího prozkoumání jest pak určití, kolik řešení jest reálných a kolik imaginárních. Zřejmě jsou tato tvrzení založena prostě na tom, že algebraické operace platí stejně pro reálná jako pro komplexní čísla.

Zde vidíme cestu, jak lze imaginární elementy v geometrii nejsnáze zavéstí.

Bod na přímce určujeme tak, že zvolíme na ní počátek O a od toho měříme vzdálenost bodu. Při tom přímku orientujeme, t. j. vzdálenost na jedné straně od O považujeme za kladnou, na druhé straně za zápornou. Reálnému bodu přisuzujeme reálné číslo, kladné nebo záporné (vzdálenost od O), a obráceně reálnému číslu přiřadujeme bod. Číslu komplexnímu $a + bi$, ($b \geq 0$) přiřadíme ideální bod, řekněme mu imaginární bod.*) Úlohou dalších stránek bude hledati geometrický smysl tohoto přiřazení.

Bodové řadě na přímce patří v rovině jako duální útvar svazek paprsků s vrcholem V . Volme jeden z nich x za základní a určíme další p vždy tangentou úhlu $\widehat{xp}$ měřeného podle úmluvy v kladném smyslu otáčení, t. j. proti pohybu hodinových ručiček. Paprsku p patří tedy parametr $\lambda = \tan \widehat{xp}$ a obráceně parametru λ patří paprsek. Je-li tento parametr komplexní $\lambda_1 + i\lambda_2$, ($\lambda_2 \geq 0$), říkáme, že přiřazený paprsek je imaginární.

Podobně v rovině volíme dvě osy k sobě kolmé a náležitě orientované x, y s průsečíkem O a určujeme bod dvěma souřadnicemi. Jsou-li obě souřadnice reálné, jest bod reálný; není-li aspoň jedna reálná, říkáme, že bod je imaginární. Podobně v prostoru volíme tři k sobě kolmé osy x, y, z

*) Bylo by možno říkati také komplexní bod, avšak v literatuře jest již ustálen název imaginární pro elementy, jejichž souřadnice nejsou všechny reálné. Slovo imaginární má zde tedy význam jako slovo nereálný.

jdoucí počátkem O a přiřadíme bodu tři souřadnice čili troj-
jinu čísel. Není-li aspoň jedna reálná, říkáme, že bod je
imaginární. Podobně lze mluvit i o jiných imaginárních ele-
mentech (rovinách, přímkách, kružnicích, koulích atd.).

Toto zavedení imaginárních bodů, paprsků atd. je sice
velmi abstraktní a naprosto nenázorné, ale zcela odůvodněné,
neboť má za účel zjednodušení geometrických úvah.

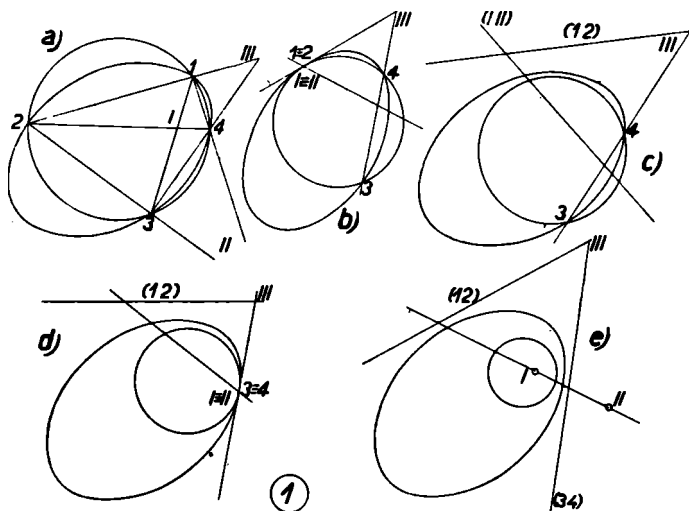
Úloha, kterou si klademe, jest nalézt hlubší smysl tohoto
zavedení, nebo lépe řečeno, takovou interpretaci imaginár-
ních elementů, abychom konstrukce, které provádíme s reál-
nými elementy, mohli provést i s imaginárními.

Povšimněme si však dříve aspoň stručně, jaké úvahy vedly
k tomu, že se o imaginárních elementech, t. j. nejprve
o imaginárních bodech, přímkách a rovinách, začalo mluvit
a jak si postupem času dobyly úplné rovnoprávnosti s reál-
nými.

U kolébky moderní geometrie stál Poncelet (1788 až
1867). On je vlastním tvůrcem projektivní geometrie a v jeho
úvahách hraje důležitou úlohu t. zv. princip kontinuity.
Usuzoval asi takto: Povstává-li jeden obrazec z jiného spo-
jitou změnou a je-li „právě tak obecný“ jako onen, lze vlast-
nosti na jednom dokázané přenést na druhý. Vlastnost
taková nemůže zmizet a jsme oprávněni z případu, kde
jisté elementy skutečně jsou, soudit na případ, kdy některé
elementy jsou ideální (t. j. imaginární). Na př. dvě kuželo-
sečky mohou mít společné čtyři reálné body, vesměs různé
 $1, 2, 3, 4$ (obr. 1a). Spojitou změnou můžeme dostat případ,
kdy dva body splynou (obr. 1b) další změnou pak tyto body
zmizí a zůstanou jen dva reálné (př. c), pak i tyto splynou
(př. d) a konečně dostaneme kuželosečky, které nemají
reálného bodu (př. e). V případech c), d), e) však vždy dva
určité imaginární body mají reálnou spojnicí. Čtyřúhelník 1234
patří diagonální trojúhelník $III III$, jehož každý vrchol
je pólem protější strany k oběma kuželosečkám. V případě a)
jsou všechny vrcholy I, II, III reálné a různé, v b) splynou
vrcholy I, II , v c) jsou I, II imaginární na reálné spojnicí,

v d) splynou v reálném bodu dotyku a v e) se opět od sebe rozliší, třeba průsečíky 1, 2, 3, 4 jsou imaginární.

Poncelet se snaží vybudovati geometrii na syntetických úvahách bez jakýchkoli výpočtů a vyhýbá se zřejmě poj-
mům délka a úhel, jež jsou základními pojmy metrické geo-
metrie. Užívaje principu kontinuity, jest si patrně vědom
toho, že k uvažovaným geometrickým pochodům patří



Tento princip kontinuity se ponenáhlu vžíval, ale přece se cítilo, že je zde něco, co potřebuje objasnění. Ještě velký německý syntetik J. Steiner (1796—1863) nemá k imaginárním elementům určitého stanoviska. Přišla však doba po roce 1850, již v historii matematiky zoveme kritickou, jejíž snahou bylo revidovati základy a která se snažila každé odvětví matematiky vybudovati tak, aby ze základních vět či axiomů vycházely ostatní logickou dedukcí. Tato snaha se v oboru, jejíž máme na mysli,jevila dvojím způsobem. Nejprve se uznávala nutnost v případech, kde jisté elementy byly imaginární, podati nové důkazy, kde by se operovalo jen s elementy reálnými, a nemluvíti vůbec o elementech imaginárních. Toto stanovisko je logicky správné, ale není účelné, neboť jsme nuceni předem rozlišovati všechny možné případy podle reálnosti elementů.*) Kladnou stránku této metody jest spatřovati v tom, že problém se považuje za řešený až jsou zodpověděny všechny otázky týkající se reálnosti. V té příčině znamená tato metoda značný přínos nových poznatků. Jiným směrem jdou pokusy, zjednati imaginárním elementům rovnoprávnost na základě nových k reálným obrazcům se vztahujících definic a zjednati výsledkům projektivní geometrie (syntetické) takovou obecnost, jako mají výsledky analytické geometrie. V té příčině má fundamentální důležitost spis Staudtův, *Geometrie der Lage*, a zejména jeho *Beiträge zur Geometrie der Lage* (Nürnberg 1856—60). Staudt se snažil vybudovati čistou geometrii polohy či projektivní geometrii nezávisle na metrických pojmech (délce a úhlu) a skutečně se mu v principu podařilo naléztí geometrickou paralelu pro algebraické operace. U Staudta a jeho následovníků vidíme stále jasnou tendenci, odstraniti výjimky z pravidla a dosáhnouti jednoduchosti a obecnosti. V takovém vývoji jest spatřovati

*) Dobrý příklad této metody je učebnice Reye, *Geometrie der Lage*, kde se autorovi podařilo vybudovati tímto způsobem teorii kuželoseček a útvarů kvadratických. Jde-li se k vyšším útvarům algebraickým, má tato metoda značné nesnáze.

pokrok vědy. Staudtův spis však se čte velmi těžko a začátečníku je téměř nepřístupný. *)

V této knížce se omezíme většinou jen na pouhou geometrickou interpretaci imaginárních výsledků, ke kterým vedou především kvadratické úlohy a jež je postačitelná k tomu, aby začátečník nabyl přesvědčení, že imaginární elementy mají v úvahách geometrických stejné oprávnění jako reálné. Sledujeme myšlenky Staudtovy jen v nejjednodušších případech, užívající prostředků pokud možno elementárních.

Na konec přidáváme kapitolu o Gaussově rovině, kde jde o jinou interpretaci imaginárního bodu, o zobrazení imaginárních bodů přímkou na reálné body roviny. To jest jen nepatrná ukázka z moderní teorie imaginárních veličin. Podobné úvahy pro body v rovině neb prostoru nebo jiné útvary vedou k útvarům značně složitým a není možno se v tomto spisku jimi zabývat.

1. Základní věty geometrie polohy v rovině.

Základní elementy v rovině jsou bod a přímka. Místo přímka říkává se paprsek.

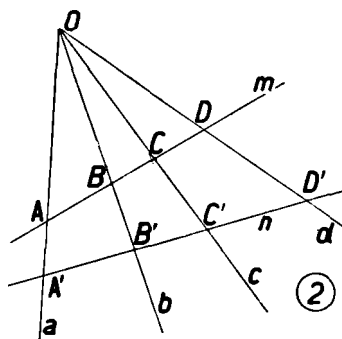
Přímá řada bodová je souhrn bodů na přímce. Je-li vyloučeno nedorozumění, říkáme krátce jen řada bodová. Svazek přímkový nebo paprskový je souhrn přímek v rovině, které jdou pevným bodem, jež zoveme vrchol nebo střed svazku. Říkáme také jenom svazek.

Na každé přímce v rovině si myslíme jeden bod nevlastní čili nekonečně vzdálený. Nevlastní body všech přímek roviny vyplňují opět přímku — nevlastní přímku roviny (nekonečně vzdálenou). Tento předpoklad se obvykle nazývá perspektivní názor či Desargueův, ač úvahy,

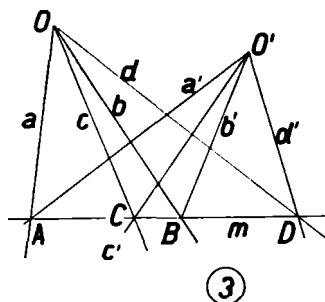
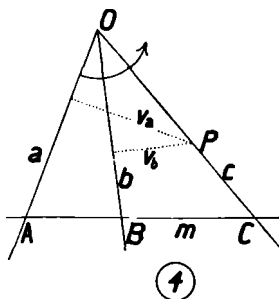
*) Přístupnější ze starších prací jsou: Stolz, Zur geometr. Bedeutung der complexen Elemente, Math. Annalen, sv. 4; Lüroth, Das imaginäre in der Geometrie und das Rechnen mit Würfeln, Math. Annalen, sv. 8.

kteřé k němu vedou jsou čistě logické a mají za účel zobecnění geometrických vět.

Přímky, které promítají body řady m z bodu O ležícího mimo přímku m , tvoří svazek přímkový (obr. 2). Říkáme, že



svazek O a řada m jsou perspektivní a přiřadíme při tom vždy bodu $A, B, C, \dots$ na m přímku $a, b, c, \dots$, která jím prochází (je s ním incidentní). Elementy $A, a; B, b; C, c; \dots$, které si v perspektivnosti odpovídají, jsou incidentní. Dvě řady m, n jsou perspektivní, jsou-li průseky téhož svazku O (obr. 2); pak sobě odpovídají body



na témž paprsku $A, A'; B, B'; C, C'; \dots$; O sluje středem perspektivnosti obou řad.

Dva svazky O, O' jsou perspektivní, promítají-li tutéž řadu bodovou — osu perspektivnosti (obr. 3.) Paprsky $a, a'; b, b'; c, c'; \dots$, které procházejí týmž bodem osy m , si odpovídají.

Buďte A, B dva pevné body na přímce m (obr. 4), C bod

pohyblivý; pak poměr $\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$ zoveme dělicí poměr bodu C k základním bodům A, B . Při tom vzdálenosti v jednom směru bereme za kladné, v protivném za záporné. Podle toho je dělicí poměr bodu C kladný, leží-li C mimo úsečku AB , záporný, leží-li uvnitř. Speciálně střed úsečky AB má dělicí poměr -1 , bod nevlastní $+1$.

Podobně ve svazku se středem O (obr. 4) buďte základní přímky a, b , pohyblivá c a jeden smysl otáčení považujeme za kladný, opačný za záporný. Dělicí poměr paprsku c k základ-

ním a, b jest $\frac{\sin \hat{ac}}{\sin \hat{bc}}$ a zřejmě se rovná poměru vzdáleností

v_a, v_b libovolného bodu P na c od a, b ($v_a = \overline{OP} \cdot \sin \hat{ac}$, $v_b = \overline{OP} \cdot \sin \hat{bc}$).

Dělicí poměry $\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$ a $\frac{\sin \hat{ac}}{\sin \hat{bc}}$, jsou-li řada $ABC \dots$ a svazek

$O(a, b, c, \dots)$ perspektivní, jsou v jednoduchém vztahu. Podle obr. 4 jest

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{\triangle AOC}{\triangle BOC} = \frac{\overline{AO} \cdot \overline{OC} \cdot \sin \hat{ac}}{\overline{BO} \cdot \overline{OC} \cdot \sin \hat{bc}} = \frac{\overline{AO}}{\overline{BO}} \cdot \frac{\sin \hat{ac}}{\sin \hat{bc}}.$$

Při stálém A, B a hybném C se liší oba dělicí poměry jen konstantním činitelem $\frac{\overline{AO}}{\overline{BO}}$.

Dvojpoměr čtyř bodů na přímce neb čtyř paprsků ve svazku jest poměr jejich dělicích poměrů k týmž dvěma základním elementům. Značíme jej symbolem

$$(ABCD) = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} : \frac{\overline{AD}}{\overline{BD}}, \quad (abcd) = \frac{\sin \hat{ac}}{\sin \hat{bc}} : \frac{\sin \hat{ad}}{\sin \hat{bd}}.$$

Jsou-li řada A, B, C, D a svazek a, b, c, d perspektivní,

plyne ihned z předešlého, že dvojpoměry $(ABCD)$ a $(abcd)$ jsou si rovny. Odtud plyne dále, že jsou-li dvě řady perspektivní (obr. 2), jest

$$(ABCD) = (A'B'C'D') = (abcd),$$

a podobně, jsou-li dva svazky perspektivní (obr. 3)

$$(abcd) = (a'b'c'd') = (ABCD).$$

Ve dvou perspektivních útvezech (řadách a paprscích) se rovná dvojpoměr čtyř elementů jednoho útvaru dvojpoměru odpovídajících elementů druhého útvaru.

V našich konstruktivních úvahách hraje důležitou úlohu dvojpoměr harmonický. Čtyři body na př. A, B, C, D tvoří harmonickou čtveřinu, jestliže se dělicí poměry $\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}, \frac{\overline{AD}}{\overline{BD}}$ liší jen znaménkem. Pak dvojpoměr $(ABCD) = -1$ sluje harmonický dvojpoměr. Podobně ve svazku;

liší-li se poměry $\frac{\sin \hat{ac}}{\sin \hat{bc}}, \frac{\sin \hat{ad}}{\sin \hat{bd}}$ jen znaménkem, říkáme, že

paprsky a, b, c, d tvoří harmonickou čtveřinu, a píšeme $(abcd) = -1$. Podle poslední věty promítáním centrálním a protínáním harmonická čtveřina přechází opět v harmonickou čtveřinu.

Příkladem harmonické čtveřiny jsou body A, B , půlicí bod S úsečky AB a bod nevlastní, anebo ramena úhlu a, b a obě přímky půlicí úhel ab a úhel vedlejší. V obr. 3 jsou voleny body A, B, C, D tak, že tvoří harmonickou čtveřinu.

(Metrické vlastnosti harmonické čtveřiny.) Z relace $\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = -\frac{\overline{AD}}{\overline{BD}}$ čili

$$\overline{AC} \cdot \overline{BD} + \overline{AD} \cdot \overline{BC} = 0 \quad (1)$$

vyplývá ihned $\overline{CA} \cdot \overline{DB} + \overline{CB} \cdot \overline{DA} = 0$, t. j. dvojiny bo-

dové $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ hrají zde tutéž roli. Správně tedy říkáme, že C, D oddělují harmonicky A, B a zároveň též A, B oddělují harmonicky C, D . Totéž platí o harmonické čtvrtině paprskové.

Zvolme v řadě bodové počátek souřadnic O ; body A, B, C, D mějte souřadnice x_1, x_2, x_3, x_4 . Pak hořejší relace (1) zní

$$(x_3 - x_1)(x_4 - x_2) + (x_4 - x_1)(x_3 - x_2) = 0,$$

neboli po úpravě

$$(x_3x_4 + x_1x_2) - \frac{1}{2}(x_1 + x_2)(x_3 + x_4) = 0; \quad (2)$$

tato relace je opět symetrická podle x_1x_2, x_3x_4 . Volme počátek O ve středu úsečky AB . Pak jest $x_2 = -x_1 = u$ a rovnice (2) má velmi jednoduchý tvar

$$x_3x_4 - u^2 = 0 \quad (3)$$

nebo, je-li S střed úsečky AB ,

$$\overline{SC} \cdot \overline{SD} = \overline{AS}^2 = \overline{BS}^2. \quad (4)$$

Bodový pár na přímce bývá dán rovnicí kvadratickou s reálnými koeficienty

$$ax^2 + 2bx + c = 0; \quad (5)$$

kořeny této rovnice jsou souřadnice bodů dvojiny; je známo ze střední školy,*) že tento pár je reálný při $b^2 - ac > 0$. Jsou-li kořeny rovnice (5) x_1, x_2 , jest, jak známo,

$$x_1 + x_2 = -\frac{2b}{a}, \quad x_1x_2 = \frac{c}{a}.$$

Buď dán druhý pár rovnic

$$a'x^2 + 2b'x + c' = 0; \quad (5')$$

pro kořeny x_3, x_4 jest

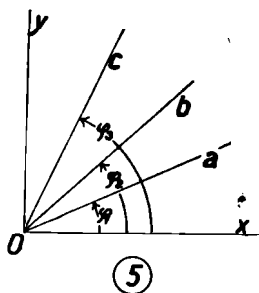
$$x_3 + x_4 = -\frac{2b'}{a'}, \quad x_3x_4 = \frac{c'}{a'}.$$

*) Viz na př. učebnice Bydžovský-Teplý-Vyčichlo, Aritmetika pro VI.—VII. tř. stř. škol, 6. vyd. JČMF, Praha, 1935.

Dosadíme-li do rovnice (2), dostaneme podmínku, aby páry dané rovnicemi (5), (5') tvořily harmonickou čtveřinu, ve tvaru

$$ac' + a'c - 2bb' = 0. \quad (6)$$

Tytéž vztahy platí také pro harmonickou čtveřinu paprskovou. Volme střed svazku za počátek pravoúhlé soustavy souřadnic. Pak rovnice paprsku jest $y = mx$, kde $m = \operatorname{tg} \varphi$ (obr. 5); m je parametr, který určuje polohu paprsku ve svazku. Paprskům a, b, c, d ať patří parametry m_1, m_2, m_3, m_4 . Pak



$$\begin{aligned} \frac{m_3 - m_1}{m_3 - m_2} &= \frac{\operatorname{tg} \varphi_3 - \operatorname{tg} \varphi_1}{\operatorname{tg} \varphi_3 - \operatorname{tg} \varphi_2} = \frac{\sin (\varphi_3 - \varphi_1) \cdot \cos \varphi_3 \cdot \cos \varphi_2}{\cos \varphi_1 \cdot \cos \varphi_3 \cdot \sin (\varphi_3 - \varphi_2)} = \\ &= \frac{\cos \varphi_2}{\cos \varphi_1} \cdot \frac{\sin \widehat{ac}}{\sin \widehat{bc}}, \end{aligned}$$

a podobně

$$\frac{m_4 - m_1}{m_4 - m_2} = \frac{\cos \varphi_2}{\cos \varphi_1} \cdot \frac{\sin \widehat{ad}}{\sin \widehat{bd}}.$$

Jest tedy $(m_1 m_2 m_3 m_4) = (abcd)$.

Pro harmonickou čtveřinu platí opět vztah (2)

$$(m_3 m_4 + m_1 m_2) - \frac{1}{2} (m_1 + m_2) (m_3 + m_4) = 0.$$

Volíme-li za osu x přímkou půlící úhel ab , jest $m_1 = -m_2 = u$ a relace nabude tvaru

$$m_3 m_4 - u^2 = 0 \text{ neboli } \operatorname{tg} \widehat{xc} \cdot \operatorname{tg} \widehat{xd} = \operatorname{tg}^2 \widehat{xa} = \operatorname{tg}^2 \widehat{xb}.$$

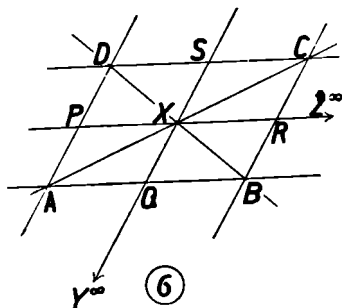
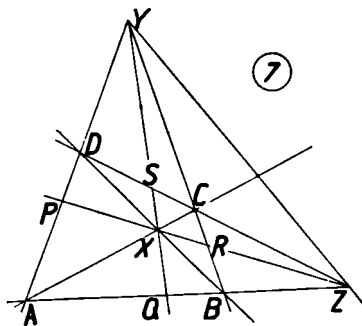
Jsou-li dvě dvojiny paprskové dány rovnicemi

$$Am^2 + 2Bm + C = 0, \quad A'm^2 + 2B'm + C' = 0,$$

je podmínka harmoničnosti

$$AC' + A'C - 2BB' = 0. \quad (7)$$

Poznámky a cvičení. 1. Dány jsou body A, B na přímce p ; k bodu C sestrojte čtvrtý harmonický D . (Návod: Body A, B sestrojte dvě rovnoběžky a bodem C přičku, která je seče v bodech $1, 2$. Pak přeneste od B na druhou stranu $B2' = 2B$; spojnice $12'$ prochází bodem D .)



2. Ve svazku s vrcholem O jsou dány paprsky a, b, c ; sestrojte čtvrtý harmonický d . (Návod: Vede přímku $p \parallel c$, která seče a, b v bodech A, B ; půlicím bodem D úsečky AB jde paprsek d .)

3. V rovnoběžníku $ABCD$ se středními příčkami PQ, RS , (obr. 6) jsou harmonické čtveřiny, na př. $(ABQZ^\infty)$, $(BCRY^\infty)$ atd. nebo svazky $X(ABQZ^\infty)$, $Y^\infty(ABQZ^\infty)$ atd. Centrálním promítáním přejde rovnoběžník v různoběžník, přímka nevlastní přejde v přímku v konečnu YZ a všechny harmonické dvojpoměry zůstanou zachovány. (Obráceně každý různoběžník lze pokládati za středový průmět rovnoběžníka, neboť v deskript. geometrii se ukazuje, že jehlan, jehož podstava je různoběžník, lze protnouti v rovnoběžníku.) Máme tedy

harmonické vlastnosti úplného čtyřrohu $ABCD$ (obr. 7). Tak se nazývá konfigurace určená čtyřmi body v rovině. Celkem je šest stran: AB a protější CD , AC s protější BD , AD s protější BC . Průsečíky jejich X, Y, Z tvoří diagonální trojúhelník a jeho strany slují diagonály (úhlopříčky). Na každé straně a na každé diagonále je harmonická čtveřina bodová, na př. $(ABQZ)$, $(CDSZ)$, $(QSXY)$ atd. V diagonálním rohu se sbíhají vždy čtyři přímky, dvě strany a dvě diagonály, které tvoří také harmonickou čtveřinu, na př. $X(A, B, Q, Z)$ atd.

4. Čtyři přímky a, b, c, d v rovině, z nichž žádné tři nejdou týmž bodem, tvoří úplný čtyřstran. Má šest vrcholů; protější vrcholy služí dvojice $(ab), (cd)$; $(ac), (bd)$; $(ad), (bc)$. Jejich spojnice tvoří diagonální trojstran. Vytkněte opět všechny harmonické čtveřiny, které zde povstávají. (Plyne opět z centrálního promítání.)

5. Předchozích úvah lze užítí, abychom provedli úlohy 1, 2 pouze pravítkem (bez rovnoběžek a přenášení délek). Máme-li k bodům A, B, Q na přímce sestrojiti čtvrtý harmonický Z , vezměme bodem A dvě přímky (obr. 7) a protněme je přímkou bodem Q jdoucí v bodech X, Y . Spojme tyto body s bodem B a dostaneme D, C ; jejich spojnice jde bodem Z . Sestrojte podobně ke třem paprskům čtvrtý harmonický jen pravítkem!

6. Dokažte: Jsou-li na dvou různoběžkách harmonické čtveřiny $ABQZ, CDSZ$ o společném bodě Z (obr. 7), pak jsou perspektivní dvojím způsobem podle středů X, Y .

Jsou-li dva svazky harmonické o společném paprsku, na př. $Y (ABQZ), Z (ADPY)$, jsou perspektivní rovněž dvojím způsobem (jedna osa perspektivnosti jest AC , druhá BD)!

2. Imaginární body na reálné přímce.

Vytkněme na přímce bod O jako počátek souřadnicové soustavy a určujeme bod P vzdáleností od počátku O . Reálné vzdálenosti $\overline{OP} = x$ patří reálný bod, je-li vzdálenost dána číslem komplexním $x_1 + ix_2$, ($x_2 \geq 0$), přisuzujeme jí bod imaginární. Vzdálenosti $x_1 - ix_2$ patří bod imaginární sdružený k prvnímu. Souřadnice obou bodů jsou kořeny kvadratické rovnice

$$[x - (x_1 + ix_2)] \cdot [x - (x_1 - ix_2)] = 0,$$

neboli

$$x^2 - 2x_1x + (x_1^2 + x_2^2) = 0, \quad (1)$$

jež má reálné koeficienty.

Obráceně kvadratická rovnice s reálnými koeficienty

$$ax^2 + 2bx + c = 0 \quad (2)$$

definuje bodový pár o souřadnicích

$$x_{12} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a},$$

reálný při $b^2 - ac > 0$ a imaginární při $b^2 - ac < 0$. V případě $b^2 - ac = 0$ splynou obě hodnoty, levá strana rovnice (2) je úplná druhá mocnina a říkáme, že rovnice má dvojnásobný kořen.

Lze však naléztí širší geometrický význam rovnice (2), jenž platí v případě reálných i imaginárních kořenů a dovolu je v obou případech operovati jen s reálnými elementy.

V algebře sluje trojčlen $ax^2 + 2bx + c$ kvadratická forma.*) K ní patří polární forma $ax'x'' + b(x' + x'') + c$, kde $x'x''$ jsou proměnné. Položíme-li tuto formu rovnou nule, dostaneme rovnici

$$ax'x'' + b(x' + x'') + c = 0 \quad (3)$$

lineární v x' i v x'' , tedy bilineární. Povšimněme si jejího geometrického významu. Definuje na přímce příbuznost či korespondenci. Volíme-li bod o souřadnici x' , dostaneme k němu jednoznačně přiřazený bod x'' a naopak podle rovnice

$$x'' = -\frac{bx' + c}{ax' + b}, \quad x' = -\frac{bx'' + c}{ax'' + b}, \quad (b^2 - ac \geq 0).$$

Proběhne-li x' hodnoty od $-\infty$ do $+\infty$, proběhne i x'' všechny hodnoty. Takovou příbuznost definuje i obecnější bilineární rovnice

$$ax'x'' + bx' + cx'' + d = 0;$$

tato příbuznost sluje projektivnost. Rovnice (3) je rovnicí speciální projektivnosti, neboť je symetrická podle x', x'' ; tato speciální projektivnost sluje involuční nebo involuce; involuce je tedy souhrn párů bodových definovaných rovnicí (3).

Involuce má dva elementy samodružné neboli dvojné, které odpovídají samy sobě. Za předpokladu, že v rovnici (3) jsou vzdálenosti x', x'' měřeny stejným způsobem od téhož počátku, položme $x' = x'' = x$ a dostaneme rovnici, která

*) Obvykle se píší tyto formy ve tvaru homogenním $ax^2 + 2bxt + ct^2$; tvar nehomogenní dostaneme, položíme-li $t = 1$.

určuje elementy samodružné a je identická s rovnicí (2). Tyto elementy jsou reálné různé při $b^2 - ac > 0$; příslušnou involuci jmenujeme hyperbolickou; imaginární sdružené při $b^2 - ac < 0$, pak zoveme involuci eliptickou. Všimněme si případu $b^2 - ac = 0$. Pak lze rovnici (3) psáti

$$a^2 x' x'' + ab(x' + x'') + b^2 = 0$$

$$(ax' + b)(ax'' + b) = 0.$$

čili

Zvolíme-li x' (nebo x'') jakkoli, patří mu vždy též bod $x'' = -b : a$ (nebo $x' = -b : a$); tato involuce sluje parabolická (degenerovaná).

Všimněme si některých vlastností involuce hyperbolické a eliptické. Předpokládáme, že na přímce je jeden bod nevlastní neboli nekonečně vzdálený, který odpovídá hodnotám x' , x'' velmi velikým a tvoří pár involuce s bodem v konečnu ležícím, ježž zoveme středem involuce. Dělme rovnici (3) proměnnou x'' a dostaneme

$$ax' + b \left(\frac{x'}{x''} + 1 \right) + \frac{c}{x''} = 0.$$

Necháme-li zvětšovati $x'' \rightarrow \infty$, vymizí členy $\frac{bx'}{x''}$ a $\frac{c}{x''}$ a dostaneme

$$ax' + b = 0 \quad \text{nebo} \quad x' = -b : a.$$

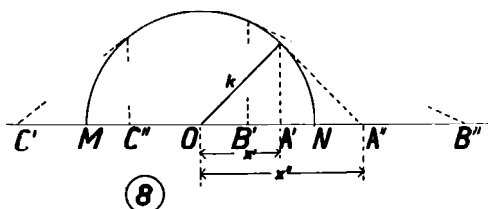
Za předpokladu $a \geq 0$ jest tedy souřadnice středu involuce $-b : a$ a střed je v konečnu. Volme jej za počátek souřadnic O . Pak v nové rovnici (3), která definuje involuci, musí býti $b = 0$ a involuce je dána jednodušší rovnicí

$$ax' x'' + c = 0, \quad \text{čili} \quad x' x'' = -\frac{c}{a}. \quad (4)$$

Poslední rovnice vyjadřuje důležitou metrickou vlastnost involuce:

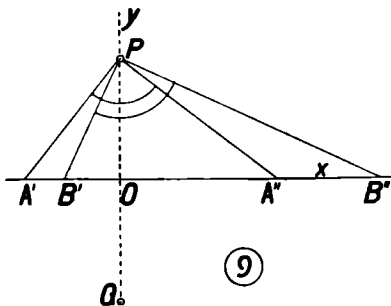
Součin vzdáleností odpovídajících si bodů involuce od středu involuce je konstantní (sluje mocnost involuce).

Je možno vždy předpokládati, že v rovnici (4) a je kladné, tedy pro involuci hyperbolicou $c < 0$, pro eliptickou $c > 0$. Jest tedy pro involuci hyperbolicou $x'x'' = k^2$, pro eliptickou $x'x'' = -k^2$. (Srovnej rovnice (3), (4), str. 13.)



V prvním případě jsou odpovídající si body A', A'' na téže straně středu O (obr. 8) a opíšeme-li kolem O kružnici polo-
měrem $k = \sqrt{\overline{OA'} \cdot \overline{OA''}}$, seče tato přímku ve dvojných
bodech M, N . Dělicí poměr bodu A' k M, N jest $\frac{\overline{MA'}}{\overline{NA'}} =$
 $= \frac{x' + k}{x' - k}$, dělicí poměr bodu A'' ($x'' = \frac{k^2}{x'}$) jest $\frac{x'' + k}{x'' - k} =$
 $= -\frac{x' + k}{x' - k}$, liší se tedy oba jen znaménkem. Body A', A''
oddělují tedy harmonicky dvojné body M, N .

V druhém případě (obr. 9), kdy involuce je eliptická, jsou
odpovídající si body A', A'' na různých stranách
středu O , a opíšeme-li
nad $A'A''$ kružnici, pro-
chází tato pevnými body
 P, Q , kde $\overline{OP} = \overline{OQ} =$
 $= k = \sqrt{|\overline{OA'}| \cdot |\overline{OA''}|}$,
nebo jinak, každá dvo-
jina involuce se z bo-
dů P, Q promítne pra-



vým úhlem. Dvojně body involuce jsou imaginární ve vzdálenosti $x = \pm ki$. Definici dělicího poměru a dvoj-
poměru přijatou pro reálné elementy bereme za plat-
nou i pro imaginární. Poznáme, že i zde platí $\frac{x' + ki}{x' - ki} =$
 $= -\frac{x'' + ki}{x'' - ki}$, čili imaginární dvojně body a libovolný pár
involuce tvoří harmonickou čtveřinu. Možno tedy říci:

Involuce bodová na přímce je souhrn párů bo-
dových, které harmonicky oddělují dva reálné
nebo imaginární body.

Z dalších vlastností involuce uveďme:

a) Involuce je určena dvěma páry bodů M', M'' ;
 N', N'' .

Označme jejich souřadnice $m', m''; n', n''$ a dosadíme do
rovnice (3). Dostaneme tak dvě rovnice pro neznámé a, b, c :

$$\begin{aligned} am'm'' + b(m' + m'') + c &= 0, \\ an'n'' + b(n' + n'') + c &= 0. \end{aligned}$$

Vyloučením veličin a, b, c z těchto dvou a z rovnice (3)
vychází (nejlépe ve tvaru determinantu) rovnice hledané
involuce

$$\begin{vmatrix} x'x'' & x' + x'' & 1 \\ m'm'' & m' + m'' & 1 \\ n'n'' & n' + n'' & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Rozvedením najdeme

$$\begin{aligned} a : b : c &= [(m' + m'') - (n' + n'')] : \\ &: [m'm'' - n'n''] : [m'm''(n' + n'') - n'n''(m' + m'')]. \end{aligned}$$

a, b nemohou být současně rovny nule, neboť kdyby bylo
 $m' + m'' = n' + n''$, $m'm'' = n'n''$, byly by dané dva páry
bodů identické.

b) Dvě involuce na přímce mají společný jeden
pár bodový čili jinak: Jsou-li na přímce dány dva páry

bodové reálné nebo imaginární, lze vždy sestrojiti pár, který je oba odděluje harmonicky.

Skutečně buďte dvě involuce na přímce dány rovnicemi

$$\begin{aligned} ax'x'' + b(x' + x'') + c &= 0, \\ a_1x'x'' + b_1(x' + x'') + c_1 &= 0. \end{aligned}$$

Z nich vychází

$$x'x'' = \frac{bc_1 - cb_1}{ab_1 - ba_1}, \quad x' + x'' = \frac{ca_1 - ac_1}{ab_1 - ba_1}$$

a tedy souřadnice x' , x'' společného páru jsou kořeny kvadratické rovnice

$$(ab_1 - ba_1)x^2 - (ca_1 - c_1a)x + bc_1 - b_1c = 0;$$

společný pár je reálný nebo imaginární.

Vraťme se opět k původnímu úkolu, jak nalézt konstrukce vhodné pro operace s imaginárními body. Je-li dán na přímce imaginární bod $x_1 + ix_2$, můžeme určit jeho sdružený $x_1 - ix_2$; oba jsou kořeny rovnice (1) s reálnými koeficienty. S takovou kvadratickou rovnicí obecného tvaru (2) souvisí však rovnice (3) definující involuci (v tomto případě eliptickou). A skutečně tato eliptická involuce jest velmi vhodný representant dvojiny imaginárních sdružených bodů (jako svých bodů samodružených). Lze však i rozlišiti jeden od druhého, jak ukázal *Staudt*, použijeme-li orientace involuce. Sledujme na obr. 8 nejprve na hyperbolické involuci směr pohybu. Pohybuje-li se A' na přímce v jistém smyslu, pohybuje se A'' ve smyslu opačném a dvakrát splývají oba body ve dvojných bodech. Dvojice přidružených bodů se nikdy neoddělují, leží mimo sebe, nebo jedna uvnitř druhé, na př. $A'A''$, $B'B''$, $C'C''$. (Při tom předpokládáme, že přímka má jeden bod nevlastní čili nekonečně vzdálený a jest tedy jako uzavřená.) V případě hyperbolické involuce nelze tedy mluvit o smyslu involuce. — Jinak je tomu v případě involuce eliptické (obr. 9). Pohybuje-li se A' v některém smyslu, pohybuje se A'' v témže smyslu (pravý úhel $A'PA''$

se otáčí kolem vrcholu P) a nikdy nesplynou. Dva páry eliptické involuce se vždy oddělují, viz $A'A'', B'B'', OP^\infty$. Jeden smysl pohybu je dán sledem $A'B'A''$, nebo což je totéž $B'A''A'$ (přes P^∞), nebo $B'A''B''$ atd., druhý sledem $A''B'A'$ nebo $B''A''B'$ atd. Můžeme tedy jeden z imaginárních bodů daných uvažovanou involucí přiřaditi jednomu smyslu, druhý opačnému smyslu.

Imaginární bod na přímce je určen eliptickou involucí s připojeným smyslem.

Výhodné jest označení, které zavedl Vahlen.*) Je-li involuce dána páry $A'A'', B'B''$, označujeme její imaginární dvojné body

$$X = \left(\frac{A'B'}{A''B''} \right), \quad Y = \left(\frac{B'A'}{B''A''} \right);$$

první je spojen se smyslem $A'B'A''$, druhý se smyslem $B'A''B'$. V dalším budeme používatí tohoto označení.

Poznámky a cvičení. 1. Určete střed a dvojné elementy involuce $b(x' + x'') + c = 0$ (symetrická involuce) a involuce $ax'x'' + b(x' + x'') = 0$.

2. Stanovte střed, dvojné elementy a rovnici involuce dané a) páry bodovými $(x'_1 = 4; x''_1 = 8)$, $(x'_2 = 3; x''_2 = -1)$; b) $(3 + 2i; 3 - 2i)$, $(4; 8)$; c) dvojným bodem (O) a párem $(1; -2)$; d) dvojnými body $\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}$; e) dvojnými body $1 + i; 1 - i$.

3. Najděte společný pár involucí: $2x'x'' - 5(x' + x'') + 8 = 0$, $2x'x'' - 15(x' + x'') + 108 = 0$.

4. Jsou dány dva páry bodové rovnicemi $a_1x^2 + 2b_1x + c_1 = 0$, $a_2x^2 + 2b_2x + c_2 = 0$; najděte rovnici páru, který oba harmonicky odděluje! (Viz podmínku (6), str. 14.)

5. Dokažte: Jsou-li dány dva páry involuce týmiž rovnicemi jako v předešlém odstavci, jsou ostatní páry dány rovnicí $(a_1x^2 + 2b_1x + c_1) + \lambda(a_2x^2 + 2b_2x + c_2) = 0$ při libovolném λ . (Užijte výsledku předešlé úlohy.)

6. Involuce má samodružné body: a) $2 \pm i$, b) $-2 \pm 3i$; určete tyto body v involuci způsobem Vahlenovým.

7. Svazek kružnic o základních bodech M, N seče přímkou, jež nejde žádným z nich, v involuci; chordála dává střed invo-

*) Th. Vahlen, Konstruktionen und Approximationen, str. 114.

luce S , součin $\overline{SM} \cdot \overline{SN}$, který se rovná mocnosti bodu S ke kružnicím svazku, je mocnost involuce. Jak toho ponžít, abychom sestrojili střed a dvojné body involuce dané páry bodovými $A'A''$, $B'B''$?

(Návod: Body $A'A''$, resp. $B'B''$ vedte kružnice, aby se protínaly v reálných bodech M, N . Chordála MN vytíná na přímce střed involuce, dotykové body kružnic, jež jdou body M, N a dané přímky se dotýkají, jsou dvojné body involuce.)

8. Obecně svazek kuželoseček, t. j. množství všech kuželoseček, které jdou čtyřmi body 1, 2, 3, 4, seče přímkou, jež nejde žádným z nich, v involuci. (Věta Desarguesova o svazku kuželoseček.) Volme tuto přímku za osu x ; pak dvě kuželosečky svazku jsou dány obecnými rovnicemi tvaru

$$A \equiv a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0,$$

$$B \equiv b_{11}x^2 + 2b_{12}xy + b_{22}y^2 + 2b_{13}x + 2b_{23}y + b_{33} = 0,$$

a svazek je dán rovnicí

$$A + \lambda B = 0$$

při proměnném λ . Dosadíme-li $y = 0$, dostaneme pro průsečíky osy x s kuželosečkami svazku

$$a_{11}x^2 + 2a_{13}x + a_{33} + \lambda(b_{11}x^2 + 2b_{13}x + b_{33}) = 0$$

jako v úloze 5. Mezi kuželosečkami svazku jsou tři složené (degenerované) z dvojín přímek: 12, 34; 13, 24; 14, 23. Máme tedy větu: Dvojiny protějších stran úplného čtyřrohu protínají přímku ve třech párech involuce.

3. Imaginární přímka ve svazku.

V reálné rovině buď dán svazek přímek o středu O . Volme dvě navzájem kolmé přímky s určitou orientací za osy x, y pravouhlé soustavy souřadnic (obr. 5) a určíme přímku svazku tangentou úhlu, který svírá s kladnou osou x . Jest tedy rovnice obecné přímky ve svazku

$$y = mx; \quad (1)$$

$m = \operatorname{tg} \omega$ je parametr, který určuje přímku. Reálnému parametru patří reálná přímka, komplexnímu parametru přímka imaginární, jež mimo O nemá reálného bodu. Přímky $y = (m_1 \pm im_2)x$ slují imaginární sdružené.

Kvadratická rovnice s reálnými koeficienty

$$Am^2 + 2Bm + C = 0 \quad (2)$$

definuje pár přímek; ty jsou reálné při $B^2 - AC > 0$ a imaginární sdružené při $B^2 - AC < 0$.

Utvořme polární formu a položme ji rovnu nule. Dostaneme rovnici

$$Am'm'' + B(m' + m'') + C = 0, \quad (3)$$

která definuje paprskovou involuci o středu O . Má dva samodružné čili dvojné elementy ($m' = m'' = m$), které jsou dány rovnicí (2) a jsou reálné různé nebo imaginární. V prvním případě sluje involuce hyperbolická, v druhém eliptická. Je-li $B^2 - AC = 0$ mluvíme o involuci paraboličké.

Všimněme si opět některých vlastností této involuce.

Involuce ve svazku obsahuje vždy jeden pár kolmých přímek. Pro takový pár jest $m'm'' = -1$; z rovnice (3) vychází pak $m' + m'' = \frac{A-C}{B}$. Podle toho m', m'' jsou kořeny rovnice

$$m^2 - \frac{A-C}{B}m - 1 = 0; \quad (4)$$

její diskriminant $\left(\frac{A-C}{B}\right)^2 + 4$ je vždy kladný (pro reálné A, B, C), tedy kolmý pár je vždy reálný. Ve zvláštním případě $B = 0, A = C$ zní rovnice (3)

$$m'm'' + 1 = 0 \quad (5)$$

a pak každý pár involuce je dvojina kolmých přímek.

Volíme-li onen kolmý pár v obecném případě za osy x, y , musí rovnice (4) míti kořeny $0, \infty$, t. j. $B = 0$. Pak rovnice (3) se zjednoduší na

$$Am'm'' + C = 0 \quad \text{čili} \quad m'm'' = k.$$

Pro dvojné elementy dostaneme $m' = m'' = \pm\sqrt{k}$. Poznáváme: Pravoúhlý pár pólů úhel samodružných paprsků.

Dělicí poměr paprsku p ($m = \operatorname{tg} \omega$) ke dvojným ($m_{12} = \pm \operatorname{tg} \alpha = \pm \sqrt{k}$) je dán výrazem $\frac{m - m_1}{m - m_2} = \frac{\operatorname{tg} \omega - \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \omega + \operatorname{tg} \alpha} = \frac{\sin(\omega - \alpha)}{\sin(\omega + \alpha)}$ (viz odst. 1). Jsou-li tedy p', p'' paprsky v involuci si odpovídající, jest $m'm'' = k$ a dělicí poměr prvního $\frac{m' - \sqrt{k}}{m' + \sqrt{k}}$, druhého $\frac{m'' - \sqrt{k}}{m'' + \sqrt{k}} = \frac{\sqrt{k} - m'}{\sqrt{k} + m'}$ (liší se tedy od prvního jen znaménkem). Pár p', p'' odděluje harmonicky dvojné elementy.

Involuce ve svazku je souhrn dvojic přímkových, které oddělují harmonicky dvě reálné nebo dvě imaginární přímky. V prvním případě mluvíme o involuci hyperbolické, v druhém eliptické.

Opět platí věty:

a) Involuce ve svazku je určena dvěma páry přímek.

b) Dvě involuce o témž vrcholu mají společný pár.

Sledujme otáčení dvou odpovídajících si přímek p', p'' v involuci. V involuci hyperbolické, otáčí-li se p' v jistém smyslu, na př. kladném, t. j. v témž jako ručičky na hodinách, otáčí se p'' ve smyslu opačném a dvakrát se setkají přidružené přímky v elementech samodružných. V involuci eliptické však, otáčí-li se p' v jistém smyslu, otáčí se p'' v témž smyslu, a možno tedy eliptické involuci ve svazku přiřknouti jeden neb druhý smysl otáčení. Teď vidíme, že podobně jako na přímce lze určití imaginární přímku ve svazku eliptickou involuci a určitým smyslem otáčení. Je-li involuce dána páry $a'a'', b'b''$ (jež se oddělují) jsou dány dva imaginární paprsky svazku, jež opět výhodně označíme

$$x = \begin{pmatrix} a' & b' \\ a'' & b'' \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} b' & a' \\ b'' & a'' \end{pmatrix};$$

s prvním je spojen smysl otáčení daný třemi elementy $a'b'a''$ neb $b'a''b''$ atd., s druhým smysl $b'a'b''$, nebo $a''b'a'$ atd.

(Perspektivní involuce.) Protněme involuční svazek přímkou, jež nejde jeho středem. Svazek vytíná na přímce perspektivní involuci. Dvojně elementy ve svazku a v řadě bodové jsou incidentní, ať jsou reálné nebo imaginární. Vezmeme-li involuční svazek daný rovnicí (3), lze předpokládati, že přímka má rovnici $x = k$, neboť vždy lze voliti osu x v kolmici z bodu O k této přímce a svazek je pak dán obecnou rovnicí tvaru (3). Pak obecná přímka ve svazku (1) dává bod o souřadnici $y = mk$. Dosadíme-li do rovnice (3) hodnoty $m' = \frac{y'}{k}$, $m'' = \frac{y''}{k}$, dostaneme rovnici involuce na přímce $x = k$ ve tvaru

$$A \frac{y'y''}{k^2} + B \frac{y' + y''}{k} + C = 0;$$

její dvojně elementy jsou dány rovnicí

$$A \frac{y^2}{k^2} + \frac{2By}{k} + C = 0,$$

jež vychází z rovnice (2) dosazením $m = \frac{y}{k}$.

Obráceně involuce na přímce se promítá z bodu mimo ni perspektivní involucí paprskovou.

Poznámky a cvičení. 1. Involuce ve svazku buďte dány rovnicemi: a) $Am'm'' + C = 0$, b) $B(m' + m'') + C = 0$, c) $Am'm'' + B(m' + m'') = 0$. Určete kolmý pár a dvojně elementy.

2. Involuce $m' + m'' = 0$ sluje symetrická. Její dvojně elementy jsou k sobě kolmé. Dokažte!

3. Involuce $m'm'' + 1 = 0$ sluje pravoúhlá, dvojně přímky ($m = \pm i$) slují isotropické; podle toho dvě kolmé přímky se středem O a obě isotropické přímky bodem O ($y = \pm ix$) tvoří harmonickou čtveřinu. Dokažte!

4. Obecně úhel dvou přímek je v jednoduchém vztahu k dvojpoměru, který tvoří ramena úhlu a obě isotropické přímky jeho vrcholem. Tento dvojpoměr, vezmeme-li za ramena úhlu $y = 0$ a $y = x \operatorname{tg} \varphi$, je

$$x = r \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \quad y = \frac{2rt}{1 + t^2}. \quad (1)$$

Proběhne-li t reálná čísla od $-\infty$ do $+\infty$, proběhne bod x, y celou kružnicí; na příklad hodnotě $t = 0$ patří bod $A(r; 0)$, hodnotě $t = 1$ bod $B(0; r)$, hodnotě $t = \infty$ bod $C(-r; 0)$ atd. Říkáme často bod (t_i) na kružnici a rozumíme bod o souřadnicích x, y , které dostaneme ze vzorců (1), dosadíme-li do nich $t = t_i$. Buď t souřadnice bodu na přímce; přiřaďme si nyní ty body na přímce a na kružnici, kterým patří totéž t ; body na kružnici jsou tímto způsobem přiřazeny bodům na přímce (řadě číselné) a obráceně.

Hledejme průsečíky kružnice s přímkou v obecné poloze

$$ux + vy + 1 = 0;$$

dosadíme-li sem hodnoty (1), dostaneme pro parametry průsečíků rovnici

$$t^2(1 - ur) + 2vrt + 1 + ur = 0. \quad (2)$$

Dosadíme-li kořeny t_1, t_2 této rovnice do (1), dostaneme souřadnice průsečíků. Z rovnice (2) vychází

$$t_1 + t_2 = -\frac{2rv}{1 - ur}, \quad t_1 t_2 = \frac{1 + ur}{1 - ur}. \quad (3)$$

Obráceně, je-li dáno t_1, t_2 , vychází z rovnic (3)

$$u = \frac{t_1 t_2 - 1}{r(1 + t_1 t_2)}, \quad v = -\frac{t_1 + t_2}{r(1 + t_1 t_2)}, \quad (4)$$

a rovnice sečny, která spojuje body $(t_1), (t_2)$ zní

$$(t_1 t_2 - 1)x - (t_1 + t_2)y + r(1 + t_1 t_2) = 0. \quad (5)$$

Rovnice tečny v bodě t vychází odtud při $t_1 = t_2 = t$ ve tvaru

$$(t^2 - 1)x - 2ty + r(1 + t^2) = 0. \quad (6)$$

Rovnice (5) je bilineární v t_1, t_2 a symetrická v t_1, t_2 ; předpokládáme-li v ní x, y pevné, definuje tedy involuci na

kružnici. Obráceně mějme na kružnici involuci danou rovnicí

$$at_1t_2 + b(t_1 + t_2) + c = 0. \quad (7)$$

Přirovnáme-li (7) a (5), poznáme, že spojnice přidružených bodů t_1, t_2 jde pevným bodem $J(x_0; y_0)$; skutečně

$$a : b : c = (r + x_0) : -y_0 : (r - x_0),$$

odkud

$$x_0 = \frac{r(a - c)}{a + c}, \quad y_0 = -\frac{2br}{a + c}. \quad (8)$$

Tento bod sluje středem involuce, jeho polára ke kružnici sluje osa involuce. Její rovnice jest

$$xx_0 + yy_0 = r^2$$

a po úpravě

$$(a - c)x - 2by - r(a + c) = 0. \quad (9)$$

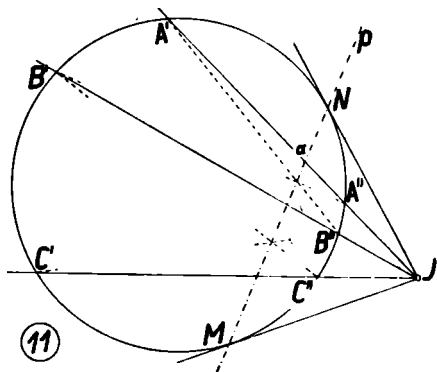
Páry involuce na kružnici jsou vyřaty sečnami, které procházejí pevným bodem J (středem involuce). Je-li J vně kružnice, jsou dvojné body reálné, involuce je hyperbolická; je-li J uvnitř, jsou dvojné body imaginární, involuce je eliptická.

V obr. 11 jest J střed involuce, $A'A'', B'B'', C'C''$ jsou její páry. Dvojné body jsou dotykové body M, N tečen vedených z bodu J a leží tedy na poláře p dané rovnicí (9). Skutečně, hledáme-li průsečky přímký (9) s kružnicí dosazením hodnot (1), přijdeme k rovnici $at^2 + 2bt + c = 0$, jež definuje dvojné body involuce (7).

Řada $APB\dots$ (obr. 10) na kružnici se promítá z bodů kružnice paprskovými svazky, jež jsou vzájemně shodné; jsou-li S, S' dva různé body na kružnici, jest na př. $\sphericalangle ASP = \sphericalangle AS'P$, $\sphericalangle PSB = \sphericalangle PS'B\dots$, mimo to jest $\sphericalangle ASP = \sphericalangle AOP = \frac{1}{2}\varphi$. Promítáme-li na př. řadu na kružnici z bodu $C(-r; 0)$, jest rovnice přímký $CP: y = t(x + r)$, kde $t = \operatorname{tg} \frac{1}{2}\varphi$. Z toho důvodu se promítá involuce daná rovnicí (7) z bodu paprskovou involucí, která má tutěž rovnici;

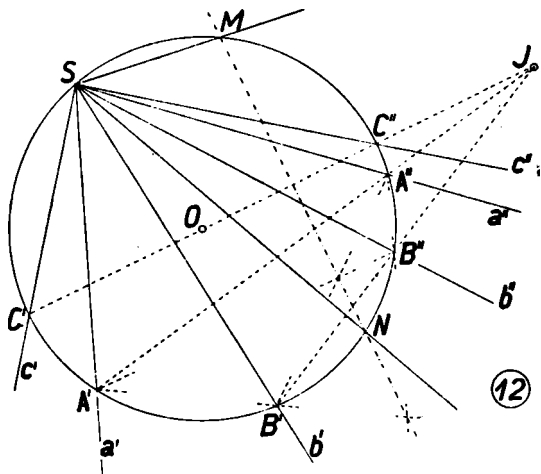
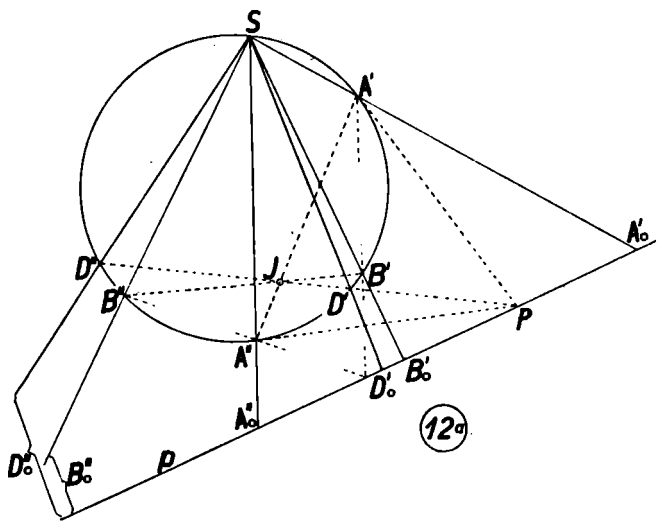
(t_1, t_2 jsou při tom směrnice odpovídajících si paprsků). Dvojné paprsky procházejí dvojnými body na kružnici.

Říkáme proto, mluvíme-li o bodech na kružnici, že na př. A', A'' jsou harmonicky odděleny body M, N (obr. 11), neboť promítneme-li z libovolného bodu S na kružnici, dostaneme harmonickou čtveřinu paprsků $S(M, N, A', A'')$.



Blíží-li se bod S bodu M , přejde tento svazek v $M(J, N, A', A'')$, jenž promítá harmonickou řadu (J, α, A', A'') . Vidíme také, že páry involuce $A'A'', B'B'', \dots$ se z bodu S na kružnici promítnou na poláru p jako body polárně sdružené ke kružnici, neboť oddělují harmonicky dvojné body M, N , jeden je tedy na poláře druhého. (Doporučujeme čtenáři, aby si narýsoval příslušný obrázek, je-li střed involuce J uvnitř kružnice.)

Různé konstrukce týkající se involuce se převádějí s výhodou na kružnici. Některé z nich lze také provést pouhým pravítkem (lineární úlohy), nicméně při praktickém provádění používáme raději pravítka i kružítko (nebo narýsované kružnice). (Ostatně právem považujeme kružítko za přístroj dokonalejší než pravítko.)



Ukážeme si, jak se provádějí některé konstrukce užitím narysované kružnice (Steinerovy konstrukce).

a) Paprsková involuce je dána páry $a'a''$, $b'b''$. Máme sestrojiti pravoúhlý pár a dvojné paprsky. Opišme kružnici k , která jde středem svazku S (obr. 12); na ní dostaneme páry $A'A''$, $B'B''$. Přímky $A'A''$, $B'B''$ se protínají ve středu J involuce. Jeho polára (osa involuce) spojuje průsečíky $(A'B', A''B'')$, $(A'B'', A'B')$ a seče kružnici v bodech M , N . SM , SN jsou hledané dvojné paprsky. Spojíme J se středem kružnice O ; na kružnici dostaneme pár $C'C''$. SC' , SC'' je pravoúhlý pár paprskové involuce. V obr. 12a leží J uvnitř kružnice, involuce je eliptická. Průsečíky poláry p s kružnicí jsou dány jako dvojné elementy involuce $A'_0A''_0$, $B'_0B''_0$ a hledané dvojné paprsky jsou imaginární spojnice bodu S s nimi.

b) Je dána involuce v řadě bodové na přímce p páry $A'A''$, $B'B''$; mají se sestrojiti dvojné elementy, střed involuce a k danému bodu C' přiřazený C'' . Volme v rovině kružnici k , na ní bod S a promítneme řadu na kružnici do $A'_0A''_0$, $B'_0B''_0$. Další konstrukce jako v předchozím. (Jednoduchý obrázek nechť si čtenář laskavě pořídí sám.)

c) Sestrojiti společný pár dvou bodových involucí na přímce p .*) První involuce je dána páry $A'A''$, $B'B''$, druhá páry $P'P''$, $Q'Q''$. Promítneme obě involuce opět na kružnici z jejího bodu S a sestrojme středy obou involucí I a J . Jejich spojnice protne kružnici v bodech X' , X'' , což je společný pár obou involucí na kružnici, jemuž odpovídá i společný pár na přímce p . Je-li aspoň jeden z obou středů uvnitř kružnice, jest pár $X'X''$ reálný. Tedy:

Dvě eliptické involuce soumísné mají vždy jeden společný reálný pár, rovněž tak involuce eliptická a hyperbolická.

Dvě hyperbolické involuce mohou mít společný pár reálný neb imaginární.

Pro konstrukce s imaginárními elementy je důležitá věta: Eliptickou involuci v řadě bodové neb v paprskovém svazku lze vždy určití dvěma páry elementů $A'A''$, $D'D''$ (neb $a'a''$, $d'd''$), které se navzájem oddělují harmonicky, při čemž jeden prvek A' (neb a') lze voliti libovolně. Skutečně, převedme na př. involuci danou

*) Involuce, které mají společnou nositelku — tedy dvě bodové involuce na přímce, na kružnici, dvě paprskové involuce v témže vrcholu a pod. — nazýváme involuce soumísné.

na přímce p páry $A'_0A''_0$, $B'_0B''_0$ na kružnici a určíme její střed J (obr. 12a). Ke zvolenému bodu A' dostaneme bod A'' na spojnici $A'J$. Sestrojíme pól P přímky $A'A''$, který padne vně kružnice na přímku p . PJ dává pak na kružnici body D' , D'' ; páry $A'A''$, $D'D''$ tvoří harmonickou čtveřinu na kružnici. Průmětem z bodu S na přímku p dostaneme harmonicky se oddělující páry $A'_0A''_0$, $D'_0D''_0$.

Poznámky a cvičení. 1. Involuce paprsková je dána dvojným paprskem m a párem $a'a''$; sestrojte druhý dvojný paprsek n , pravouhlý pár a k danému paprsku b' přidružený b'' .

2. Je dána symetrická paprsková involuce (dvojný paprsky jsou k sobě kolmé). Protněte ji kružnicí jdoucí vrcholem. Kde je střed involuce? Totéž proveďte pro involuci pravouhlou!

3. Najděte společný pár dvou soumístných involucí na přímce a) jedna je hyperbolická, druhá eliptická; b) obě jsou eliptické.

4. Nechť se na přímce páry bodové AB , CD oddělují harmonicky. Dalšímu bodu X buď přiřazen harmonicky X_1 vzhledem k AB a X_2 vzhledem k CD . Ukažte, že pak AB , CD , X_1X_2 jsou tři páry involuce. (Převedte na kružnici!)

5. Imaginární elementy v rovině.

V reálné rovině mějme dvě osy k sobě kolmé x , y jdoucí počátkem O a orientované. Bodu M patří známým způsobem dvě pravouhlé souřadnice x_1 , y_1 , které píšeme $(x_1; y_1)$. Obráceně dvojně čísel $(a; b)$ přiřadujeme bod, takže první číslo znamená souřadnici x , druhé souřadnici y . Jsou-li obě čísla reálná, je bod reálný, není-li aspoň jedno reálné, říkáme, že bod je imaginární. Ke každému imaginárnímu bodu v rovině patří bod imaginární sdružený. Na př. bod $A(1 + 2i; 3 - 4i)$ a $A'(1 - 2i; 3 + 4i)$ jsou imaginární body sdružené.

Omezíme-li se na reálná čísla, může každá z hodnot x , y proběhnouti všechna čísla od $-\infty$ do $+\infty$; říkáme, že množství reálných bodů v rovině je dvourozměrné. Podle toho množství imaginárních bodů v rovině je čtyřrozměrné,

neboť v $x_1 + ix_2$, $y_1 + iy_2$ každé z čísel x_1, x_2, y_1, y_2 může proběhnouti všechna čísla reálná.

Přímka v rovině je dána rovnicí

$$ax + by + c = 0 \quad (1a)$$

neb

$$ux + vy + 1 = 0, \quad (1b)$$

kde a, b nebo u, v současně nejsou rovny nule. Jsou-li všechny koeficienty reálné, říkáme, že přímka je reálná, není-li aspoň jeden reálný, říkáme, že přímka je imaginární. Množství reálných přímek v rovině je dvourozměrné, množství imaginárních přímek roviny je čtyřrozměrné.

O vzájemných vztazích reálných a imaginárních bodů a přímek můžeme vysloviti hned některé věty:

1. Je-li na reálné přímce imaginární bod $(x_1 + ix_2; y_1 + iy_2)$, jest na ní i bod imaginární sdružený $(x_1 - ix_2; y_1 - iy_2)$. Skutečně, dosadíme-li souřadnice prvního do (1a), jest

$$a(x_1 + ix_2) + b(y_1 + iy_2) + c = 0,$$

a při reálných a, b, c musí býti

$$ax_1 + by_1 + c = 0, \quad ax_2 + by_2 = 0;$$

pak hověí zřejmě rovnici i druhý bod.

2. Prochází-li reálným bodem imaginární přímka, prochází jím i imaginární přímka sdružená. Buď imaginární přímka

$$(a_1 + ia_2)x + (b_1 + ib_2)y + c_1 + ic_2 = 0. \quad (2)$$

Hověí-li této rovnici reálné hodnoty x, y , musí býti

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0, \quad a_2x + b_2y + c_2 = 0 \quad (3)$$

a bod $(x; y)$ je zřejmě i na imaginární přímce sdružené

$$(a_1 - ia_2)x + (b_1 - ib_2)y + c_1 - ic_2 = 0. \quad (2')$$

3. Na imaginární přímce leží jeden reálný bod. Skutečně na imaginární přímce (2) leží reálný bod, jehož souřadnice

hová rovnicím (3), a jen tento; jím prochází i přímka sdružená (2').

4. Imaginárním bodem v rovině prochází jediná reálná přímka, která jej spojuje s imaginárním bodem sdruženým.

Rovnice přímky bodem $(a_1 + ia_2; b_1 + ib_2)$ je

$$y - (b_1 + ib_2) = (k_1 + ik_2) [x - (a_1 + ia_2)]$$

čili

$$(k_1 + ik_2)x - y + b_1 - a_1k_1 + a_2k_2 + i(b_2 - a_1k_2 - a_2k_1) = 0.$$

Aby tato přímka byla reálná, muselo by býti

$$k_2 = 0, \quad b_2 - a_2k_1 = 0;$$

pak jest rovnice přímky

$$b_2x - a_2y + a_2b_1 - a_1b_2 = 0$$

a té hová také bod $(a_1 - ia_2; b_1 - ib_2)$.

Pro skutečné konstrukce určujeme imaginární bod v rovině přímkou, která jej spojuje s imaginárním bodem sdruženým s příslušnou involucí a příslušným směrem jak bylo uvedeno v odst. 2. Přímka sluje nositelkou bodu.

Podobně imaginární přímku určujeme příslušnou pa-prskovou involucí s určeným smyslem. Středem involuce je reálný bod přímky, jak bylo uvedeno v odst. 3.

Poznámky a cvičení. 1. Napište rovnici přímky spojující body $A(3 - 2i; 1 + i)$, $B(3 + 2i; 1 - i)$.

2. Určete reálný bod přímky $(3 + 2i)y + ix - 1 = 0$.

3. V rovině jsou dvě osnovy isotropických přímek, t. j. přímek, které mají směrnici $\pm i$, tedy rovnici tvaru

$$y = \pm ix + p.$$

Dokažte tyto vlastnosti isotropických přímek: a) vzdálenost dvou bodů na isotropické přímce je rovna nule; b) úhel reálné přímky s přímkou isotropickou je stálý (imag.); c) při posouvání a rotaci, tedy při pohybu v rovině přejde přímka isotropická v přímku isotropickou. [Rotace kolem počátku o úhel φ je dána vzorci

$$x' = x \cos \varphi - y \sin \varphi, \quad y' = x \sin \varphi + y \cos \varphi,$$

kde původní bod byl $(x; y)$, v poloze otočené $(x'; y')$.] Z toho plyne, že při pohybu rovinné soustavy v rovině zůstávají dva

body y klidu, totiž nevlastní body přímek $y = \pm ix$. Říkáme jim absolutní nebo kruhové body roviny.

K těmto kruhovým bodům lze také přijít touto úvahou: Hledejme průsečíky kružnice s přímkou nevlastní. Obecná rovnice kružnice jest

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 - r^2 = 0.$$

Chceme-li uvažovati o bodech nevlastních, zavádíme homogenní souřadnice, kladouce $\frac{x}{t}, \frac{y}{t}$ místo x, y . Rovnice kružnice jest pak

$$x^2 + y^2 - 2(ax + by)t + (a^2 + b^2 - r^2)t^2 = 0.$$

Pro přímkou nevlastní jest $t = 0$ a dostaneme tedy pro nevlastní body na kružnici rovnici $x^2 + y^2 = 0$ čili $(x + iy)(x - iy) = 0$. Tyto body jsou nezávislé na veličinách a, b, r , leží tedy na všech kružnicích. Všechny kružnice v rovině protínají nevlastní přímkou v týchž dvou bodech; odtud název kruhové body. Ukažte, že vzdálenost jakéhokoli bodu v rovině (v konečnu) od absolutního bodu je neurčitá! [Nutno psáti vzdálenost také ve tvaru homogenním, na př. vzdálenost od počátku O jest

$$d = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{t}.$$

4. Jsou-li $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ dva body v rovině, jest parametrické vyjádření bodů na přímce

$$x = \frac{x_1 - \lambda x_2}{1 - \lambda}, \quad y = \frac{y_1 - \lambda y_2}{1 - \lambda},$$

při čem λ má význam dělicího poměru bodu $(x; y)$ k základním bodům A, B . Buďte A, B dva imaginární nesdružené body a λ ať proběhne všechny reálné hodnoty. Tak dostaneme řadu imag. bodů, jež má tu vlastnost, že dvojpoměr kterýchkoli čtyř z nich je reálný (na př. $(ABP_1P_2) = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$). Napište rovnici reálné nositelky bodu (λ) (jako spojnicí s bodem sdruženým) a volte pak za λ zvláštní hodnoty, na př. 0; 1; -1; ∞ ; ...!

Lze ukázati, že tyto nositelky obalují kuželosečku.

Jak je tomu v případě, když bod A je reálný? (Volte $x_1 = y_1 = 0$.)

6. Jednoduché konstrukce s imaginárními elementy.

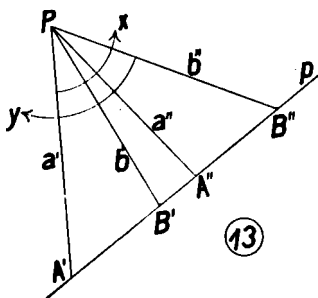
Ukážeme, jak lze s imaginárními elementy provést konstrukce, kde jde o spojování a protínání, tedy konstrukce z geometrie polohy. Jsou to úlohy:

- a) spojití reálný bod s bodem imaginárním;
- b) spojití dva imaginární body;
- c) sestrojiti průsečík reálné a imaginární přímky;
- d) sestrojiti průsečík dvou imaginárních přímek.

Řešení: a) Reálný bod buď P , imaginární $X = \begin{pmatrix} A' B' \\ A'' B'' \end{pmatrix}$.

Nejlépe je sledovati hned také druhou imaginární přímku, která jde bodem P a bodem imaginárním sdruženým $Y = \begin{pmatrix} B' A' \\ B'' A'' \end{pmatrix}$.

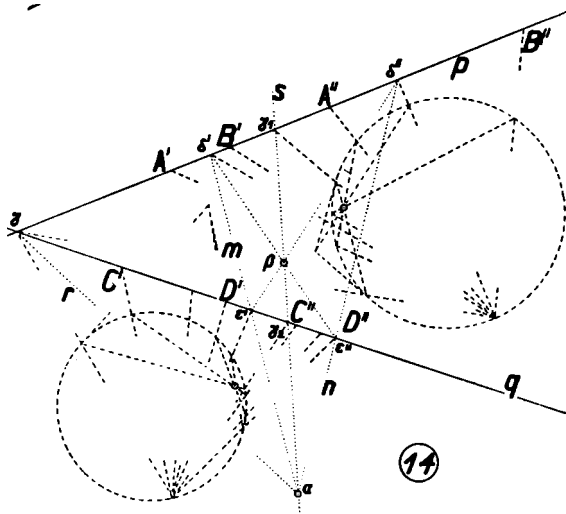
Při tom předpokládejme, že body $A' A'' B' B''$ (obr. 13) tvoří harmonickou čtveřinu; toto lze vždy dosíci na přímce p (str. 32). Bod P s body $A' A'' B' B''$ určuje paprskovou involuci $a' a''$, $b' b''$ s vrcholem P a její dvojné elementy jsou imag. přímky $x \equiv PX$, $y \equiv PY$. Prvá je dána involucí $a' a''$, $b' b''$ a smyslem otáčení, který odpovídá smyslu $A' B' A''$, druhá touž involucí a smyslem $B' A' B''$.



b) Buď dán imaginární bod $X = \begin{pmatrix} A' B' \\ A'' B'' \end{pmatrix}$ na reálné nositelce p a jiný $Z = \begin{pmatrix} C' D' \\ C'' D'' \end{pmatrix}$ na reálné nositelce q (obr. 14). Nejlépe je opět vzít v úvahu i body imaginární sdružené $Y = \begin{pmatrix} B' A' \\ B'' A'' \end{pmatrix}$ na p a $T = \begin{pmatrix} D' C' \\ D'' C'' \end{pmatrix}$ na q .

Jde celkem o čtyři imaginární přímky po dvou sdružené: XZ , YT ; XT , YZ . Reálný průsečík prvních buď α , druhých β . α, β jsou středy paprskových involucí perspektivních současně s oběma involucemi na p, q . Odtud vyplývá konstrukce bodů α, β . Buď γ průsečík přímek p, q . V involuci na p ať

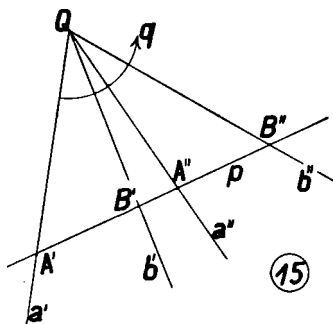
mu odpovídá γ_1 a sestrojme další pár této involuce δ', δ'' , který odděluje harmonicky $\gamma\gamma_1$ (viz str. 32). Podobně v involuci na q ať odpovídá bodu γ bod γ_2 a $\varepsilon'\varepsilon''$ ať odděluje tento pár harmonicky. Tyto harmonické čtveřiny jsou perspektivní



dvojím způsobem (viz str. 16, úl. 6) podle středů α, β . Při tom jest, hledíme-li ke stanovenému smyslu $X = \begin{pmatrix} \gamma & \delta' \\ \gamma_1 & \delta'' \end{pmatrix}$, $Z = \begin{pmatrix} \gamma & \varepsilon' \\ \gamma_2 & \varepsilon'' \end{pmatrix}$; hledaná přímka má tedy reálný bod α a lze jí označiti $\begin{pmatrix} r & m \\ s & n \end{pmatrix}$. Označte podobně zbývající tři přímky!*)

*) Zde používáme pravítka i kružítko k pomocné konstrukci sestrojení harmonických bodů. Úloha sestrojiti spojnicí dvou bodů je však lineární a dá se provést jen pravítkem. Skutečně i tato konstrukce s imaginárními elementy dá se malou obměnou upravit na konstrukci jen pravítkem, jak ukázal Grünwald (Zeitschrift f. Math. u. Phys., Bd. 45, 1900).

c) Reálná přímka buď p , imaginární $q = \begin{pmatrix} a' & b' \\ a'' & b'' \end{pmatrix}$. Příslušná involuce $a'a''$, $b'b''$ má vrchol Q (obr. 15). Tato involuce seče přímku p v bodové involuci $A'A''$, $B'B''$ a její dvojný bod $X = \begin{pmatrix} A' & B' \\ A'' & B'' \end{pmatrix}$ je hledaný průsečík (obr. 15).



d) Sestrojiti jest průsečík dvou imaginárních přímek $x = \begin{pmatrix} a' & b' \\ a'' & b'' \end{pmatrix}$, $z = \begin{pmatrix} c' & d' \\ c'' & d'' \end{pmatrix}$. Úloha je duální k úloze b). Nahradíme opět čtveřinu definující involuci čtveřinou harmonickou, takže jest (obr. 16) $x = \begin{pmatrix} p & m \\ p_1 & n \end{pmatrix}$, $z = \begin{pmatrix} p & r \\ p_2 & s \end{pmatrix}$. Harmonické svazky s vrcholy P , Q jsou perspektivní dvojím způsobem s osami a , b (úl. 6, str. 16). Hledaný průsečík je na přímce a ; lze jej vyznačiti $\begin{pmatrix} R & T \\ Z & U \end{pmatrix}$. Vyznačte podobně ostatní tři průsečíky!

Cvičení. 1. Imaginární bod na nevlastní přímce (v nekonečnu) lze určití paprskovou involucí o středu S , která je perspektivní s involucí na nevlastní přímce, s připojeným smyslem otáčení. Kruhové body jsou určeny pravoúhlou involucí. Jest dán imaginární bod X^∞ ; spojte jej a) s reálným bodem P , b) s imaginárním bodem Q daným involucí na nositelce q .

dem, úsečka r , vyhovující rovnici $(a_1 + ia_2)^2 + (b_1 + ib_2)^2 - (p_1 + ip_2) = r^2$ je její poloměr. Křivka může mít dva reálné body, jejichž souřadnice hovoří rovnicím

$$x^2 + y^2 - 2a_1x - 2b_1y + p_1 = 0, \quad 2a_2x + 2b_2y - p_2 = 0. *)$$

Na př. takovou kružnici je křivka

$$k \equiv x^2 + y^2 + r^2 = 0;$$

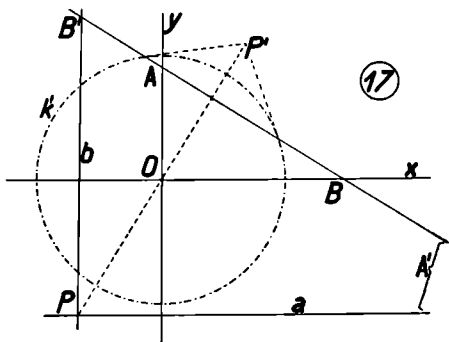
její střed je $O(0; 0)$ a poloměr ri . **) Nemá reálného bodu (protože součet čtverců tří reálných čísel nemůže být roven nule). Táž myšlenka, která vedla k tomu, že jsme imaginární body na přímce nahradili souhrnem párů bodových, které byly harmonicky sdruženy k imaginárním bodům (říkáme také, že byly polárně sdruženy k těmto bodům) — právě tak imaginární přímky ve svazku — vede i zde k tomu, abychom imaginární kružnici nebo obecněji imaginární kuželosečky zavedli pomocí jejich polárních systémů. Vyložíme stručně, co máme na mysli. Bodu $(x_0; y_0)$ v rovině patří vzhledem k uvažované imaginární kružnici k polára $xx_0 + yy_0 + r^2 = 0$ a obráceně obecné přímce $ux + vy + 1 = 0$ patří vzhledem ke kružnici pól $x_0 = ur^2, y_0 = vr^2$. Takovým způsobem jsou si body roviny a přímky pomocí kružnice k přiřazeny. Body, které leží na své poláře, jsou body křivky — řídicí křivky polární soustavy (systému). Tato vlastnost je pro řídicí křivku charakteristická.

Ke konstrukcím lze výhodně použít reálné kružnice $k' \equiv x^2 + y^2 - r^2 = 0$, již říkáme reálná zástupkyně. Na př. polára bodu $(x_0; y_0)$ k zástupkyni jest $x_0x + y_0y - r^2 = 0$ a přirovnáme-li rovnice obou polár, vidíme, že jedna z druhé vznikne otočením kolem O o 180° . Také obráceně k přímce p sestrojíme pól k imaginární kružnici, se-

*) O takových imaginárních kuželosečkách obšírně pojednává V. Jarolímek v knize: Základové geometrie polohy v rovině a prostoru.

**) Kružnice o středu O a poloměru nula má rovnici $x^2 + y^2 = 0$, kterou lze psát $(y + ix)(y - ix) = 0$. Tato kružnice se tedy rozpadá ve dvojtinu isotropických přímek.

strojíme-li napřed pól P' k reálné zástupkyni a pak bod P symetrický podle středu O (obr. 17). Tato korespondence mezi body a přímkami roviny se zове antipolarita vzhledem k reálné kružnici k' ; antipolarita je složena z polarity ke kružnici k' a středové symetrie vzhledem k středu kružnice k' .



Průsečky přímky p s kružnicí k jsou potom dány involucí (jako samodružné její body), kterou na p určuje polární systém. Pro určení involuce zvolíme výhodně dva páry: Tak bodu A na ose y patří polára a , jež seče p v A' ($PA' \perp OA$), bodu B patří polára b , jež dává B' . Dvojné body involuce AA' , BB' jsou hledané průsečky. Přímky, které je spojují s pólem P jsou tečny z bodu P .

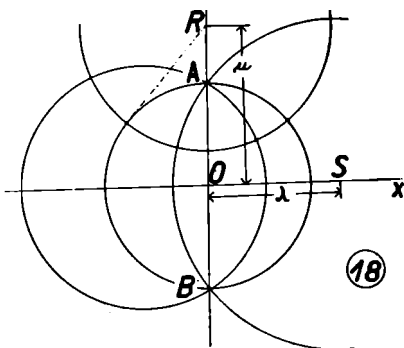
Svazek kružnic je souhrn kružnic, jež mají společné dva body. Volme tyto základní body svazku reálné, jejich spojnicí za osu y , střednou za osu x (obr. 18). Buďte $A(0; c)$, $B(0; -c)$. Kružnice svazku o středu $S(\lambda; 0)$ má pak rovnici

$$x^2 + y^2 - 2\lambda x - c^2 = 0.$$

Jsou-li základní body A, B imaginární sdružené, tedy $A(0; ci)$, $B(0; -ci)$, potom rovnice obecné kružnice svazku jest

$$(x - \lambda)^2 + y^2 = -c^2 + \lambda^2$$

a ve svazku jsou kružnice reálné ($|\lambda| > c$) a imaginární ($|\lambda| < c$) a dvě kružnice o poloměru nula při $\lambda = \pm c$. V prvním případě vytíná svazek na ose x eliptickou involuci se středem O ; v druhém případě je involuce hyperbolická.



Chordála AB je geom. místo středu kružnice, která seče pravouhle všechny kružnice svazku (poloměr rovná se délce tečny vedené z bodu na chordále ke kružnicím svazku). Tyto ortogonální kružnice tvoří nový svazek, *doplňkový* s prvním, a jeho základní body jsou nulové kružnice (imag.) prvního. Má-li tedy první základní body $A(0; c)$, $B(0; -c)$, má druhý základní body $M(ci; 0)$, $N(-ci; 0)$. Rovnice obecné kružnice doplňkového svazku o středu $R(0; \mu)$ jest

$$x^2 + y^2 - 2\mu y + c^2 = 0.$$

Body A, B , resp. M, N jsou protější vrcholy čtyřúhelníka tvořeného minimálními přímkami.

Ohniska kuželosečky a vůbec ohniska algebraické křivky jsou body, ze kterých ke křivce jdou dvě isotropické tečny. Podle toho elipsa a hyperbola mají čtyři ohniska, neboť každým kruhovým bodem na nevlastní přímce jdou

dvě tečny, tedy celkem čtyři. Dvě ohniska jsou reálná, v nich se protínají přímky imaginární sdružené, dvě jsou imaginární. Na př. elipsa

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

má reálná ohniska $F_1(e; 0)$, $F_2(-e; 0)$, imaginární $F_3(0; ie)$, $F_4(0; -ie)$, kde $e = +\sqrt{a^2 - b^2}$. Skutečně, hledáme-li isotropické tečny, protněme elipsu přímkou $y = \pm ix + p$ a vyjádříme, že oba průsečíky mají splynouti; nejdříve dostaneme rovnici

$$x^2(a^2 - b^2) \pm 2a^2pix + a^2(b^2 - p^2) = 0,$$

v níž položíme diskriminant rovný nule; dostaneme $p = \pm ei$. Rovnice isotropických tečen jsou tedy

$$y = i(x \pm e), \quad y = -i(x \pm e).$$

Jejich reálné body jsou F_1, F_2 . Polára ohniska (spojuje dotykové body isotropických tečen) jest $x = \pm \frac{a^2}{e}$; (říkáme jí řídicí přímka kuželosečky). Také jest možno říci, že ohnisko je střed kružnice o poloměru nula, která se dvakrát elipsy dotýká, neboť rovnici této kružnice

$$(x - e)^2 + y^2 = 0$$

lze psáti

$$[y + i(x - e)] \cdot [y - i(x - e)] = 0.$$

V závorkách jsou levé strany rovnic isotropických tečen.

Lze ukázati: Pohybuje-li se bod P po řídicí přímce, otáčí se jeho polára kolem ohniska a spojnice F_iP je k ní kolmá, tedy: Sdružené poláry procházející ohniskem kuželosečky jsou k sobě kolmé.

Imaginární elipsa buď dána rovnicí $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0$ (a, b reálné, $a > b$). Nahraďme křivku opět polárním systémem neboli polárním polem. Bodu $(x_0; y_0)$ patří polára

$\frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} + 1 = 0$. Přirovnáme-li poslední rovnici k obecné rovnici přímky $ux + vy + 1 = 0$, dostaneme

$$u = \frac{x_0}{a^2}, \quad v = \frac{y_0}{b^2}.$$

To jsou formulky transformační, jež vyjadřují řečenou polaritu. Bodu $(x_0; y_0)$ je přiřazena přímka $(u = \frac{x_0}{a^2}, v = \frac{y_0}{b^2})$ a obráceně přímce s koeficienty u, v jest přiřazen bod $(a^2u; b^2v)$. Ke konstrukci možno použítí opět reálné zástupkyně — reálné souosé elipsy s poloosami a, b . Polára bodu P k reálné elipse a polára k imaginární elipse jsou položeny symetricky podle společného středu O .

Také je možno mluvit o imaginární transformaci (lépe afinitě), která převádí jednu elipsu do druhé. Zde jest $x' = xi, y' = yi$.

Poznámky a cvičení. 1. Sestrojte kružnici, je-li dána reálným bodem P a dvěma imaginárními sdruženými X, Y na nositelce p . (Pozn.: Dané imaginární body jsou základní body svazku kružnic, doplňkový svazek má základní body reálné, jedna kružnice tohoto svazku jde bodem P ; hledaná kružnice je k ní kolmá.)

2. Ukažte, že z ohnisek hyperboly $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ jdou dvě isotropické tečny.

Podobně pro parabolu $y^2 = 2px$. (Pozn.: Parabola má jen jediné ohnisko, poněvadž se dotýká nevlastní přímky roviny, na které jsou kruhové body.)

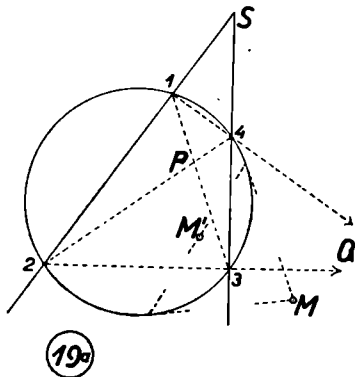
3. Jest dána imaginární elipsa poloosami ai, bi ($|a| > |b|$). Sestrojte průsečíky s reálnou přímkou a tečny z reálného bodu (příslušnými involucemi). Stanovte ohniska této imaginární elipsy.

4. Opište ze středu O elipsy předešlé úlohy kružnici o poloměru r a stanovte její průsečíky s imaginární elipsou. Dvě těčny jsou vždy reálné. Vezměte $r < b$, pak $b < r < a$ a konečně $r = a$ (nebo b).

5. Jest dán svazek soustředných kružnic $x^2 + y^2 = k^2$ (k je proměnné). Ukažte, že se vzájemně dotýkají v absolutních bodech (čili mají společné asymptoty).

lze přiřaditi M' , ve kterém se protínají polára ke kružnici a polára ke dvojině přímek (12, 34), t. j. $S(1, 3, M, M') = -1$. Toto přiřazení bodů v rovině je jednoznačné. (Které body činí výjimku?) Přímka MM' seče však celý svazek kuželoseček o základních bodech 1, 2, 3, 4 v involuci (viz úl. 8, str. 23), M, M' oddělují harmonicky dvě z nich, oddělují tedy všechny a jsou dvojné body této involuce. Oddělují harmonicky i dvojiny přímek (13, 24), (14, 23).

Obraťme se k danému případu, kdy máme dvojinu imaginárních přímek m, n s průsečíkem S , kde $m = \begin{pmatrix} a' & b' \\ a'' & b'' \end{pmatrix}$, $n = \begin{pmatrix} b' & a' \\ b'' & a'' \end{pmatrix}$. (obr. 19). Na poláře bodu S ke kružnici leží body P, Q , jež oddělují harmonicky m, n i α, β , jsou tedy reálné (v obr. 19 byly sestrojeny užitím kružnice jdoucí bodem S (str. 32)). Volme na b' bod M' ; sružený M'' je na b'' a na poláře bodu M' ke kružnici. V P se protínají dvě přímky, jež jdou společnými body kružnice a dvojiny (m, n). Tyto přímky jsou současně odděleny bodovými páry $M'M''$ a QS (vrcholy spol. polár. trojúheln.). Z P se promítnou oba páry involucí eliptickou, z Q se však páry $M'M''$, PS promítají involuci hyperbolickou a dvojné paprsky u, t jsou nositelky hledaných imaginárních bodů (v obraze byly sestrojeny užitím kružnice bodem Q).]



8. Proveďte duální úlohu: K dané kružnici sestrojiti tečny z imaginárního bodu. [Uvažujte opět napřed případ, kdy máme dva reálné body X, Y mimo kružnici. Z nich vycházejí tečny 1, 2 resp. 3, 4. Jejich spojnice $p \equiv (13, 24)$, $q \equiv (14, 23)$ se spojnicí $s \equiv XY$ tvoří polární trojúhelník. Jakou úlohu hrála v předešlém případě dvojice přímek, takovou zde hraje dvojice bodů X, Y . K přímce m' lze přiřaditi m'' , jež spojuje pól přímky m' ke kružnici a ke dvojici (X, Y), t. j. průsečíky přímek m', m'' s přímkou s oddělují harmonicky body X, Y . Tím vznikají na stranách uvedeného polárního trojúhelníku involuce, jichž lze užití v případě, kdy body X, Y jsou imaginární sružené.]

Podobná úloha je sestavení ohnisek kuželosečky na př. elipsy. Imaginární body jsou zde kruhové body v nekonečnu. Nevlastní přímka a osy kuželosečky tvoří polární trojúhelník. Přidružené přímky m', m'' jsou k sobě kolmé, poněvadž oddělují harmonicky body kruhové.

8. Elementy prostorové geometrie polohy.

Prvky geometrie v prostoru jsou bod, rovina a přímka.

V prostoru stojí duálně proti sobě bod a rovina; přímka je duální opět přímce — jeví se jako spojnice dvou bodů a jako průsečnice dvou rovin. Ke každé polohové větě v prostoru (kde jde o promítání a protínání) patří věta duální, kterou dostaneme, zaměníme-li výrazy bod, přímka, rovina, spojnice, průsečnice za výrazy duální rovina, přímka, bod, průsečnice, spojnice. Jako příklad uvedeme vedle sebe duální věty:

Dva body určují přímku;
jest to jejich spojnice.

Přímka a rovina mají obecně společný bod.

Tři roviny mají obecně společný jediný bod.

Dvě roviny určují přímku;
jest to jejich průsečnice.

Přímka a bod určují obecně rovinu.

Tři body určují obecně jedinou rovinu.

Množství bodů na přímce sluje opět řada bodová, duální útvar je množství rovin, které jdou touž přímkou a sluje svazek rovin. Přímka je osa svazku.

Souhrn rovin s osou s a rovinami $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \dots$ je prořat přímkou p mimoběžnou s osou v řadě $A, B, C, D, \dots$, kde bod A leží v rovině α , B v β atd.; řada p je perspektivní se svazkem rovin. Rovina ρ , která nejde osou s , seče svazek rovin ve svazku paprsků $a, b, c, d, \dots$ s vrcholem R na s , jenž sluje perspektivní se svazkem rovin. Je-li σ jiná rovina, dává opět svazek s vrcholem S na s a oba svazky v rovinách ρ, σ jsou perspektivní; průsečnice (ρ, σ) je osa perspektivnosti.

Čtyři roviny svazku (s) tvoří dvojpoměr $(\alpha\beta\gamma\delta) =$

$$= \frac{\sin \hat{\alpha\gamma}}{\sin \hat{\beta\gamma}} : \frac{\sin \hat{\alpha\delta}}{\sin \hat{\beta\delta}}, \text{ který se rovná dvojpoměru čtyř pa-}$$

prsků ($abcd$) kteréhokoli perspektivního svazku nebo dvojpoměru čtyř bodů ($ABCD$) kterékoli perspektivní řady. Je-li speciálně $(\alpha\beta\gamma\delta) = -1$, říkáme, že roviny tvoří harmonickou čtveřinu.

Tvoří-li roviny $\alpha'\alpha'', \beta'\beta'', \gamma'\gamma'', \dots$ involuci, je na každé perspektivní řadě vyřazena involuce bodová a na každé rovině perspektivní involuce paprsková.

9. Některé věty o imaginárních elementech v prostoru.

Volme v prostoru pravoúhlou soustavu souřadnic. Počátek označme O a tři k sobě kolmé osy x, y, z ať jsou orientovány. Bodu patří tři souřadnice a obráceně trojně čísel v předepsaném pořádku přiřadíme bod v prostoru. Jsou-li všechny reálné, jest bod reálný, je-li aspoň jedna imaginární, jest bod imaginární.

Rovina je dána rovnicí

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

nebo

$$ux + vy + wz + 1 = 0.$$

Jsou-li všechny koeficienty reálné, je rovina reálná, není-li aspoň jeden reálný, je rovina imaginární.

A. Přímky a roviny jdoucí pevným bodem v prostoru tvoří prostorový svazek čili trs; pevný bod je jeho střed. Průsek trsu s rovinou, jež nejde středem, je perspektivní pole rovinné. Spojíme-li bod nebo přímku rovinného pole se středem trsu, dostaneme přímku, neb rovinu trsu. Je-li střed $S(a; b; c)$, má rovina trsu rovnici

$$A(x - a) + B(y - b) + C(z - c) = 0;$$

poměry $\frac{A}{C}, \frac{B}{C}$ mohou nabýti libovolných hodnot reálných neb imaginárních.

B. Roviny jdoucí přímkou tvoří svazek rovin. Jsou-li dvě roviny svazku

$$A \equiv a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0, \quad B \equiv a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0,$$

pak rovina svazku je dána rovnicí

$$A + \lambda B = 0,$$

kde λ může nabýti libovolné hodnoty reálné neb imaginární.

C. Spojnice dvou imaginárních sdružených bodů je reálná a právě tak průsečnice dvou imaginárních sdružených rovin. Skutečně spojnice bodů $A(x'; y'; z')$, $B(x''; y''; z'')$ je dána rovnicemi

$$\frac{x - x_0}{x' - x''} = \frac{y - y_0}{y' - y''} = \frac{z - z_0}{z' - z''},$$

kde $(x_0; y_0; z_0)$ je střed úsečky AB , tedy $x_0 = \frac{x' + x''}{2}$ atd.

Vezmeme teď dva imaginární sdružené body $A(x_1 + ix_2; y_1 + iy_2; z_1 + iz_2)$, $B(x_1 - ix_2; y_1 - iy_2; z_1 - iz_2)$. Pro spojnicí vychází

$$\frac{x - x_1}{x_2} = \frac{y - y_1}{y_2} = \frac{z - z_1}{z_2}.$$

$S(x_1; y_1; z_1)$ je reálný střed úsečky AB . Dále jsou na přímce reálné body $M(x_1 + x_2; y_1 + y_2; z_1 + z_2)$, $N(x_1 - x_2; y_1 - y_2; z_1 - z_2)$. S je střed involuce, MN jeden pár involuce (symetrický podle S), jejíž dvojné body jsou A, B . — Dvě imaginární sdružené roviny buďte

$$(A_1 \pm iA_2)x + (B_1 \pm iB_2)y + (C_1 \pm iC_2)z + D_1 \pm iD_2 = 0.$$

Oběma je společná přímka daná rovnicemi

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \quad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

Vezmeme-li tuto přímku za osu z , pak mají rovnice tvar $y = (k_1 + ik_2)x$ a vidíme opět, že se jeví jako dvojné roviny involuce, jejíž rovnice jest $t_1t_2 - k_1(t_1 + t_2) + k_1^2 + k_2^2 = 0$, při tom $(y - t_1x)(y - t_2x) = 0$ jest jeden pár involuce.

D. Imaginárním bodem jde jediná reálná přímka, která jej spojuje s bodem sdruženým, v imaginární rovině jest jediná reálná přímka, průsečnice s rovinou sdruženou. Mimo ni nemá rovina reálného bodu.

E. Snadno nahlédneme, že platí věta: Jsou-li dva elementy imaginární (nebo jeden imag. a jeden reálný) incidentní, jsou incidentní i elementy sdružené (na př. leží-li bod na přímce, leží sdružený bod na sdružené přímce atd.).

Imaginární přímky v prostoru jsou dvojího druhu. Především takové, jež jsou položeny v reálné rovině. Taková přímka seče sdruženou imaginární ležící v téže rovině v reálném bodě a sluje imaginární přímka prvního druhu.

Ale dva imaginární body v prostoru (nesdružené) určují obecně přímku, která sdruženou přímku, t. j. přímku určenou imag. sdruženými body, neseče a nemá reálného bodu. Neboť ten by byl na obou (sám sobě sdružený) a přímky by ležely v jedné rovině. Taková přímka sluje imaginární druhého druhu. Na př. přímka určená body $A(0; 0; i)$, $B(1; i; i)$ jest druhého druhu. Přímka sdružená je určena body $A'(0; 0; -i)$, $B'(1; -i; -i)$. Tyto nemají reálného bodu. Body A, A' leží na ose z , B, B' na přímce $x = 1$, $y = z$, jež je s osou z mimoběžná.

Duálně lze definovati imaginární přímku druhého druhu jako průsečnici dvou imaginárních, nesdružených rovin, jejichž osy jsou mimoběžné. Tato přímka nemá reálného bodu, neboť by musel ležeti na ose jedné i druhé roviny.

Pro konstruktivní účely určujeme imaginární bod v prostoru eliptickou involucí na reálné nositelce, která jej spojuje s bodem sdruženým a připojeným směrem involuce. Při tom lze vždy, jak bylo ukázáno (str. 32) dosáhnouti toho, že dva páry určující involuci se harmonicky oddělují. Imaginární rovinu určíme opět nejpočetněji reálnou osou o a eliptickou involucí $\alpha'\alpha'', \beta'\beta''$ s připojeným smyslem otáčení. Vždy lze předpokládati $(\alpha'\alpha''\beta'\beta'') = -1$. Můžeme tedy obě imaginární roviny dané uvedenou involucí označiti

$$x = \begin{pmatrix} \alpha' & \beta' \\ \alpha'' & \beta'' \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} \beta' & \alpha' \\ \beta'' & \alpha'' \end{pmatrix}.$$

Cvičení. Odůvodněte správnost těchto vět:

a) Imaginární bod leží v reálné rovině, leží-li v ní jeho nositelka.

b) Imaginární přímka prvního druhu leží v reálné rovině, leží-li v ní i přímka sdružená.

c) Imaginární přímka prvního druhu seče reálnou přímku, jde-li tato reálným bodem první, nebo leží-li v rovině, ve které je i přímka sdružená.

d) Imaginární bod leží v imaginární rovině, jsou-li příslušné involuce perspektivní a souhlasného smyslu, nebo splývá-li nositelka bodu s osou roviny.

e) Imaginární přímka prvního druhu a imaginární rovina jsou incidentní, jsou-li příslušné involuce perspektivní a stejného smyslu.

10. Základní prostorové konstrukce s imaginárními elementy.

Teď můžeme provést některé prostorové konstrukce, ve kterých jde o spojování a protínání, aspoň myšlenkově, a čtenář znalý deskriptivní geometrie může je provést v promítání na jednu nebo na dvě průmětny nebo i v promítání centrálním.*) Zatím vynecháváme konstrukce, kde jde o přímku druhého druhu.

a) Spojití reálný bod s imaginárním bodem přímkou. Daný bod buď P , imaginární $X = \begin{pmatrix} A' & B' \\ A'' & B'' \end{pmatrix}$ na nositelce q , jež nejde bodem P . P a q určují rovinu a další řešení je obsaženo v úloze a) str. 37.

b) Sestrojení průsečnice reálné roviny ρ s imaginární $\sigma = \begin{pmatrix} \alpha' & \beta' \\ \alpha'' & \beta'' \end{pmatrix}$, jejíž osa (reálná přímka) buď s . Přímka s seče ρ v bodě S a to je střed přímkového involučního

*) Některé jsou provedeny v díle: Fiedler, Darstellende Geometrie, III. díl.

svazku $a'a'', b'b''$ perspektivního s involucí $\alpha'\alpha'', \beta'\beta''$. Hledaná průsečnice jest $x = \begin{pmatrix} a' & b' \\ a'' & b'' \end{pmatrix}$.

c) Reálný bod jest spojití s imaginární přímkou prvního druhu rovinou. Reálný bod buď P , přímka $r = \begin{pmatrix} a' & b' \\ a'' & b'' \end{pmatrix}$ je v reálné rovině ρ a má reálný bod R . PR jest reálná přímka roviny a zároveň osa involučního svazku rovin perspektivního k involuci $a'a'', b'b''$.

d) Sestrojiti průsečík reálné roviny σ s imaginární přímkou prvního druhu $r = \begin{pmatrix} a' & b' \\ a'' & b'' \end{pmatrix}$, která je v rovině ρ a má reálný bod R . Roviny ρ a σ mají průsečnici p a na ní je involuce $A'A'', B'B''$ perspektivní s $a'a'', b'b''$. Hledaný průsečík je $X = \begin{pmatrix} A' & B' \\ A'' & B'' \end{pmatrix}$.

e) Sestrojiti rovinu určenou reálnou přímkou p a imaginárním bodem $X = \begin{pmatrix} A' & B' \\ A'' & B'' \end{pmatrix}$ na reálné nositelce q , jež neseče p . Přímka p je osa svazku rovin perspektivního s řadou q , ve svazku je tedy involuce $\alpha'\alpha'', \beta'\beta''$ perspektivní s $A'A'', B'B''$. Hledaná rovina je $\xi = \begin{pmatrix} \alpha' & \beta' \\ \alpha'' & \beta'' \end{pmatrix}$.

f) Sestrojiti průsečík reálné přímky p s imaginární rovinou $\sigma = \begin{pmatrix} \alpha' & \beta' \\ \alpha'' & \beta'' \end{pmatrix}$ s osou s , která neseče p . Involuce $\alpha'\alpha'', \beta'\beta''$ seče p v perspektivní involuci $A'A'', B'B''$ a hledaný bod je $X = \begin{pmatrix} A' & B' \\ A'' & B'' \end{pmatrix}$.

g) Sestrojiti rovinu danou imaginárním bodem a imaginární přímkou prvního druhu. Imaginární bod buď $X = \begin{pmatrix} A' & B' \\ A'' & B'' \end{pmatrix}$ na nositelce p , imaginární přímka buď $t = \begin{pmatrix} a' & b' \\ a'' & b'' \end{pmatrix}$ v reálné rovině τ s reálným bodem T . Bod T a přímka p určují reálnou rovinu ρ , jež seče τ v přímce m'

jdoucí bodem T a protínající p v M' . Nahraďme páry $A'A''$, $B'B''$ involuce na p páry $M'M''$, $N'N''$, které se harmonicky oddělují a právě tak nahraďme páry $a'a''$, $b'b''$ jinými $m'm''$, $n'n''$, které se oddělují harmonicky. Pak roviny $(M''m'')$, $((N'n')$, $(N''n'')$ jdou touž přímkou x , roviny $(M''m'')$, $(N'n'')$, $N''n'$ přímkou y (srov. odst. 6 úl. b)). Prvá z nich je osou hledané roviny.

Cvičení. Uvažujte různé případy, kdy se protínají dvě imaginární přímky prvního druhu. Jak lze sestrojiti rovinu jimi určenou? [Označme přímky p, q , reálné roviny, ve kterých jsou, α, β , reálné jejich body P, Q , průsečík X a rovinu (pq) označme ϱ .

a) X i ϱ jsou imaginární (obecný případ); na průsečnici $(\alpha\beta)$ určí p i q tutéž involuci a involuce rovin s osou (PQ) je s ní perspektivní,

b) X reálné, ϱ imaginární,

c) ϱ reálné, X imaginární,

d) X i ϱ reálné.]

11. Imaginární přímka druhého druhu.

Imaginární přímka druhého druhu je dána jako spojnice dvou imaginárních bodů v prostoru (nesdružených) anebo jako průsečnice dvou imaginárních rovin, jejichž osy jsou mimoběžné. Oba způsoby určení jsou identické. Neboť, jsou-li A, B dané imaginární body určující přímku, a, b reálné nositelky těchto bodů, pak se jeví přímka jako průsečnice rovin (aB) , (bA) . Tato přímka nemá reálného bodu, ale dvouparametrickou soustavu bodů imaginárních a nositelky těchto protínají zároveň imaginární přímku sdruženou. Každé dvě jsou mimoběžné, neboť jinak by imaginární přímka ležela v reálné rovině. Tento útvar, tvořený reálnými nositelkami oněch bodů (budeme jim říkati sečny obou imaginárních přímek), sluje kongruence lineární.

Lineární kongruence sluje množství přímek, které protínají současně dvě mimoběžky. Jsou-li reálné, sluje kongruence hyperbolická, jsou-li imaginární sdružené (druhého druhu), sluje eliptická. Uvedeme nejdůležitější vlastnosti

této kongruence, jež lze snadno sledovati v obou případech. Dané dvě mimoběžky a, b slují osy kongruence. Bodem mimo osy (reálným) jde jediná sečna. Neboť roviny (Pa) , (Pb) se protínají v jediné přímce; jsou-li a, b imaginární, jsou i obě roviny imaginární sdružené, a průsečnice je tedy reálná. V rovině (reálné) ϱ , jež neobsahuje žádnou z os, leží také jen jedna sečna, která spojuje průsečíky roviny ϱ s přímkami a, b . Neboť, je-li a dáno jako průsečnice rovin α, β , jest b průsečnice sdružených α', β' , tedy průsečíky (ϱ, α, β) , $(\varrho, \alpha', \beta')$ jsou imaginární sdružené a spojnice jejich je reálná.

Lineární kongruencí je definována prostorová příbuznost zvaná zborcená involuce. Bodem P mimo osy a, b jde jedna sečna p , na ní jest involuce s dvojnými body $A \equiv (a, p)$, $B \equiv (b, p)$, ve které bodu P je přiřazen P' , jenž s P odděluje harmonicky body A, B . Bodu P' je ovšem obráceně přiřazen bod P .

Analyticky lze tyto vztahy vyjádřiti jednoduše, volíme-li vhodně pravoúhlou soustavu souřadnic. Rovina nevlastní (v nekonečnu) obsahuje jedinou sečnu, jež spojuje nevlastní body A_∞, B_∞ obou os, ať jsou reálné nebo imaginární. Je to nevlastní přímka roviny rovnoběžné s oběma osami. Bodem nevlastním ve směru kolmém k této rovině jde jediná sečna, protínající osy a, b v bodech A, B („nejkratší příčka“ mimoběžek a, b). Volme střed O úsečky AB (střed involuce s dvojnými A, B) za počátek soustavy, nejkratší příčku mimoběžek za osu z a v rovině kolmé k ose z bodem O osy x, y , takže roviny (zx) , (zy) jsou kolmé roviny půlící úhly rovin (za) , (zb) nebo pravoúhlý pár rovin příslušné involuce (obr. 20). (Osy x, y jsou osy souměrnosti obou mimoběžek a, b .)

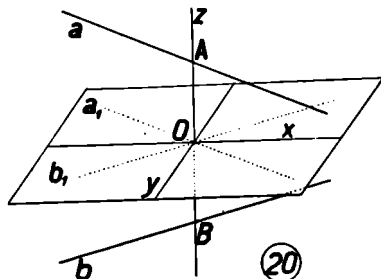
Pak zní rovnice obou os, jsou-li reálné:

$$(a) \quad \begin{aligned} z &= -c, \\ y &= -kx; \end{aligned} \quad (b) \quad \begin{aligned} z &= c, \\ y &= kx. \end{aligned} \quad (1)$$

Rovnice sečny, která spojuje bod $(x_1; -kx_1; -c)$ na a s bodem $(x_2; kx_2; c)$ na b , lze psáti

$$x = \frac{c(x_1 + x_2) + z(x_2 - x_1)}{2c},$$

$$y = k \frac{c(x_2 - x_1) + z(x_1 + x_2)}{2c}. \quad (2)$$



Položme $x_1 + x_2 = u$, $x_2 - x_1 = v$, kde u, v jsou parametry, které mohou nabýti libovolných hodnot. Rovnice (2) pak jsou

$$x = \frac{cu + zv}{2c},$$

$$y = k \frac{cv + zu}{2c}. \quad (3)$$

Body A, B a pravoúhlé průměty přiřazených bodů P, P' do osy z tvoří harmonickou čtveřinu, tedy $zz' = c^2$ (viz str. 13). Dosadíme-li do posledních rovnic $z' = \frac{c^2}{z}$ za z , dostaneme rovnice naší příbuznosti ve tvaru

$$x' = \frac{c}{k} \frac{y}{z}, \quad y' = c \cdot k \frac{x}{z}, \quad z' = \frac{c^2}{z} \quad (4)$$

a obráceně právě tak

$$x = \frac{c}{k} \frac{y'}{z'}, \quad y = ck \frac{x'}{z'}, \quad z = \frac{c^2}{z'}.$$

Proběhne-li bod $(x; y; z)$ rovinu $Ax + By + Cz + D = 0$, proběhne přidružený rovinu

$$Bckx' + \frac{Ac}{k} y' + Dz' + Cc^2 = 0;$$

proběhne-li přímku, proběhne přidružený opět přímku.*)

*) Příbuznost, která je algebraická a v níž bodu odpovídá jedno-jednoznačně bod, rovině rovina (přímce přímka), sluje kolineace. Zborcená involuce je tedy kolineace.

Jsou-li osy a, b imaginární, nahradíme c veličinou ci , k veličinou ki a rovnice os jsou

$$(a) \quad \begin{aligned} z &= -ci, \\ y &= -kix; \end{aligned} \quad (b) \quad \begin{aligned} z &= ci, \\ y &= kix. \end{aligned} \quad (1')$$

Volíme-li za x_1, x_2 hodnoty komplexní sdružené, jsou body $(x_1; -kix_1; -ci)$, $(x_2; kix_2; ci)$ imaginární sdružené, veličina u je reálná, v ryze imaginární a sečna (3) opět reálná. Transformační formule (4) jsou opět reálné

$$x' = \frac{c}{k} \cdot \frac{y}{z}, \quad y' = -ck \frac{x}{z}, \quad z = -\frac{c^2}{z} \quad (4')$$

Reálnému bodu v konečnu odpovídá opět reálný bod. Bodům nevlastním odpovídají body roviny $z = 0$. Body obou os a, b jsou samodružné. Sečny odpovídají samy sobě; na každé je involuce sdružených bodů a její dvojné body jsou průsečíky s osami. Rovina protíná přidruženou rovinu v sečně s , jež je tedy osou involučního svazku rovin; samodružné roviny jsou (as) , (bs) .

Tato zborcená eliptická involuce může sloužiti jako reálný representant imaginární přímky druhého druhu ve spojení se směrem bodové involuce na sečnách. Skutečně, volíme-li jistý směr involuce na jedné sečně p , je určen směr i na libovolné jiné sečně q . Je-li r další sečna mimoběžná s p i q , pak r je osa svazku rovin, které jsou si přiřaděny ve zborcené involuci a je perspektivní s p i q . Směrem pohybu na p je tedy určen i směr pohybu na q .

Ještě jest možný jiný způsob určení přímky druhého druhu, poněkud jednodušší a prakticky velmi výhodný. Tři mimoběžné sečny p, q, r mimoběžek a, b určují přímkovou plochu druhého stupně. Bodem M na r jde jediná příčka, která seče p, q (průsečnice rovin (pM) , (qM)). Všechny takové příčky $m, n, v, \dots$ jsou navzájem mimoběžné (neboť jinak by se protínaly i p, q, r) a tvoří jeden systém čili regulus uvedené plochy, jemuž patří i a, b . Podobně ovšem

tři přímky tohoto systému vedou opět k druhé soustavě přímek, která obsahuje p, q, r a jen sečny kongruence (a, b) . To je doplňkový regulus prvního a oba leží na ploše druhého stupně, jež je jednodílný hyperboloid nebo hyperbolický paraboloid.*) Každá z takových ploch, jejichž přímky jsou obsaženy v kongruenci, má tedy dva systémy přímek: jeden je tvořen sečnami, z nichž každá zborcenou involucí přechází sama v sebe, druhá je tvořena přímkami, jež jsou si involučně přiřazeny. Na př. m' přejde v m'' , n' v n'' atd., při tom průsečíky (pm') , (pm'') nebo (pn') , (pn'') si odpovídají v involuci na p . Říkáme, že tyto povrchové přímky tvoří involuci $m'm'', n'n'', \dots$ v příslušné osnově. Osy a, b jsou dvojné elementy této involuce.

Z toho je zřejmé, že každá přímková plocha určená třemi mimoběžnými sečnami p, q, r může sloužit k určení imaginární přímky druhého druhu. Třeba jen stanoviti smysl involuce na jedné a tím ovšem na všech sečnách a v celé osnově přímkové. Na př. lze psáti

$$x = \begin{pmatrix} m' & n' \\ m'' & n'' \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} n' & m' \\ n'' & m'' \end{pmatrix}.$$

Poznámky a ovlčení. 1. Zjistěte, je-li následující imaginární přímka (daná dvěma rovnicemi) prvního nebo druhého druhu. (Stanovte průsečík s přímkou sdruženou)

a) $x + (3 + 2i)y + (1 - 3i)z - 2 + i = 0, (1 + 2i)x + 5iy - (1 + 3i)z + 3 + 3i = 0;$

b) $(5 - i)x - y + (2 + i)z + 1 = 0, (1 - 4i)x - iy - (1 + 4i)z - 8i = 0.$

2. Dokažte: a) Přímka reálná a přímka imaginární druhého druhu jsou incidentní, je-li první sečnou příslušné kongruence.

b) Přímka imaginární druhého druhu p a přímka prvního druhu q se protínají v bodě X . Reálná rovina α přímky q obsa-

*) To jsou plochy, jejichž rovnice při vhodné volbě pravoúhlých souřadnic lze uvést na tvar $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$

resp. $2z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}.$

huje sečnu s kongruence určené prvou přímkou. Involuce na s určené zborcenou involucí a přímkou q jsou identické.

c) Protínají-li se dvě imaginární přímky druhého druhu p, q , protínají se i přímky sdružené p', q' . Společný bod $X = (p, q)$ a sdružený $X' = (p', q')$ leží na paprsku x společném oběma kongruencím $(p, p'), (q, q')$. Právě tak roviny $(p, q), (p', q')$ jsou imaginární sdružené a protínají se v druhé reálné přímce společné oběma kongruencím.

3. Necht' v rovinicích (1') jest $k = 1$. Ukažte, je-li přímka p v kongruenci, že jsou v ní všechny přímky, které z ní povstanou rotací kolem osy z (rotační kongruence). Tyto přímky vyplní rotační hyperboloid. Je tedy v kongruenci celý svazek rotačních hyperboloidů.

4. Dány jsou v prostoru čtyři reálné mimoběžky p, q, r, s . Sestrojte příčky, které protínají všechny čtyři. Jsou buď reálné různé, reálné splývající, nebo imaginární druhého druhu. [p, q, r určí hyperboloid, s jej protíná ve dvou bodech X, Y a přímky druhé soustavy hyperboloidu jdoucí těmito body jsou hledané příčky.]

5. Sestrojte rovinu danou: a) Reálným bodem A a dvěma imaginárními B, C , jež jsou dány involucemi na nositelkách b, c ; poslední dvě přímky jsou mimoběžné. [Roviny $(Ab), (Ac)$ se protínají v přímce m , jež dává M' na b , M'' na c ; nahraďte obě involuce harmonickými čtveřinami s bodem M' , příp. s M'' .] b) Třemi imaginárními body A, B, C , jichž nositelky a, b, c jsou mimoběžné.

6. Sestrojte průsečík tří rovin α, β, γ , je-li a) α reálné, β, γ imaginární (nesdružené); b) všechny tři imaginární.

12. Jiné imaginární útvary v prostoru.

a) Minimální neboli isotropické přímky.

Každá plocha druhého stupně protíná nevlastní rovinu v kuželosečce. Abychom našli průsek kulové plochy

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2 \quad (1)$$

s nevlastní rovinou, zavedme homogenní souřadnice, píšíce

$\frac{x}{t}, \frac{y}{t}, \frac{z}{t}$ místo x, y, z . Dostaneme

$$(x - x_0 t)^2 + (y - y_0 t)^2 + (z - z_0 t)^2 = r^2 t^2. \quad (1')$$

Body nevlastní přísluší hodnotě $t = 0$; dostaneme tedy pro nevlastní body kulové plochy rovnice

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0, \quad t = 0. \quad (2)$$

To jsou rovnice kuželosečky, ve které protínají nevlastní rovinu všechny kulové plochy, neboť její rovnice nezávisí ani na souřadnicích středu x_0, y_0, z_0 , ani na poloměru r . Říkáme jí absolutní kružnice nebo kružnice v nekonečnu. Všechny kulové plochy procházejí absolutní kružnicí.

Prvá rovnice (2) se může považovati za rovnici koule o středu $O(0; 0; 0)$ a poloměru $r = 0$, nebo za rovnici kužele s vrcholem O , který prochází absolutní kružnicí. Pošineme-li vrchol do bodu $S(x_0; y_0; z_0)$, zní rovnice tohoto kužele

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = 0. \quad (3)$$

Přímky protínající absolutní kružnici slují minimální, nebo isotropické přímky. Rovnice (3) vyjadřuje jejich vlastnost: Vzdálenost dvou bodů na minimální přímce se rovná nule.

Bodem v prostoru jde kužel minimálních přímek. Je-li ϱ proměnný parametr, lze napsati rovnice minimální přímky bodem $(x_0; y_0; z_0)$ ve tvaru

$$x = x_0 + \varrho \cdot a, \quad y = y_0 + \varrho \cdot b, \quad z = z_0 + \varrho \cdot c, \quad (4)$$

při čemž musí býti

$$a^2 + b^2 + c^2 = 0.$$

Podobně jako kuželosečka v rovině určuje polární soustavu, pro kterou je řídící křivkou, definuje kužel $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ určitý polární systém. Bodu $S(x_0; y_0; z_0)$ patří polární rovina

$$xx_0 + yy_0 + zz_0 = 0, \quad (5)$$

jež je kolmá k přímce OS . Můžeme také říci, že (5) je polára nevlastního bodu přímky OS k absolutní kružnici. Kolmost

se jeví tedy jako polarita k absolutní kružnici. Přímka a rovina jsou kolmé, jsou-li nevlastní jejich prvky pól a polára absolutní kružnice. Dvě přímky jsou kolmé, když jejich nevlastní body jsou polárně podle ní sdruženy (jeden leží na poláře druhého).

Že přímky OS a OP , kde $P(x; y; z)$ je libovolný bod, jsou kolmé, vyjádříme větou Pythagorovou $\overline{PS}^2 = \overline{OS}^2 + \overline{OP}^2$, nebo v souřadnicích

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + x_0^2 + y_0^2 + z_0^2;$$

tato rovnice po úpravě dává hořejší podmínku (5):

$$xx_0 + yy_0 + zz_0 = 0.$$

Podle toho isotropická přímka, povrchová přímka isotropického kužele, je kolmá sama k sobě. Tečná rovina tohoto kužele je kolmá k příslušné povrchové přímce, která v ní leží. Tyto tečné roviny slují roviny isotropické (také minimální). Isotropická rovina, která jde počátkem, má rovnici

$$ux + vy + wz = 0,$$

kde platí

$$u^2 + v^2 + w^2 = 0.$$

Zde se jeví začátečníku jistě trochu paradoxní: Přímka sama k sobě kolmá a o délce nula! Ve starší literatuře (S. Lie) setkáváme se proto s názvem „verrückte Geraden“ (bláznivé přímky); u téhož autora se však také již objevuje název minimální přímky, který má své odůvodnění v teorii ploch. U francouzských autorů se ujal název isotropické přímky, který chce vyjádřiti, že při otáčení kolem bodu v rovině dvě z těchto přímek (právě ty, které leží v rovině a jdou středem otáčení) zůstávají nehybné.

Je zásluhou francouzské školy, že do geometrie zavedla kruhové body v rovině a absolutní kružnici v prostoru, že ukázala, že lze s nimi pracovati jako s reálnými útvary. Skutečně nám dovoluje jejich použití dosíci krásných geo-

metrických výsledků velmi lehce, výsledků velmi obecných, z kterých rázem dostaneme četné věty speciální.

Pro vzájemný vztah metrické a projektivní geometrie a pro pochopení geometrie neeuclidovské mají tyto poznatky význam fundamentální.

b) Reálná kulová plocha $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ obsahuje dvě soustavy přímek. Píšeme-li její rovnici ve tvaru

$$(x + iy)(x - iy) = (r + z)(r - z), \quad (1)$$

jeví se nám jako výsledek vyloučení veličiny α z rovnice

$$x + iy = \alpha(r - z), \quad \alpha(x - iy) = r + z, \quad (2)$$

nebo jako výsledek vyloučení veličiny $-\beta$ z rovnice

$$-\beta(x - iy) = r - z, \quad x + iy = -\beta(r + z). \quad (3)$$

Při konstantním α znamenají rovnice (2) dvě roviny, tedy přímku, při proměnném α značí soustavu přímek. Právě tak rovnice (3) vyjadřuje při proměnném β druhý systém přímek. Přímky téže osnovy (parametry α_1, α_2) jsou vždy mimoběžné, jedna přímka první osnovy a jedna druhé osnovy se vždy protínají v reálném bodě plochy.

Ostatně z hořejších rovnic plyne

$$x = r \cdot \frac{1 - \alpha\beta}{\alpha - \beta}, \quad y = r \frac{i(1 + \alpha\beta)}{\alpha - \beta}, \quad z = r \frac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta}; \quad (4)$$

souřadnice bodu na ploše jsou vyjádřeny jako funkce dvou parametrů α, β . Je-li α konstantní, jsou x, y, z lineární funkce jednoho parametru a tedy bod proběhne přímkou jedné osnovy; podobně při konstantním β proběhne bod přímkou druhé osnovy. Aby bod byl reálný, musí být α a $-\frac{1}{\beta}$ komplexní sdružené. Skutečně při $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2$,

$\beta = -\frac{1}{\alpha_1 - i\alpha_2}$ dají (4) reálné hodnoty. Přímky na reálné

kulové ploše jsou vesměs imaginární prvního druhu. Ostatně se snadno přesvědčíme, že průsek tečné roviny s plochou jsou

dvě imaginární přímky. Na př. tečná rovina bodu $(0; 0; r)$ jest $z = r$; dosadíme-li do (1), dostaneme $x^2 + y^2 = 0$ čili $(x + iy)(x - iy) = 0$. Všechny přímky kulové plochy protínají absolutní kružnici, jsou to tedy přímky minimální.

c) Imaginární kulová plocha daná rovnicí

$$x^2 + y^2 + z^2 + r^2 = 0$$

nemá žádného reálného bodu. Reálný však je polární systém jí definovaný. Reálnému bodu $P(x_0; y_0; z_0)$ patří reálná polární rovina

$$xx_0 + yy_0 + zz_0 + r^2 = 0.$$

Presvědčíme se snadno, že tomu tak je i obráceně.

Vezmeme-li opět reálnou kulovou plochu

$$x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0$$

za reálnou zástupkyni imaginární plochy, vidíme, že polární rovina bodu P vzhledem k ní, t. j.

$$xx_0 + yy_0 + zz_0 - r^2 = 0,$$

je podle středu O symetricky položená s prvou. Polarita k imaginární kulové ploše (antipolarita reálné) je tedy složena z polarity k reálné zástupkyni a středové symetrie.

Na takové kulové ploše jsou jen imaginární přímky druhého druhu. Lze je napsati

$$\begin{aligned} x + iy &= \alpha(z + ri), & x + iy &= \beta(z - ri), \\ x - iy &= -\frac{1}{\alpha}(z - ri), & x - iy &= -\frac{1}{\beta}(z + ri). \end{aligned}$$

d) Podobně imaginární elipsoid je dán rovnicí

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0.$$

Nemá reálného bodu a obsahuje dva systémy imaginárních přímek druhého druhu. Polární systém je reálný podobně jako u imaginární kulové plochy.

e) Reálná plocha kuželová druhého stupně o vrcholu v počátku má rovnici tvaru

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0, \quad (a > b > c);$$

rovina $z = \text{konst}$ ji seče v elipse (na př. $z = c$ dává elipsu s poloosami a, b). Obecný průsek je kuželosečka. Kdy dostaneme průsek kruhový? Kružnice je kuželosečka, která prochází kruhovými body v nekonečnu ve své rovině. Ale kuželosečka v nekonečnu na kuželi a absolutní kružnice mají společné čtyři body. Ty mají 6 spojnic, ale jenom dvě z nich jsou reálné, totiž ty, které spojují vždy dva a dva sdružené body. Jsou tedy dvě osnovy kruhových průseků. Daný kužel a kužel isotropický o společném vrcholu $O(0; 0; 0)$ určují svazek kuželů

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - \lambda(x^2 + y^2 + z^2) = 0.$$

Trojím způsobem lze voliti λ , aby se kužel rozpadl ve dvojici rovin; pro $\lambda = \frac{1}{a^2}$ je taková dvojice reálná a lze ji napsati

$$z^2 \left(\frac{1}{c^2} + \frac{1}{a^2} \right) - \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2} \right) y^2 = 0.$$

Při $a = b$ splynou obě osnovy; v tomto případě plocha je rotační plochou kuželovou. Stopa rotační kuželové plochy na rovině nevlastní je tedy kuželosečka, která má s absolutní kružnicí dotyk ve dvou bodech. (Osou plochy — osou z — jdou dvě isotropické roviny, které se dotýkají kuželové plochy podél isotropických přímek v rovině $z = 0$.)

Ostatně snadno poznáme, že každá rotační plocha druhého stupně má v nevlastní rovině kuželosečku, která se dvakrát dotýká absolutní kružnice v kruhových bodech roviny kolmé k ose. Rotační válec má v nevlastní rovině dvojtinu přímek, které jsou tečnami absolutní kružnice.

f) Hyperboloid jednodílný

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

obsahuje dvě soustavy reálných přímek, jak ukazuje rozklad

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) = \left(1 - \frac{y}{b}\right)\left(1 + \frac{y}{b}\right);$$

odtud dostaneme totiž soustavy přímek

$$\frac{x}{a} + \frac{z}{c} = \alpha \left(1 - \frac{y}{b}\right), \quad \left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = \beta \left(1 + \frac{y}{b}\right),$$

$$\frac{x}{a} - \frac{z}{c} = \frac{1}{\alpha} \left(1 + \frac{y}{b}\right); \quad \frac{x}{a} - \frac{z}{c} = \frac{1}{\beta} \left(1 - \frac{y}{b}\right)$$

pro α, β reálné jsou přímky reálné. Volíme-li α, β komplexní, dostaneme přímky imaginární druhého druhu.

g) Buď dána elipsa e v rovině $z = 0$ o poloosách a, b ($a > b$), tedy rovnicemi

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad z = 0. \quad (1)$$

Každou tečnou této elipsy procházejí dvě isotropické roviny a všechny obalují plochu (imaginární), která je symetrická podle všech rovin $x = 0, y = 0, z = 0$. Proto v každé této rovině je dvojná křivka, t. j. taková, že každou tečnou jdou dvě vytvářející roviny. V $z = 0$ je to daná elipsa e ; ukážeme, že v $y = 0$ je také reálná dvojná křivka, hyperbola h .

Napišme podmínku, aby isotropická rovina

$$ux + vy + wz + 1 = 0, \quad (u^2 + v^2 + w^2 = 0) \quad (2)$$

se dotýkala elipsy e . Tato podmínka vychází ve tvaru

$$a^2u^2 + b^2v^2 = 1,$$

nebo, dosadíme-li $v^2 = -(u^2 + w^2)$, ve tvaru

$$e^2 u^2 - b^2 w^2 = 1, \quad (e^2 = a^2 - b^2).$$

Průsečnice roviny (2) s $y = 0$ jest $ux + wz + 1 = 0$, čili

$$ux + \frac{\sqrt{e^2 u^2 - 1}}{b} z + 1 = 0. \quad (3)$$

Bodem v rovině $y = 0$ procházejí dvě přímky (3), neboť při pevném x a z dostáváme pro u kvadratickou rovnici

$$u^2 (b^2 x^2 - e^2 z^2) + 2b^2 ux + b^2 + z^2 = 0. \quad (4)$$

Tyto přímky obalují křivku, jejímž bodem jdou dvě přímky splývající. Položíme-li proto diskriminant rovnice (4) rovný nule, dostaneme rovnici obálky

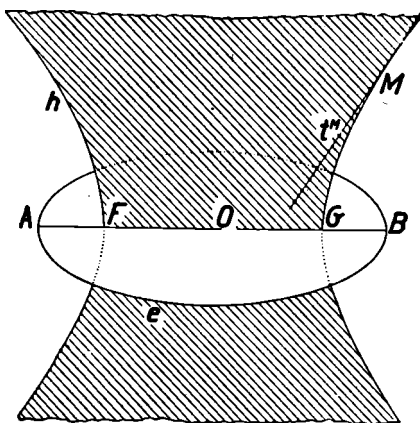
$$\frac{x^2}{e^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1;$$

je to hyperbola h v rovině $y = 0$. Vrcholy reálné osy jsou v ohniskách elipsy e , ohniska její jsou ve vrcholech elipsy, neboť $e^2 + b^2 = a^2$.

V rovině $x = 0$ dostaneme jako dvojnou křivku imaginární elipsu.

Má tedy uvažovaná plocha, obalená isotropickými rovinami, celkem čtyři dvojné kuželosečky, a to dvě reálné e , h a dvě imaginární, jednu v $x = 0$ a druhou absolutní kružnici v nekonečnu. Tyto čtyři kuželosečky hrají důležitou úlohu v teorii konfokálních ploch druhého stupně a ještě i jiných geometrických útvarů (Dupinovy cyklidy). Ukážeme jen jednu vlastnost, kterou lze též velmi snadno dokázati elementárně bez použití imaginárních útvarů. Buď M libovolný bod na h a sestrojme kuželovou plochu, která má vrchol M a prochází elipsou e . Tečnou t_M jdou dvě tečné roviny ke kuželi, jež se dotýkají křivek h , e i absolutní kružnice a dotýkají se kužele M (e) i uvažované plochy isotropických rovin podél týchž dvou povrchových přímk.

Kuželová plocha M (e) se dotýká dvakrát absolutní kružnice a je tedy rotační. Hyperbola h je geometrické místo vrcholu rotační kuželové plochy, která prochází



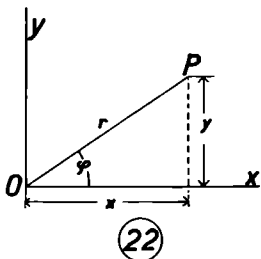
(21)

elipsou e a obráceně e je geometrické místo vrcholu rotační kuželové plochy, která jde hyperbolou h . Vzájemnou polohu křivek e a h v prostoru znázorňuje obr. 21.

DODATEK.

Gaussova rovina.

Reálné body na přímce lze přiřaditi reálným číslům — říkáme, že množství reálných bodů na přímce je jednorozměrné. Naproti tomu množství imaginárních bodů na přímce je dvourozměrné, neboť tyto body jsou přiřazeny číslům komplexním, kde reálná i imaginární část mohou nezávisle na sobě proběhnouti všechna čísla reálná. Chceme-li „zobraziti“ toto množství na reálný útvar tak, aby imaginárnímu bodu na přímce odpovídal reálný bod tohoto útvaru, musíme vzíti útvar dvourozměrný; tedy rovinu nebo jinou plochu. Nejjednodušší je zobrazení na rovinu, nebo na kulovou plochu. Všimněme si jen zobrazení na rovinu.



Volme v rovině k sobě kolmé osy x, y s počátkem O (obr. 22) a považujeme bod $P(x; y)$ za obraz komplexního čísla $z = x + iy$. Body na ose x jsou obrazy reálných čísel, body na ose y obrazy čísel ryze imaginárních. Tímto způsobem jsou imaginární body přímky (s komplexními souřadnicemi) zobrazeny na reálné body roviny. Při tom

nutno se vystríhati představy, že imaginární body přímky vyplňují rovinu. Zde jde o pouhé „zobrazení“, ovšem zobrazení velmi zajímavé, neboť operacím s imaginárními elementy na přímce odpovídají reálné operace v rovině, již zoveme pak Gaussovou (někde též Cauchyovou rovinou).

Vedle souřadnic pravoúhlých s výhodou se používá i polárních. Bodu z patří vektor $\overrightarrow{OP}$, jehož absolutní délku r zoveme modul čísla z a úhel $\varphi = (\hat{x}, \overrightarrow{OP})$, jež zoveme

amplituda čísla z . Amplituda je úhel, který vznikne otočením kladné části osy x do vektoru $\overrightarrow{OP}$. Podle toho jest $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$ a .

$$z = x + iy = r (\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Všimněme si, jak se základní početní výkony s čísly komplexními jeví v našem zobrazení. Buďte dána čísla $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ a jim at' přísluší body P_1, P_2 (obr. 23). Součet jest

$$\begin{aligned} z &= z_1 + z_2 = \\ &= (x_1 + x_2) + i (y_1 + y_2). \quad (1) \end{aligned}$$

Bod, který odpovídá tomuto součtu, dostaneme velmi jednoduše jak z obrázku patrně, doplníme-li trojúhelník P_1OP_2 na rovnoběžník vrcholem Q , čili přičteme-li k vektoru $\overrightarrow{OP_1}$ vektor $\overrightarrow{OP_2}$ ($\overrightarrow{P_1Q} \parallel \overrightarrow{OP_2}$).

Jde-li o rozdíl

$$z = z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i (y_1 - y_2), \quad (2)$$

jest třeba k vektoru $\overrightarrow{OP_1}$ připojiti vektor $-\overrightarrow{OP_2}$. Modul se pak rovná délce $\overline{P_2P_1}$.

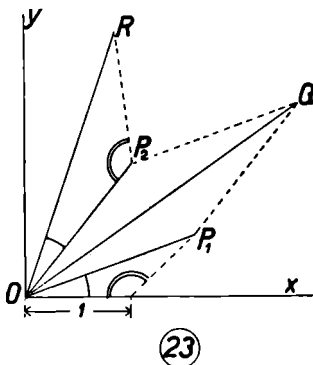
Chceme-li zobraziti součin čísel z_1, z_2 , pišme je raději ve tvaru polárním

$$z_1 = r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1), \quad z_2 = r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$$

a dostaneme

$$\begin{aligned} z = z_1 \cdot z_2 &= r_1 \cdot r_2 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) = \\ &= r_1 \cdot r_2 \cdot [\cos (\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin (\varphi_1 + \varphi_2)]. \end{aligned} \quad (3)$$

Toto pravidlo, zvané Moivreova poučka, znamená, že při násobení modul součinu se rovná součinu modulů,



amplituda součinu se rovná součtu amplitud. V obraze 23 odpovídá součinu bod R , při tom $\overline{OR} = r_1 \cdot r_2$, úhel $(x, \overline{OR}) = \varphi_1 + \varphi_2$. Konstrukci lze takto zařídit: Na osu x nanese $\overline{OI} = 1$ a sestrojme $\triangle OP_2R \sim \triangle OIP_1$. Pak jest $\overline{OR} : \overline{OP}_2 = \overline{OP}_1 : \overline{OI}$, tedy $\overline{OR} = r_1 \cdot r_2$.

Je-li jedno z čísel reálné (máme tedy součin $z = kz$, kde k je reálné), násobí se pouze modul; je-li modul obou čísel rovný jedné, jsou body P_1, P_2, R na kružnici a pouze amplitudy se sčítají.

Pro dělení jest podobně

$$z = \frac{r_1}{r_2} [\cos (\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin (\varphi_1 - \varphi_2)]; \quad (4)$$

obrázek něcht' si čtenář laskavě pořídí sám.

Uvažovali jsme (odst. 2, str. 16) korespondenci mezi body na přímce zvanou involuci a zmínili jsme se o obecnější korespondenci, zvané projektivnost, která byla dána obecnou bilineární rovnicí. Při tom jsme předpokládali, že koeficienty rovnice jsou reálné a také uvažované body jsme předpokládali reálné. Tento předpoklad může zde odpadnouti. Mějme obecnou bilineární rovnici

$$azz' + bz + cz' + d = 0, \quad (5)$$

kde koeficienty jsou komplexní čísla a také z, z' . Jí je definována bodová příbuznost v Gaussově rovině, která je obrazem projektivnosti mezi imaginárními body na přímce. Sledujme nejprve zvláštní případy.

$$a) \quad z' = z + a, \quad (6)$$

kde $a = a_1 + ia_2$. Bodu $P(z)$ je přiřazen $P'(z')$, který dostaneme z P posunutím o vektor $\overline{OA}$, kde A odpovídá číslu a . Příbuznost uvažovaná je tedy posunutí čili translace.

$$b) \quad z' = bz; \quad (7)$$

je-li b reálné nemění se amplituda bodu $P(z)$, ale modul je

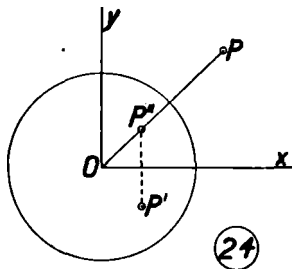
násoben číslem b . Pole (z) a pole (z') jsou stejnohlé podle středu O . Je-li b komplexní, a to $b = \varrho (\cos \beta + i \sin \beta)$, znamená naše transformace otočení o úhel β a homotetii s poměrem ϱ , tedy dvě transformace po sobě provedené.

$$c) \quad zz' = 1, \text{ čili } z' = \frac{1}{z}, \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \text{jinak} \quad r' (\cos \varphi' + i \sin \varphi') &= \frac{1}{r (\cos \varphi + i \sin \varphi)} = \\ &= \frac{1}{r} (\cos \varphi - i \sin \varphi). \end{aligned}$$

Bodu $P(r; \varphi)$ je přiřazen bod $P'(r' = \frac{1}{r}, -\varphi)$. Tuto transformaci lze složit i také ze dvou. Nejprve bodu P (obr. 24) přiřadíme P'' na paprsku OP tak, aby $\overline{OP} \cdot \overline{OP''} = 1$, pak sestrojíme bod P' symetrický k bodu P'' podle osy x . Prvá transformace sluje kruhová inverse. Uvažovaná transformace je tedy složena z kruhové inverse a symetrie podle osy x .

Kruhová inverse není však transformace lineární, která přiřazuje přímce přímku, nýbrž kvadratická; přímce odpovídá kružnice. To lze nejlépe sledovati, přejdeme-li k pravoúhlým souřadnicím. Jest



$$z' = x' + iy' = \frac{1}{z} = \frac{1}{x + iy} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2},$$

a rozvedeme-li

$$x' = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad y' = -\frac{y}{x^2 + y^2}.$$

Pišme rovnici kružnice

$$A(x'^2 + y'^2) + 2Bx' + 2Cy' + D = 0$$

a dosadíme; dostaneme po úpravě

$$D(x^2 + y^2) + 2Bx - 2Cy + A = 0.$$

Charakteristické pro tuto transformaci je tedy, že kružnice přechází v kružnici a přímka ($A = 0$) také v kružnici, která jde počátkem O a naopak. Do podrobností této transformace se nebudeme pouštět.

Vraťme se opět k původní obecné transformaci (5) a ukažme, že ji lze postupně složit z transformací jednodušších právě uvedených. Skutečně jde z rovnice (5)

$$z' = \frac{-bz - d}{az + c} = -\frac{b}{a} - \frac{\frac{ad - bc}{a}}{az + c};$$

položme

$$z'' = az, \quad z''' = z'' + c, \quad z^{\text{IV}} = \frac{1}{z''}$$

$$z^{\text{V}} = \frac{ad - bc}{a} z^{\text{IV}}, \quad z' = -\frac{b}{a} - z^{\text{V}}$$

a vidíme, že obecná hořejší transformace se skládá z řady postupných transformací, jež jsou vesměs pošunutí, otočení, podobnost a inverse (pokud $ad - bc \geq 0$), tedy vesměs z transformací, jež kružnici převádějí v kružnici. Definuje tedy rovnice (5) v rovině Gaussově obecnou kruhovou transformaci.

Všimněme si ještě podrobněji případu, kdy rovnice (5) je symetrická podle z, z' , t. j. kdy má tvar

$$azz' + b(z + z') + d = 0. \quad (9)$$

Jde o involuci. Roste-li reálná i imaginární část, tedy i modul do nekonečna, mluvíme o komplexním bodu v nekonečnu. Pro $z' \rightarrow \infty$ dostaneme z rovnice (9) $z = -\frac{b}{a}$.

Tento bod sluje střed involuce. Dvojné či samodružné elementy dostaneme, položíme-li $z = z'$, tedy z rovnice

$$az^2 + 2bz + d = 0.$$

Omezme se pouze na případ, kdy tato rovnice má dva různé kořeny; tedy jsou v rovině dva dvojné body. Podle předešlého výkladu, pohybuje-li se bod $P(z)$ po přímce Gaussovy roviny, pohybuje se $P'(z')$ po kružnici, která jde středem involuce (střed involuce odpovídá nevlastnímu bodu přímky), opíše-li $P(z)$ kružnici, opíše $P'(z')$ také kružnici; prochází-li prvá kružnice dvojnými body, jde jimi i druhá.

Pojem dvojpoměr, zavedený v odst. 1, můžeme rozšířit také na komplexní čísla; potom nazýváme dvojpoměrem čtyř bodů v Gaussově rovině výraz

$$(P_1 P_2 P_3 P_4) = \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} : \frac{z_1 - z_4}{z_2 - z_4}.$$

Modul tohoto výrazu má jednoduchý geometrický význam. Je to dvojpoměr délek $\frac{\overline{P_1 P_3}}{\overline{P_2 P_3}} : \frac{\overline{P_1 P_4}}{\overline{P_2 P_4}}$. Podíl $\frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3}$ má amplitudu rovnou rozdílu úhlů, jež délky $P_1 P_3, P_2 P_3$ svírají s osou x ; rovná se tedy úhlu $(P_1 P_3, \widehat{P_2 P_3})$ a amplituda dvojpoměru uvedeného, jest rovna rozdílu úhlů $(P_1 P_3, \widehat{P_2 P_3})$ a $(P_1 P_4, \widehat{P_2 P_4})$. Uvedený dvojpoměr je reálný, je-li amplituda rovna nule, nebo násobku úhlu přímého a to jest, když čtyři dané body jsou na přímce nebo na kružnici.

Jednorozměrné množství imaginárních bodů na přímce, z nichž každé čtyři mají reálný dvojpoměr, sluje podle Staudta řetěz. Obrazem takového řetězu v Gaussově rovině je tedy přímka neb kružnice (srov. úlohu 4, str. 36).

Poznámky a cvičení. 1. Necht' obecná transformace (5) má dvojné body α, β . Pak ji lze upravit na tvar

$$\frac{z' - \alpha}{z' - \beta} = k \frac{z - \alpha}{z - \beta};$$

k má význam dvojpoměru ($\alpha\beta zz'$). Je-li k reálné, pak vždy dva přidružené body s oběma dvojnými jsou na kružnici.

2. Kdy je předešlá transformace involuční? ($k = -1$). Pak jsou přidružené body z, z' s dvojnými na kružnici, jež odpovídá sama sobě. Prorýsujte případ $\alpha = +i, \beta = -i$. Sestrojte kružnici, jež odpovídá přímce v obecné poloze, přímce středem involuce, kružnici v obecné poloze a kružnici jdoucí dvojným bodem. (Vyjádřete příslušnou transformaci nejdříve analyticky.)

3. Proberte podobně transformaci $z' = az + b$ (a i b komplexní). Kde jsou dvojné body? (Jeden v nekonečnu.)

4. Stanovte dvojné body transformací a) $z' = z + b$ (oba v nekonečnu); b) $\frac{1}{z' - \alpha} = \frac{1}{z - \alpha} + k$ (splývají v bodě α).

5. Kdybychom chtěli „zobrazit“ imaginární body v rovině na jiný geometrický útvar tak, aby bodu imaginárnímu v rovině odpovídal reálný bod tohoto útvaru, musel by tento útvar býti čtyřrozměrný. Chceme-li se vyhnouti operacím v prostoru čtyřrozměrném a zůstatí pouze v rovině, pak můžeme použítí následující myšlenky, jež byla již naznačena v úloze 3 str. 40. Jsou-li X, Y dva imaginární sdružené body na nositeli p , spojme je s kruhovými body roviny I_1, I_2 ; přímky XI_1, YI_2 se protínají v reálném bodě P, XI_2, YI_1 v reálném bodě Q a tato dvojice může sloužit jako obraz dvojice X, Y . Dvojice imaginárních sdružených bodů X, Y je takto zobrazena na dvojici reálných bodů P, Q . Jako je možno na přímce jednomu směru přiřaditi jeden, druhému druhý ze dvou imag. sdružených bodů, je možno i zde vhodnou úmluvou dosíci toho, že úsečka PQ je orientována a že počáteční bod patří prvému, koncový druhému z obou bodů. Do těchto podrobností nemůžeme zacházeti, ale všimněme si, že s jistou křivkou v rovině, jež obsahuje dvourozměrné množství imaginárních bodů, je pak spojena bodová příbuznost v rovině, jež bodu P přiřazuje bod Q . Nejjednodušší případ je reálná přímka. Volme jí za osu x . Dva sdružené body na ní jsou $(x_1 + ix_2; 0), (x_1 - ix_2; 0)$. Isotropické přímky jimi vedené se protínají v bodech $(x_1; x_2), (x_1; -x_2)$, tedy v bodech symetricky položených podle osy x . Obrazem dvojn. imag. sdružených bodů na přímce je tedy souhrn dvojic souměrně sdružených bodů podle této přímky. Buď dána reálná kružnice $x^2 + y^2 - r^2 = 0$. Spojnice dvou imaginárních sdružených bodů kružnice je přímka, která od středu má vzdálenost větší poloměru. Buď taková $x = \xi$ ($\xi > r$). Tato protíná kružnici

v bodech $X(\xi; i\sqrt{\xi^2 - r^2})$; $Y(\xi; -i\sqrt{\xi^2 - r^2})$. Reálné obrazy těchto bodů jsou $P(\xi + \sqrt{\xi^2 - r^2}; 0)$, $Q(\xi - \sqrt{\xi^2 - r^2}; 0)$ na ose $y = 0$. Jest ihned patrné, že $\overline{OP} \cdot \overline{OQ} = r^2$. Bodová příbuznost, jež je obrazem dvojice imaginárních bodů, je zde kruhová inverse.*)

Vyjádřete vztah mezi body P, Q , jde-li o zobrazení imaginárních bodů těchto útvarů: a) přímky $y = i$ (symetrie a posunutí), b) $y = 2iz$ (symetrie a podobnost), c) $y = iz$ (výjimečný případ!, všechny úsečky PQ mají společný jeden koncový bod), d) kružnice $x^2 + y^2 + 1 = 0$.

*) O tomto způsobu zobrazení najde čtenář v díle E. Study, Vorlesungen über ausgewählte Gegenstände der Geometrie, jež však předpokládá čtenáře značně vyspělého, a také v díle H. Beck, Koordinatengeometrie.

OBSAH.

	Str.
Úvod.....	4
1. Základní věty geometrie polohy v rovině.....	9
2. Imaginární body na reálné přímce	16
3. Imaginární přímka ve svazku	23
4. Involuce na kružnici	27
5. Imaginární elementy v rovině	33
6. Jednoduché konstrukce s imaginárními elementy	36
7. Jiné imaginární útvary v rovině	40
8. Elementy prostorové geometrie polohy	48
9. Některé věty o imaginárních elementech v prostoru...	49
10. Základní prostorové konstrukce s imaginárními ele- menty	52
11. Imaginární přímka druhého druhu	54
12. Jiné imaginární obrazce v prostoru.....	59
Dodatek	
Gaussova rovina	68

Kruh

SBÍRKA SPISŮ VYDÁVANA

JEDNOTOU ČESKÝCH MATEMATIKŮ A FYSIKŮ

1. Závěrka František, profesor university v Praze: Einsteinův princip relativnosti a teorie gravitační. 1925. 166 str. 10 obr. 16 K
2. Hostinský Bohuslav, profesor university v Brně: Geometrické pravděpodobnosti. 1926. 87 str. 11 K
3. Hlavatý Václav, profesor university v Praze: Úvod do neeuklidovské geometrie. 1926. 212 str. 32 obr. 30 K
4. Kössler Miloš, profesor university v Praze: Úvod do počtu diferenciálního. 1926. 147 str. 16 obr. 18,70 K
5. Bragg William, ředitel Royal Institution v Londýně: O povaze věcí. Přeložili A. Šimek, profesor university v Brně, a H. Šimková - Kadlcová. 1927. 134 str. 57 obr. 32 tab. 22,80 K
6. Batěk Alexander Sommer, profesor průmysl. školy v Praze: Chemické rovnice. Jak je psát, číst a jim rozumět. 1927. 139 str. 19,60 K
7. Rychlík Karel, profesor techniky v Praze: Úvod do elementární teorie číselné. 1931. 104 str. 1 obr. 22 K
8. Schneider Rudolf, profesor univ. a přednosta meteorologického ústavu v Praze: Předpovídání povětrnosti. 1928. 109 str. 26 obr. 1 tab. 18 K
9. Běhounek František, docent university v Praze, a Heyrovský Jaroslav, profesor university v Praze: Úvod do radioaktivity. 1931. 116 str. 59 obr. 24 K
10. Novák Vladimír J., docent university v Praze: Kolísání podnebí v dobách historických a geologických. 1933. 191 str. 9 obr. 36 K
11. Frank Philipp, univ. profesor v Praze: Rozvrat mechanické fyziky. Přel. F. Závěrka. 1937. 57 str. 12 K
12. Jarník Vojtěch, profesor university v Praze: Úvod do integrálního počtu. 1938. 168 str. 12 obr. 26,40 K

8°. Brož. Další svazky se připravují

Dodá každý knihkupec nebo přímo nakladatelství JČMF

KNIHOVNA

SPISŮ MATEMATICKÝCH A FYSIKÁLNÍCH

1. *Hostinský Bohuslav*, profesor české university v Brně: *Diferenciální geometrie křivek a ploch*. 2. vyd. v tisku.
- 2, 7. *Vojtěch Jan*, profesor techniky v Praze: *Základy matematiky* ke studiu věd přírodních a technických. Část první. 5. vyd. 1939. 419 str. 90 obr. 60 K. Část druhá. 4. vyd. 1931. VIII, 390 str. 40 obr. 60 K.
- 3, 4. *Novák Vladimír*, profesor techniky v Brně: *Fysika*. 3. pozm. a dopl. vyd. Díl I. Mechanika. Akustika. Nauka o teple. 1929. X, 544 str. 375 obr. 96 K. Díl II. Elektrina. Optika. 1932. XIV, 640 str. 513 obr. 116 K.
5. *Semerád Augustin*, profesor techniky v Brně: *Příručka praktické geometrie*. Díl I. a II. 1921. XV, 523 str. 303 obr. 4 tab. 72 K.
6. *Kučera Bohumil*, profesor české university Karlovy v Praze: *Základy mechaniky tuhých těles*. 1921. VIII, 296 str. 121 obr. 48 K.
8. *Bydžovský Bohumil*, profesor české university Karlovy v Praze: *Úvod do analytické geometrie*. 1923. IV, 412 str. 62 obr. 48 K.
9. *Hruška Václav*, profesor techniky v Praze: *Počet grafický*. 2. vyd. se připravuje.
10. *Dušl Karel*, profesor techniky v Praze: *Úvod do vektorového počtu*. 1923. VIII, 121 str. 21 obr. Kart. 19 K.

11. *Hostinský Bohuslav*, profesor české university v Brně: *Mechanika tuhých těles*. 1924. VIII, 286 str. 124 obr. 48 K.
12. *Posejpal Václav*, profesor české university Karlovy v Praze: *Roentgenovy X-paprsky*. 1925. VI, 154 str. 66 obr. 8 tab. 40 K.
13. *Macků Bedřich*, profesor české university v Brně: *Fysika*. 1928. IV, 528 str. 359 obr. 92 K.
14. *Bydžovský Bohumil*, profesor české university Karlovy v Praze: *Základy teorie determinantů a matic a jich užití*. 1930. IV, 212 str. 44 K.
15. *Láska Václav*, profesor české university Karlovy v Praze, a *Hruška Václav*, profesor techniky v Praze: *Teorie a praxe numerického počítání*. 1934. IV, 496 str. 7 příl. 42 obr. 112 K.
- 16, 17. *Kadeřávek František*, profesor techniky v Praze, *Klíma Josef*, profesor techniky v Brně, *Kounovský Josef*, profesor techniky v Praze, *Deskriptivní geometrie*. Učebnice pro vysoké školy. Díl I. 1930. IV, 420 str. 491 obr. 1 anaglyf, 1 brejle. 98 K. Díl II. 1932. 563 str. 388 obr. 128 K.
18. *Čech Eduard*, profesor české university v Brně: *Bodové množiny*. Část první. 1936. VIII, 275 str. 68 K.
19. *Nachtikal František*, profesor techniky v Praze: *Technická fysika*. 2. rozš. vyd. 1937. 776 str. 603 obr. 144 K.

Další svazky se připravují

Dodá každý knihkupec nebo nakladatelství

JEDNOTA

ČESKÝCH MATEMATIKŮ A FYSIKŮ, PRAHA II, ŽITNÁ 25

Prof. dr. Miloš Kössler

ÚVOD DO POČTU DIFERENCIÁLNÍHO

8° 147 str. 16 obr. 1926. Brož. K 18,70

Prof. Dr. Vojtěch Jarník

ÚVOD DO INTEGRÁLNÍHO POČTU

8° 168 str. 12 obr. 1938. Brož. K 26,40

Obě knížky se hodí velmi dobře i pro samostatné studium základů vyšší matematiky. — Kösslerův Úvod může čísti každý, kdo zná počátky algebry, goniometrie a analytické geometrie. Přes svou stručnost a elementární ráz vyhovuje všem požadavkům moderní přesnosti. Jeho pokračováním je Jarníkova knížka, zabývající se integrálním počtem, při němž se zásadně omezuje jen na reálná čísla. Cvičení jsou volena většinou jako bezprostřední aplikace výložné látky.

Obě knížky jsou nepostrádatelnou pomůckou pro všechny, kdož chtějí vniknouti do základů diferenciálního a integrálního počtu.

U každé knihkupce

JEDNOTA ČESKÝCH MATEMATIKŮ A FYSIKŮ

Praha II, Žitná 25

CESTA K VĚDĚNÍ

Sv. 1

Dr. S. Schwarz: O ROVNICÍCH.
Brož. K 14,—

Sv. 2

Doc. Dr. V. Petrůlka - Ing. Dr. J. B. Slavík: PIEZOELEKTRINA A JEJÍ POUŽITÍ V TECHNICKÉ PRAXI.
Brož. K 19,—

Sv. 3

Prof. Dr. D. Il'kovič: POLAROGRAFIE. Brož. K 25,—

Sv. 4

Prof. J. Holubář: O METHODÁCH ROVINNÝCH KONSTRUKCÍ (ÚLOHA APOLONIOVA). Brož. K 18,80

Sv. 5

Ing. Dr. J. Strnad: TECHNIKA ZVUKOVÉHO FILMU. Brož. K 25,—

Sv. 6

Doc. Dr. Frant. Línk: JAK POZNÁVÁ ASTROFYZIKA VESMÍR. Brož. K 17,—

Sv. 7

Prof. Dr. V. Hruška: KONSTRUKCE OMEZENÝMI PROSTŘEDKY A GEOM. APROXIMACE. Brož. K 10,80

Sv. 8

Dr. Arn. Okáč: VÝKLAD K ZÁKLADNÍM OPERACÍM V CHEMICKÉ ANALYSE.
Brož. K 29,40

Sv. 9

Prof. Dr. J. Sáhánek: VZNIK SVĚTLA V PLYNECH. Brož. K 20,40

Sv. 10

Prof. Dr. L. Seifert: IMAGINÁRNÍ ELEMENTY V GEOMETRII. Brož. K 14,40



SPOJNICOVÉ NOMOGRAMY

Dr. V. PLESKOT

Kolik praktických úloh dílenských, inženýrských nebo národohospodářských zůstalo a zůstává napsáno jen rovníci, které je nutno v jednotlivých případech pracně vyčíslovati! Nomogramy odstraňují tyto obtíže v mnohých případech a jsou tak vítanou pomůckou technické praxe a různých jiných polí, kde se aplikované matematiky užívá. Největší aplikaci z nomogramů mají pak nomogramy spojnicové pro jednoduchou a přesnou svou konstrukci. Dr. Václav Pleskot ukazuje ve své knížce na velké řadě příkladů vzatých přímo z praxe, jak se spojnicové nomogramy sestavují, a vycházejí z jednotlivých případů, které tedy dává denní život, seznamuje čtenáře s obtížemi a výhodami, které se při konstrukcích nomogramů vyskytují a nepozorovaně uvádí čtenáře do teorie nezbytné k dalšímu studiu a aplikacím.

Vyjde jako 12. svazek sbírky Cesta k vědění

JEDNOTA

ČESKÝCH MATEMATIKŮ A FYSIKŮ, PRAHA II, ŽITNÁ 25