Deset kapitol z diferenciálního a integrálního počtu

CESTA K VĚDĚNÍ

64

UŠA

Deset kapitol z diferenciálního a integrálního počtu

PŘÍRODOVĚDECKÉ
VYDAVATELSTVÍ

CESTA K VĚDĚNÍ

svazek

64

KAREL HRUŠA

Deset kapitol z diferenciálního a integrálního počtu

Přírodovědecké vydavatelství, Praha

1952

Obálku navrhl a graficky upravil M. Hrbas

PŘEDMLUVA

V naší veřejnosti je — snad vlivem způsobu, jímž se až dosud většinou vykládala matematika ve školách — zakořeněn názor, že matematika je jen jakousi snůškou vzorců a pravidel a že rozumět matematice znamená umět odhadnout, kterého z nich je třeba v dané situaci užít. Tato knížka na rozdíl od většiny malých příruček diferenciálního a integrálního počtu, jejichž cílem je na málo stránkách podat pokud možno hodně látky, ukazuje, že je to názor nesprávný. Cílem knížky není seznámit čtenáře s látkou diferenciálního a integrálního počtu v plné její šíři, nýbrž ukázat jen nejzákladnější výběr pojmů a method, jichž se v tomto oboru matematiky užívá, a dát čtenáři neskreslenou představu o tom, jak se v tomto úseku pracuje.

Většina matematických vět je správná jen za určitých předpokladů a právě těchto předpokladů si naše popularisační matematická literatura dosud poměrně málo všímala. V textu, který následuje, je důsledně dbáno toho, aby všecky věty byly vyslovovány s přesným zněním všech předpokladů, které podmiňují správnost vět, i když se to někdy zdánlivě děje za cenu těžkopádnosti po stránce formální. Důraz je kladen zejména na logickou stránku postupu, který je vždy volen tak, aby důkazy byly správné a úplné. Veškerá tvrzení v knížce obsažená jsou doprovázena přesnými důkazy; jen v úvodu není podrobně propracována theorie reálných čísel, která je sice jedním z pilířů, na nichž diferenciální a integrální počet spočívá, přesto však patří do jiného oboru matematiky. Čtenář, který bude hledati bližší poučení o těchto i jiných problémech, najde je v každé obšírnější učebnici diferenciálního a integrálního počtu.

Literatura je tu velmi bohatá; každý kulturní národ se jistě může pochlubit několika knihami o diferenciálním a integrálním počtu od obsáhlých několikasvazkových kompendií s účely čistě vědeckými až po řadu tenkých příruček určených zejména pro praxi. Bylo by proto velmi obtížné chtít podat byť i kusý přehled této téměř nepřeberné literatury. Na tomto místě upozorňuji toliko na dvě knihy prof. V. Jarníka: Úvod do počtu diferenciálního a Úvod do počtu integrálního,*) které patří mezi nejdokonalejší učebnice těchto oborů v celé literatuře světové, jak svým přesným zpracováním látky, tak i jasností, s níž jsou v nich všecky problémy vysvětlovány a dokazovány. Jediná vada těchto knih je jejich poměrně značný rozsah, který u čtenáře ne dosti zvyklého přesným matematickým úvahám může způsobit jakousi nechuť k jejich soustavnému studiu. Je tedy zřejmé, že by bylo nemoudré psát příručku diferenciálního a integrálního počtu a nedat vydatně na sebe působit uvedenými knihami prof. Jarníka. Při této příležitosti upozorňuji ještě na knihu A. J. Chinčina: Восемь лекций по математическому анализу,**) která na rozdíl od knih Jarníkových neodvozuje téměř žádná matematická pravidla a vzorce, nýbrž je téměř výhradně věnována přehledu a rozboru method a myšlenkových postupů, jichž se v diferenciálním a integrálním počtu používá. Cílem rozumně a ekonomicky studované matematiky musí být spíše studium těchto method než nějaké samoúčelné dření vzorců, často neúplných, ba dokonce někdy i zcela nesprávných.

Knížka nepředpokládá od čtenáře téměř nic jiného než jakousi minimální znalost matematických principů, které tvoří látku matematiky na školách III. stupně; klade však dosti značný nárok na čtenářovu pozornost a na jeho schopnost činit logicky přesné závěry, jež však jsou nezbytným předpokladem veškerého matematického uvažování. Doufám,

*) Praha 1946 a 1948, JČMF.

**) Třetí vydání, Moskva-Leningrad 1948, ОГИЗ.

že čtenář, který se při čtení knížky něčemu naučí, nebude se muset při dalším svém studiu nic odnaučovat a pochopí, k jaké dokonalosti dospělo matematické bádání během svého staletého vývoje.

V Mnichově Hradišti 17. června 1951.

K. H.

ÚVOD

Pro stručné vyjadřování si zavedeme název *množina*. Tímto slovem budeme označovat soubor jakýchkoli předmětů, které nazýváme *prvky* množiny; při tom vyslovíme požadavek, abychom o každém předmětu dovedli rozhodnout, je-li prvkem dané množiny či není-li jejím prvkem.

Nás budou zajímat hlavně dva druhy množin. Jedním z nich jsou množiny, jejichž prvky jsou čísla. Druhým z nich jsou množiny, jejichž prvky jsou body určité přímky. Je užitečné počítat mezi množiny i takové, které neobsahují vůbec žádný prvek; taková množina se nazývá *množina prázdná*. Množina, která má aspoň jeden prvek, jmenuje se *neprázdná*.

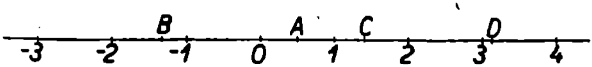
Máme různé druhy čísel. Nejjednodušší jsou *čísla přirozená* (t. j. čísla 1, 2, 3, 4, ...); vedle nich jsou ještě *čísla celá* (t. j. čísla ..., —3, —2, —1, 0, 1, 2, 3, ...; čísla přirozená mezi ně patří), dále *čísla racionální* (na př. $\frac{3}{4}$, $\frac{9}{2}$, $-\frac{5}{8}$ atd.; čísla celá mezi ně také patří, neboť na př. $3 = \frac{3}{1}$) a konečně *čísla reálná* (mezi něž patří všecka čísla racionální a ještě veliké množství dalších čísel zvaných *irracionální*, na př. $\sqrt{2}$, π, log5 atd.). V této knížce se budeme zabývat výlučně čísly reálnými; řekneme-li slovo „číslo", budeme mít na mysli vždy jen číslo reálné. Budeme-li však někdy myslit jiný druh čísel, výslovně to vždy vytkneme.

S čísly provádíme t. zv. *základní početní výkony* (t. j. sčítání, odčítání, násobení a dělení). Jejich theorií se zabývat nebudeme; ta spadá do jiného odvětví matematiky, zvaného aritmetika. Pravidla, jimiž se řídí základní početní výkony s čísly reálnými, budeme považovat za známá.

Při této příležitosti si však přece řekneme několik slov o dělení. Jsou-li dána dvě čísla a, b, definujeme *podíl* $a : b$

(někdy mu také říkáme zlomek $\dfrac{a}{b}$) jako takové číslo x, které vyhovuje rovnici $bx = a$. Je-li $b \neq 0$ (čteme b různé od nuly), má tato rovnice **jediné řešení** $x = \dfrac{a}{b}$, které píšeme také ve tvaru $x = a : b$. Je-li však $b = 0$ a $a \neq 0$, nemá tato rovnice řešení, neboť, ať volíme číslo x jakkoli, vždy je $bx = 0$. Proto **žádné číslo** x nemůže vyhovovat rovnici $0 \,.\, x = a$, v níž předpokládáme, že $a \neq 0$. Je-li tedy $b = 0$ a $a \neq 0$, není možno utvořit podíl $a : b$. Konečně je-li $b = 0$ a také $a = 0$, pak rovnici $bx = a$ vyhovuje **každé číslo** x, neboť vždy je $0 \,.\, x = 0$. Proto za podíl $a : b$, kde $a = 0$, $b = 0$, mohli bychom pokládat každé číslo. Nám však jde o to, aby každý početní výkon měl vždy jen jeden výsledek. Abychom se vyhnuli všem těmto potížím, **budeme mluvit o podílu $a : b$ jen tehdy, když $b \neq 0$. Podíl, jehož dělitelem je nula, budeme vždy ze svých úvah důsledně vylučovat.**

Pozoruhodná je tato skutečnost: množina všech reálných čísel a množina všech bodů na přímce mají tu vlastnost, že prvky těchto dvou množin možno navzájem přiřadit tak, aby



Obr. 1

každému reálnému číslu odpovídal určitý a jediný bod přímky a také obráceně aby každému bodu přímky odpovídalo určité a jediné reálné číslo. Toto přiřazení provádíme zpravidla tak, že si zvolíme určitou přímku, které říkáme *osa číselná*, a zvolíme na ní určitý bod O, který nazveme *počátek*. Ten bude znázorňovat číslo 0. Dále zvolíme určitou délkovou jednotku (třeba 1 cm) a jeden z obou smyslů zvolené přímky prohlásíme za kladný. Druhý smysl bude záporný. Každé číslo bude přiřazeno tomu bodu číselné osy, jehož vzdálenost od počátku činí právě tolik délkových jednotek, kolik jednotek má to číslo, a to v kladném smyslu, jde-li o číslo kladné, a v záporném smyslu, jde-li o číslo záporné. Na obr. 1 jsou tak zobrazena čísla $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$ a vedle toho jsou tam ještě body A, B, C, D, které zobrazují čísla 0,5, $-\frac{4}{3}$, $\sqrt{2}$, π. Poněvadž každému číslu je takto přiřazen jediný bod číselné osy a každému bodu číselné osy je přiřazeno jediné číslo, budeme často místo slova „číslo" užívat názvu „bod".

Osu číselnou si nejčastěji představujeme v poloze vodorovné a za její kladný smysl volíme směr zleva doprava. Jsou-li dána dvě čísla a, b, z nichž $a > b$ (čteme a je větší než b), pak bod, který zobrazuje číslo a, leží dále vpravo než bod, který zobrazuje číslo b. Je-li $b < a$ (b menší než a), leží bod b vlevo od bodu a.

Základní pravidla o nerovnostech budeme pokládat za známá. Nejdůležitější z nich jsou tato:

Je-li $a > b$, je také $a + c > b + c$, ať je c jakékoli číslo.

Je-li $a > b$ a $c > 0$,*) je $ac > bc$; naproti tomu je-li $a > b$ a $c < 0$, je $ac < bc$.

Víme-li, že je buď $a > b$, nebo $a = b$, píšeme to $a \geqq b$ (čteme větší nebo rovno); víme-li, že buď $a < b$, nebo $a = b$, píšeme $a \leqq b$ (čteme menší nebo rovno). Opakem tvrzení $a > b$ je tvrzení $a \leqq b$, podobně opakem tvrzení $a < b$ je tvrzení $a \geqq b$.

Číselnou množinu nazýváme *omezenou*, když existují taková dvě čísla k, h, že pro každý prvek x této množiny platí $x > h$ a současně $x < k$, což psáváme zpravidla stručněji $h < x < k$. Neexistuje-li některé z čísel k, h, mluvíme o množině *neomezené*. Na příklad množina všech zlomků s kladným

*) Číslo a, pro něž platí $a > 0$, nazývá se *kladné*; číslo a, pro něž platí $a < 0$, nazývá se *záporné*. Číslo 0 nepovažujeme ani za kladné, ani za záporné.

čitatelem i jmenovatelem, které mají tu vlastnost, že jejich čitatel je menší než jmenovatel, tvoří množinu omezenou; množina všech přirozených čísel je neomezená.

Jestliže existuje číslo k tak, že pro každý prvek x dané množiny platí $x < k$, říkáme, že množina je omezená shora. Existuje-li takové číslo h, že pro každý prvek x množiny platí $x > h$, říkáme, že množina je omezená zdola. Je zřejmé, že množina je omezená tehdy a jen tehdy, když je omezená shora i zdola.

Platí věta, kterou dokazovat nebudeme, ale přijmeme ji za správnou:

Je-li dána jakákoli shora omezená množina, existuje číslo M, které má tyto vlastnosti:

1. Žádný prvek x dané množiny není větší než M, t. j. vždy je $x \leqq M$.

2. Zvolíme-li libovolné číslo $M_1 < M$, existuje vždy aspoň jeden prvek ξ dané množiny, který je větší než M_1, t. j. $\xi > M_1$.

Číslo M se nazývá *supremum* dané množiny a je zcela lhostejné, je-li prvkem dané množiny či není-li jejím prvkem.

Podobně platí věta:

Je-li dána jakákoli zdola omezená množina, existuje číslo m, které má tyto vlastnosti:

1. Žádný prvek x dané množiny není menší než m, t. j. vždy je $x \geqq m$.

2. Zvolíme-li libovolné číslo $m_1 > m$, existuje vždy aspoň jeden prvek ξ dané množiny, pro nějž platí $\xi < m_1$.

Číslo m se nazývá *infimum* dané množiny a je opět zcela lhostejné, je-li prvkem dané množiny či není-li jejím prvkem.

Jako příklad uvedeme množinu skládající se z prvků

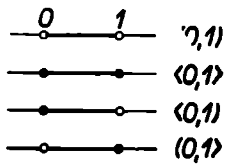
$$1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{5}, \ldots, \text{obecně } \frac{1}{n}.$$

Tato množina je omezená shora i zdola a má supremum 1, které k ní patří, a infimum 0, které k ní však nepatří, neboť pro žádné n není $\frac{1}{n} = 0$. Zvolíme-li však libovolné číslo $m_1 > 0$, existují vždy prvky naší množiny, které jsou menší než zvolené číslo m_1; jsou to ty zlomky $\frac{1}{n}$, v nichž je $n > \frac{1}{m_1}$.

Nejčastěji se budeme zabývat množinami, jejichž prvky jsou všecka čísla vyhovující určitým nerovnostem. Takové číselné množiny nazýváme *intervaly*.

Na příklad množina těch čísel x, která současně vyhovují nerovnostem $0 < x < 1$, tvoří interval, který budeme označovat $(0, 1)$. Tento interval je na ose číselné znázorněn úsečkou, jejíž krajní body jsou 0 a 1, jež se však k této úsečce nepočítají. Takový interval se jmenuje *otevřený*.

Podobně množina čísel, která vyhovují nerovnostem $0 \leqq x \leqq 1$, tvoří interval, který budeme označovat $\langle 0, 1 \rangle$. Také tento interval je na ose číselné znázorněn úsečkou, jejíž krajní body jsou 0 a 1; tyto body se však tentokrát k úsečce počítají. Takový interval nazýváme *uzavřený*.

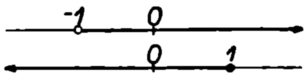


Obr. 2

Počítáme-li k intervalu jen jeden krajní bod, nazýváme jej *polouzavřený* (polootevřený). Polouzavřenými jsou na příklad intervaly, jež tvoří ta čísla x, která vyhovují nerovnostem $0 \leqq x < 1$ nebo $0 < x \leqq 1$. Prvý z nich budeme označovat $\langle 0, 1)$ a druhý $(0, 1\rangle$.

Na obrázku ovšem nemůžeme znázornit jediný bod, a proto budeme kreslit místo bodů malé kotoučky. Bude-li takový kotouček vyplněn, bude to znamenat, že bod do dané množiny patří; bude-li prázdný, bude to znamenat, že bod do dané množiny nepatří. Podle toho jsou na obr. 2 znázorněny čtyři intervaly, o kterých jsme právě mluvili.

Také množina všech čísel větších než -1 tvoří (otevřený) interval, který značíme $(-1, \infty)$ (čteme otevřený interval od -1 do nekonečna). Tvoří jej všechna x, která vyhovují nerovnosti $x > -1$. Podobně množina čísel, která vyhovují vztahu $x \leq 1$, tvoří (polouzavřený) interval, který označíme $(-\infty, 1\rangle$. Tyto intervaly se zobrazují na číselné ose jako polopřímky (obr. 3). Budeme je dále nazývat *intervaly neomezenými*. Intervaly, o nichž jsme mluvili dříve, nazýváme *omezenými*.



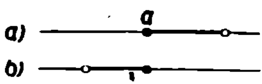
Obr. 3

Konečně i množinu všech reálných čísel vůbec počítáme také mezi intervaly a označujeme ji symbolem $(-\infty, \infty)$. Je to rovněž interval neomezený a je zobrazen celou číselnou osou.

Symboly ∞ a $-\infty$, jichž jsme právě užili, neznačí ovšem žádná čísla, nýbrž značí jen tolik, že příslušný interval je v některém směru neomezený (t. j. nikde nekončí). Se symboly ∞ a $-\infty$ nikdy nebudeme počítat, neboť to nejsou čísla.

Každý otevřený interval, jehož (vnitřním) bodem je bod a, budeme nazývat *okolím bodu a* (viz obr. 4). Každý polouzavřený interval, jehož levým krajním bodem je bod a

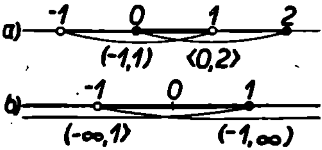
Obr. 4



Obr. 5

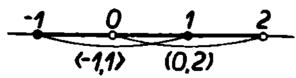
(který do toho intervalu patří), nazýváme *pravým okolím* bodu a (obr. 5a) a každý polouzavřený interval, jehož pravým krajním bodem je bod a (který do toho intervalu patří), nazýváme *levým okolím* bodu a (obr. 5b).

Průnikem dvou množin nazýváme množinu, která obsahuje všecky prvky, jež patří současně do obou množin, a žádný jiný. Průnik dvou intervalů tedy obsahuje všecka čísla společná oběma intervalům. Je jasné, že průnikem dvou intervalů může být buď interval, nebo jediné číslo, nebo množina prázdná. Na příklad průnikem intervalů $\langle 0, 2\rangle$ a $(-1, 1)$ je interval $\langle 0, 1)$, jak je vidno z obr. 6a. Podobně průnikem intervalů $(-1, \infty)$ a $(-\infty, 1\rangle$ je interval $(-1, 1\rangle$, jak vyplývá ze znázornění na obr. 6b. Je zřejmé, že průnikem dvou intervalů, které mají společný **vnitřní** bod, je vždy interval.



Obr. 6

Sjednocením dvou množin nazýváme množinu, která obsahuje všecky prvky jedné množiny i všecky prvky množiny druhé a žádný jiný. Sjednocením dvou intervalů může tedy být buď dvojice intervalů, nebo jediný interval. Na příklad sjednocením intervalů $(0, 2)$ a $\langle -1, 1\rangle$ je interval $\langle -1, 2)$, který obsahuje všecka čísla z intervalu $(0, 2)$ i všecka čísla z intervalu $\langle -1, 1\rangle$, jak je patrno z obr. 7. Sjednocením levého a pravého okolí bodu a je okolí tohoto bodu (viz obr. 4 a 5).



Obr. 7

Ke každému reálnému číslu a přiřazujeme číslo, které označujeme $|a|$ a nazýváme *absolutní* (*prostá*) *hodnota* čísla a. Je definována takto:

Je-li $a > 0$, je $|a| = a$; je-li $a < 0$, je $|a| = -a$; $|0| = 0$. Na příklad $|3| = 3$, $|-1{,}8| = 1{,}8$ atd. Můžeme také říci:

Je-li $a \geqq 0$, je $|a| = a$; je-li $a \leqq 0$, je $|a| = -a$.*)

*) Podmínka $a \geqq 0$ zahrnuje všecka čísla kladná a ještě nulu. Tato čísla, která nejsou záporná, označujeme souborným názvem čísla *nezáporná*. Podobně čísla, která vyhovují podmínce $a \leqq 0$, nazýváme *nekladná*.

Vždy je $|a| \geqq 0$. Absolutní hodnota je vždy číslo nezáporné.

Jsou-li a, b jakákoli čísla, je vždy

$$||a| - |b|| \leqq |a \pm b| \leqq |a| + |b|, \tag{1}$$ *)

$$|ab| = |a| \cdot |b|, \quad \left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|} \text{ pro } b \neq 0. \tag{2}$$

Symbol $a \pm b$ v nerovnosti (1) značí buď $a + b$, nebo $a - b$. Důkaz uvedených pravidel provedeme nejsnáze tak, že vezmeme v úvahu všecky možné kombinace znamének, jichž mohou čísla a, b nabýt, a ukážeme, že napsané vztahy jsou vždy splněny.

Je-li a libovolné číslo a $\delta > 0$, pak množina všech čísel x, pro něž platí

$$a - \delta < x < a + \delta, \tag{3}$$

je totožná s množinou všech čísel x, která splňují nerovnost

$$|a - x| < \delta. \tag{3'}$$

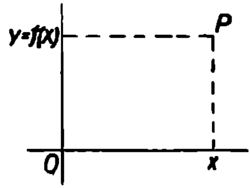
Důkaz: 1. Je-li $a - \delta < x < a + \delta$, je $-\delta < x - a < \delta$. Buď je $x - a \geqq 0$, takže $x - a = |x - a|$, a pak $|x - a| < \delta$. Nebo je $x - a < 0$, takže $x - a = -|x - a|$, a pak $-\delta < -|x - a|$, t. j. $|x - a| < \delta$.

2. Obráceně: Je-li $|x - a| < \delta$, je buď $x - a \geqq 0$, t. j. $|x - a| = x - a$, takže $x - a < \delta$ (a samozřejmě ovšem také $-\delta < x - a$). Nebo je $x - a < 0$, t. j. $|x - a| = -(x - a)$, takže $-(x - a) < \delta$, t. j. $-\delta < x - a$ (a samozřejmě ovšem $x - a < \delta$). V obou případech je tedy $-\delta < x - a < \delta$, t. j. $a - \delta < x < a + \delta$.

*) Vzorce, které třeba si pamatovat, jsou označení čísly na okraji. Formule, jichž se v dalším textu dovoláváme, jež však pamatovat není třeba, jsou označeny písmeny.

Buďtež dány dvě číselné množiny M, N. Libovolný prvek prvé množiny označíme písmenem x. Jestliže existuje předpis, který každému prvku x množiny M přiřazuje určitý a jediný prvek y množiny N, nazýváme toto přiřazení *funkcí* a označujeme je zpravidla nějakým písmenem, třeba f. Prvek množiny N, přiřazený prvku x z množiny M, označujeme pak znakem $f(x)$. Číslo x nazýváme *proměnná*; množinu M všech čísel x nazýváme *obor* funkce f. Číslu $y = f(x)$, přiřazenému k číslu x, říkáme *hodnota funkce* v bodě x. Místo písmen x, y, f můžeme ovšem volit kterákoli jiná.

Abychom získali přehled o nějaké funkci, znázorňujeme si ji geometricky. Každou z obou číselných množin M, N zobrazíme na zvláštní číselné ose, které zpravidla volíme navzájem kolmé a o společném počátku O. Tu osu, na níž zobrazujeme čísla x množiny M, nazýváme osa x; tu osu, na níž zobrazujeme čísla y množiny N, nazýváme osa y. Bodem x a jemu přiřazeným bodem $y = f(x)$ vedeme rovnoběžky s druhou osou a jejich průsečík P považujeme za obraz hodnoty funkce f v bodě x (obr. 8). Jde tedy vlastně o pravoúhlé souřadnice x, $y = f(x)$ bodu P v rovině. Množina všech bodů P sestrojených pro všecka x z oboru M funkce f podává jasný přehled o průběhu funkce. Množinu bodů P budeme označovat názvem *graf* neboli *diagram* funkce f. Nejčastěji se stává, že tímto grafem je jakási křivka, ačkoli to může být útvar daleko složitější.

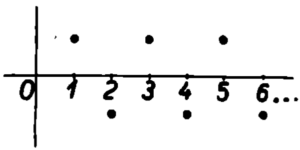


Obr. 8

Obě množiny M, N však bývají předem dány jen zřídka. Často je dána pouze funkce f, t. j. předpis, podle něhož přejdeme od čísel množiny M k číslům množiny N, a její obor M; tím je ovšem již určena množina N všech hodnot $f(x)$ dané funkce. Zpravidla však nebývá předem dán ani obor M dané funkce f. V tomto případě budeme za M považovat co nejobsáhlejší množinu, která má tu vlastnost, že ke každému x z této množiny je možno utvořit hodnotu $f(x)$ dané funkce.

Uvedeme si několik příkladů, na nichž ukážeme některé jednoduché funkce a jejich diagramy.

Příklad 1. Oborem funkce f budiž množina všech přirozených čísel a ke každému x z této množiny budiž přiřazeno číslo 1, je-li x liché, a číslo -1, je-li x sudé. Je tedy $f(1) = 1$, $f(2) = -1$, $f(3) = 1$, $f(4) = -1$ atd. Diagram této funkce (vlastně jen jeho část) je zobrazen na obr. 9. Je tedy možné, aby totéž y odpovídalo většímu počtu čísel x.

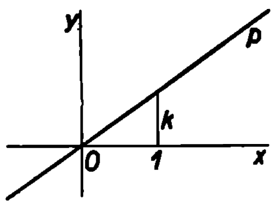


Obr. 9

Příklad 2. Oborem funkce f budiž množina všech reálných čísel a ke každému x této množiny budiž přiřazeno číslo

$$y = kx, \text{ kde } k \neq 0.$$

Můžeme tedy psát $f(x) = kx$. Sestrojíme-li množinu těch bodů P, jejichž souřadnice x, y jsou vázány vztahem $y = kx$, leží tyto body, jak známo, na přímce p procházející počátkem a bodem o souřadnicích 1, k (obr. 10). Říkáme tedy, že funkce $y = kx$ je zobrazena přímkou procházející počátkem. Směr této přímky je určen číslem k, proto mu dáváme název *směrnice*. Je-li k kladné, svírá přímka p s kladně orientovanou osou x úhel ostrý (měřeno v kladném smyslu otáčení), jako je tomu na obr. 10; je-li k záporné, svírá přímka p s kladným smyslem osy x úhel tupý. Funkci $f(x) = kx$, kde $k \neq 0$, nazýváme *přímá úměrnost*.

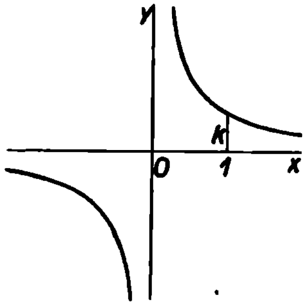


Obr. 10

Příklad 3. Jako další příklad si uvedeme funkci danou rovnicí

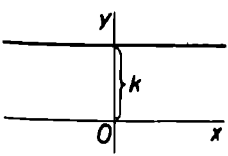
$$y = \frac{k}{x}, \text{ kde } k \neq 0.$$

Všimněme si nejprve jejího oboru. Výraz $\frac{k}{x}$ má smysl pro všecka $x \neq 0$; oborem naší funkce může tedy být obor všech reálných čísel s výjimkou čísla 0. Danou rovnicí není číslu 0 přiřazeno žádné y; říkáme, že funkce není pro $x = 0$ definována. Každému x (s výjimkou nuly) odpovídá jediné y. Souhrn všech bodů o souřadnicích x, y, kde $y = \frac{k}{x}$, leží na rovnoosé hyperbole. Tato hyperbola tedy zobrazuje funkci $y = \frac{k}{x}$ (obr. 11). Funkci $y = \frac{k}{x}$, kde $k \neq 0$, označujeme zpravidla názvem *nepřímá úměrnost*.



Obr. 11

Příklad 4. Funkce $y = k$, kde k je dané číslo, definovaná v intervalu $(-\infty, \infty)$, přiřazuje každému x tohoto intervalu určitou hodnotu, totiž hodnotu k. Taková funkce, která pro všecka x z určitého oboru nabývá stále téže hodnoty, se nazývá *funkce konstantní* v tomto oboru nebo krátce *konstanta*. Je-li jejím oborem interval $(-\infty, \infty)$, je jejím geometrickým znázorněním přímka rovnoběžná s osou x ve vzdálenosti k od této osy (obr. 12).



Obr. 12

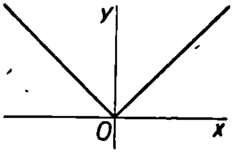
Příklad 5. Mějme funkci definovanou pro všecka reálná x rovnicí

$$y = |x|.$$

a) Je-li $x \geqq 0$, je $|x| = x$, takže v intervalu $\langle 0, \infty)$ je $y = x$.

b) Je-li $x < 0$, je $|x| = -x$, takže v intervalu $(-\infty, 0)$ je $y = -x$.

Naši funkci můžeme tedy definovat také takto:



Obr. 13

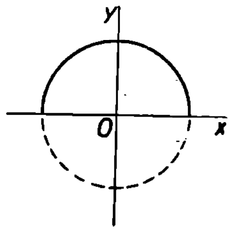
$$y = \begin{cases} x \text{ pro } x \geqq 0, \\ -x \text{ pro } x < 0. \end{cases}$$

Její znázornění se skládá ze dvou částí: pro $x \geqq 0$ je to část přímky $y = x$ a pro $x < 0$ je to část přímky $y = -x$ (viz obr. 13).

Příklad 6. Funkce

$$y = +\sqrt{1 - x^2}$$

je definována pouze v intervalu $\langle -1, 1\rangle$, t. j. pro $-1 \leqq x \leqq 1$, neboť pro $x > 1$ nebo pro $x < -1$ dostaneme pod odmocnítkem záporné číslo, jehož odmocnina není reálná. Hned na počátku jsme se však umluvili, že budeme hovořit jen o reálných číslech. Proto oborem dané funkce může být jen interval $\langle -1, 1\rangle$. Jejím geometrickým znázorněním je půlkružnice opsaná z počátku poloměrem rovným 1, neboť z naší rovnice plyne $x^2 + y^2 = 1$, takže vzdálenost libovolného bodu o souřadnicích x, y, který leží na grafu naší funkce, od počátku je rovna jedné. Poněvadž $y \geqq 0$, jde o půlkružnici nad osou x. Půlkružnice o témže středu a poloměru, ale ležící pod osou x, je obrazem funkce $y = -\sqrt{1 - x^2}$ (obr. 14).

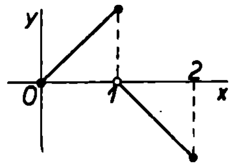


Obr. 14

Příklad 7. Funkce $f(x)$ nechť je definována v oboru $\langle 0, 2\rangle$ takto:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{pro } 0 \leqq x \leqq 1, \\ 1 - x & \text{pro } 1 < x \leqq 2, \end{cases}$$

kdežto pro jiná x není vůbec definována. Tato funkce je znázorněna na obr. 15. Pro $x = 1$ nabývá funkce hodnoty 1, což je na obrázku znázorněno nápadnou tečkou, abychom nebyli na rozpacích, není-li snad $f(1) = 0$.

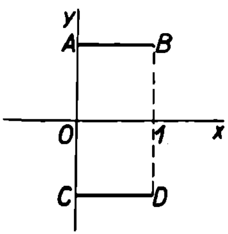


Obr. 15

Příklad 8. Funkce f budiž definována v intervalu $\langle 0, 1\rangle$ takto:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x \text{ racionální}, \\ -1 & \text{pro } x \text{ iracionální}. \end{cases}$$

Mezi každými dvěma různými čísly leží nekonečně mnoho čísel racionálních, a proto o množině čísel racionálních říkáme, že je hustá. Touž vlastnost má i množina čísel iracionálních. Proto v každém sebemenším okolí každého čísla leží nekonečně mnoho čísel racionálních i iracionálních, které však na obrázku není možno od sebe odlišit. Grafické znázornění se tedy skládá z těch bodů úsečky AB, jejichž vzdálenost od bodu A je dána číslem racionálním, a z těch bodů úsečky CD, jejichž vzdálenost od bodu C je dána číslem iracionálním (obr. 16).



Obr. 16

Často se setkáváme s funkcemi, jejichž oborem je množina přirozených čísel. Tak na příklad funkce uvedená v příkladě 1 měla tuto vlastnost. Funkci, jejímž oborem je množina přirozených čísel, označujeme zpravidla názvem *posloupnost*. Funkce z příkladu 1 je tedy posloupností.

Přirozená čísla mají tuto vlastnost, které budeme často používat:

je-li n přirozené číslo, je $n + 1$ také přirozené číslo.

Máme-li tedy číselnou množinu, která má tyto vlastnosti:

(1) obsahuje přirozené číslo k, a

(2) obsahuje-li nějaké číslo n, obsahuje také číslo $n + 1$, pak tato množina obsahuje všecka přirozená čísla $n \geqq k$. To snadno nahlédneme. Kdyby naše množina neobsahovala všecka přirozená čísla $n \geqq k$, existovalo by nejmenší přirozené číslo $r \geqq k$, které by neobsahovala. Není možné, aby $r = k$, to by odporovalo bodu 1. Je tedy $r > k$. Přirozené číslo $r - 1$ je menší než r; to tedy naše množina obsahuje, protože r je nejmenší přirozené číslo, které neobsahuje. Podle bodu 2 však obsahuje číslo $r - 1 + 1 = r$, což odporuje našemu předpokladu. Není tedy možné, aby naše množina neobsahovala některé přirozené číslo $r \geqq k$.

Na právě vyložené vlastnosti přirozených čísel spočívá t. zv. *úplná indukce*, jíž často užíváme k důkazu takových vět, v nichž jde o vlastnosti přirozených čísel. Dokážeme-li tyto dvě věci:

(1) nějaký výrok platí pro přirozené číslo k, a

(2) platí-li výrok pro číslo n, platí také pro $n + 1$, dokázali jsme tím, že uvedený výrok platí pro každé přirozené číslo $n \geqq k$. To je pravda, neboť podle toho, co bylo právě vyloženo, množina těch čísel, pro která výrok platí, obsahuje všechna přirozená čísla $n \geqq k$.

Příklad 9. Dokážeme, že

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \tfrac{1}{2}n(n + 1) \qquad \text{(a)}$$

pro každé přirozené číslo n.

(1) Pro $n = 1$ vzorec (a) platí, neboť na levé straně je jediný člen 1 a na pravé straně je $\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (1 + 1) = 1$.

(2) Předpokládáme, že $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{1}{2}n(n + 1)$. Pak $1 + 2 + 3 + \ldots + n + (n + 1) = \frac{1}{2}n(n + 1) + (n + 1) = \frac{1}{2}(n + 1)(n + 2)$, ale to je týž výsledek jako

vzorec (a), kde je však místo n psáno $n + 1$. Tím je důkaz proveden.

Úplné indukce užíváme často zejména při vyšetřování posloupností, neboť jejich oborem je právě množina přirozených čísel. Jde-li o posloupnost, užíváme raději místo symbolu $f(n)$ znaku a_n, kde index n značí, že jde o hodnotu posloupnosti přiřazenou k číslu n. Čísla $a_1, a_2, a_3, \ldots$, obecně a_n, nazýváme *členy posloupnosti* a mluvíme o prvním, druhém, třetím členu atd., obecně pak o n-tém členu. Chceme-li stanovit posloupnost, můžeme to podle principu úplné indukce učinit takto:

(1) Definujeme její první člen a_1 a

(2) $(n + 1)$-ní člen a_{n+1} definujeme pomocí n-tého členu a_n. Pak je definováno a_n pro všechna přirozená čísla n. Vzorec, kterým se stanoví člen a_{n+1} pomocí členu a_n, se nazývá *vzorec rekurentní*.

Příklad 10. Budiž a libovolné číslo a mějme posloupnost definovanou rekurentně takto:

$$(1)\ a_1 = a,\quad (2)\ a_{n+1} = a_n \,.\, a.$$

Rozepišme několik prvních členů této posloupnosti

$$\begin{aligned} a_1 &= a, \\ a_2 &= a_1 \,.\, a = a \,.\, a = a^2, \\ a_3 &= a_2 \,.\, a = a^2 \,.\, a = a^3, \\ a_4 &= a_3 \,.\, a = a^3 \,.\, a = a^4 \end{aligned}$$

atd. Zdá se, že obecně je

$$a_n = a^n. \tag{b}$$

Dokážeme, že tomu vskutku tak je.

(1) Víme, že $a_1 = a = a^1$, t. j. vzorec (b) platí pro $n = 1$.

(2) Je-li $a_n = a^n$, pak $a_{n+1} = a_n \,.\, a = a^n \,.\, a = a^{n+1}$. To však je vzorec (b), v němž je psáno $n + 1$ místo n. Tím je dokázána platnost vzorce (b) pro každé přirozené číslo n. Naše

posloupnost je tedy posloupností mocnin o základu a, jejichž mocnitelé jsou přirozená čísla.

Vedle mocnin, jejichž mocnitelé jsou přirozená čísla, je účelné zavést i mocniny s mocnitelem 0 a s mocnitelem celým záporným. Definujeme

$$a^0 = 1 \text{ pro každé } a \text{ (tedy i } 0^0 = 1), \tag{4}$$

$$a^n = \frac{1}{a^{-n}} \text{ pro } a \neq 0 \text{ a } n \text{ celé záporné} \tag{5}$$

(a tedy $-n$ celé kladné). Mocninu a^n, kde n je celé záporné číslo, nedefinujeme pro $a = 0$, neboť dělení nulou nemá smysl, jak jsme již uvedli na str. 10. Pravidla pro počítání s mocninami, jejichž mocnitelé jsou čísla celá (kladná, záporná i nula), považujeme za známá. Při jejich aplikaci je třeba dávat pozor, aby měly napsané symboly smysl. Na příklad známý vzorec

$$a^r \cdot a^s = a^{r+s}$$

platí při nezáporných celých r, s pro každé a, naproti tomu je-li některé z čísel r, s (nebo obě) záporné, platí jen pro $a \neq 0$.

Příklad 11. Je-li n celé, je funkce

$$f(x) = x^n$$

při $n \geqq 0$ definována pro každé x, při $n < 0$ je definována jen pro $x \neq 0$. Při záporném n se tedy obor této funkce skládá ze dvou intervalů: $(-\infty, 0)$, $(0, \infty)$; pro $x = 0$ funkce definována není. Průběh funkce $f(x) = x^n$ je pro $n = 2, 3, -1, -2$ zachycen na obr. 17—20. Funkce tvaru $f(x) = x^n$, kde n je celé, se nazývá *mocnina s celým mocnitelem.*

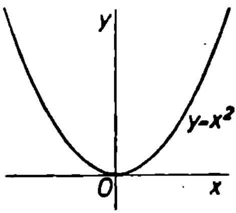
Odvodíme si dvě věty o mocninách s celým mocnitelem:

Věta **1.** Je-li n celé kladné a $0 \leqq x_1 < x_2$, je $0 \leqq x_1^n < x_2^n$.

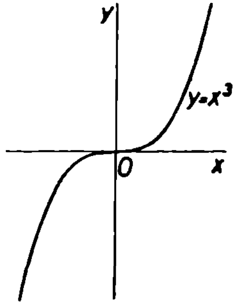
Důkaz povedeme úplnou indukcí.

(1) Věta platí pro $n = 1$, neboť podle předpokladu $0 \leqq x_1 < x_2$, t. j. $0 \leqq x_1^1 < x_2^1$.

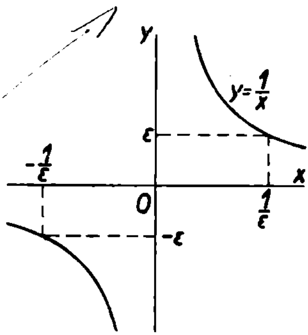
(2) Je-li pro některé n splněn vztah $0 \leqq x_1^n < x_2^n$ a je-li zároveň $0 \leqq x_1 < x_2$, pak také $0 \leqq x_1^n \cdot x_1 < x_2^n \cdot x_2$ čili $0 \leqq x_1^{n+1} < x_2^{n+1}$.



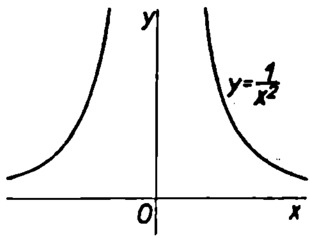
Obr. 17



Obr. 18



Obr. 19



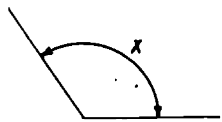
Obr. 20

Věta 2. Je-li n celé záporné a $0 < x_1 < x_2$, je $x_1^n > x_2^n > 0$.

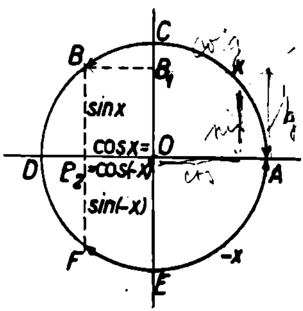
Důkaz. Je-li n celé záporné, je $-n$ celé kladné, a pak podle věty 1 je $0 < x_1^{-n} < x_2^{-n}$. Čísla x_1, x_2 jsou kladná. Je tedy také kladné číslo $x_1^n x_2^n$. Násobíme-li vzniklou nerovnost tímto číslem, dostaneme nerovnost $0 < x_2^n < x_1^n$ mezi kladnými čísly.

Příklad 12. Abychom měli rozmanitější výběr příkladů, promluvíme si ještě o funkcích $\sin x$ a $\cos x$ známých z geometrie. Naše úvahy však v tomto příkladě nebudou zcela přesné, neboť se budeme opírat o názor vyčtený z obrázku; teprve v kapitole X je postavíme na přesný základ.

V celé této knížce budeme měřit úhly t. zv. *měrou obloukovou*, v níž plný úhel (360°) je vyjádřen číslem 2π, přímý úhel (180°) číslem π, pravý úhel (90°) číslem $\frac{1}{2}\pi$ atd. Tato čísla volíme proto, že délka kružnice o poloměru 1 je právě 2π. Je tedy velikost x úhlu v míře obloukové rovna délce kruhového oblouku, který leží uvnitř daného úhlu, má střed v jeho vrcholu a poloměr rovný 1 (viz obr. 21). Je-li tento úhel probíhán v kladném smyslu (t. j. proti směru pohybu hodinových ručiček), má hodnotu kladnou; je-li probíhán v záporném smyslu (t. j. ve směru pohybu hodinových ručiček), má hodnotu zápornou.



Obr. 21



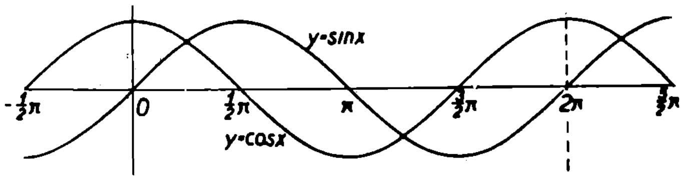
Obr. 22

Sestrojme kružnici o poloměru 1 (viz obr. 22, který je narýsován ve zvětšeném měřítku) a o středu O v počátku souřadnic. Písmeno x bude značit velikost úhlu (v míře obloukové), t. j. délku oblouku, který nanášíme na kružnici od bodu A; druhý krajní bod tohoto oblouku označíme B. Je-li $x > 0$, nanášíme oblouk v kladném smyslu, a je-li $x < 0$, nanášíme jej v záporném smyslu. Souřadnice bodu B jsou určeny velikostí úhlu x. Každému

x odpovídá jediný bod B, který má určité souřadnice. Tyto souřadnice jsou tedy funkcemi úhlu x. Souřadnici OB_1 nazýváme *sinus* x (značka $\sin x$), souřadnici OB_2 nazýváme *kosinus* x (značka $\cos x$).

Z tohoto vytvoření je vidět, že $\sin 0 = 0$, $\cos 0 = 1$ (bod A). Roste-li x od 0 do $\frac{1}{2}\pi$, roste $\sin x$ od 0 do 1 a $\cos x$ klesá od 1 do 0; $\sin\frac{1}{2}\pi = 1$, $\cos\frac{1}{2}\pi = 0$ (bod C). Roste-li x dále od $\frac{1}{2}\pi$ do π, klesá $\sin x$ od 1 do 0 a $\cos x$ rovněž klesá od 0 do -1; $\sin\pi = 0$, $\cos\pi = -1$ (bod D). Roste-li x od π do $\frac{3}{2}\pi$, klesá $\sin x$ od 0 do -1 a $\cos x$ roste od -1 do 0; $\sin\frac{3}{2}\pi = -1$, $\cos\frac{3}{2}\pi = 0$ (bod E). Konečně roste-li x od $\frac{3}{2}\pi$ do 2π, roste $\sin x$ od -1 do 0 a $\cos x$ rovněž roste od 0 do 1. Dále je z obrázku vidět, že pro každé x je

$$\sin(x + 2\pi) = \sin x, \quad \cos(x + 2\pi) = \cos x,$$



Obr. 23

neboť $x + 2\pi$ značí, že je třeba nejprve proběhnout oblouk x a pak ještě celou kružnici o délce 2π, čímž se dostaneme do téhož bodu B, jako kdybychom opsali pouze oblouk x. Říkáme, že funkce $\sin x$ a $\cos x$ jsou periodické s periodou 2π. To znamená, že se hodnota těchto funkcí nemění, když proměnnou zvětšíme o 2π. Obecněji platí

$$\sin(x + 2k\pi) = \sin x, \quad \cos(x + 2k\pi) = \cos x, \quad k \text{ celé.} \tag{6}$$

Z toho všeho je zřejmé, že funkce $\sin x$ a $\cos x$ jsou definovány pro každé x a že vždy je

$$-1 \leqq \sin x \leqq 1, \quad -1 \leqq \cos x \leqq 1$$

čili

$$|\sin x| \leqq 1, \quad |\cos x| \leqq 1. \tag{7}$$

Průběh funkcí $\sin x$ a $\cos x$ je znázorněn na obr. 23.

Dále je z obr. 22 vidět, že

$$\sin(-x) = -\sin x, \quad \cos(-x) = \cos x, \tag{8}$$

neboť bod F, který je druhým krajním bodem oblouku o délce $-x$, dostaneme jako bod souměrný k bodu B podle osy OA.

Později dokážeme, že

$$\begin{aligned} \sin(x_1 + x_2) &= \sin x_1 \cos x_2 + \cos x_1 \sin x_2, \\ \cos(x_1 + x_2) &= \cos x_1 \cos x_2 - \sin x_1 \sin x_2. \end{aligned} \tag{9}$$

Dosadíme-li sem $x_1 = x_2 = x$, dostáváme

$$\begin{aligned} \sin 2x &= 2 \sin x \cos x, \\ \cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x.\text{*)} \end{aligned} \tag{10}$$

Nahradíme-li v rovnicích (9) číslo x_2 číslem $-x_2$ a užijeme-li vzorců (8), obdržíme

$$\begin{aligned} \sin(x_1 - x_2) &= \sin x_1 \cos x_2 - \cos x_1 \sin x_2, \\ \cos(x_1 - x_2) &= \cos x_1 \cos x_2 + \sin x_1 \sin x_2. \end{aligned} \tag{11}$$

Položíme-li ve druhé z těchto formulí $x_1 = x_2 = x$, vyjde vztah

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1. \tag{12}$$

Z rovnic (9) a (11) dále vyplývají vztahy

$$\sin(\tfrac{1}{2}\pi + x) = \cos x, \quad \cos(\tfrac{1}{2}\pi + x) = -\sin x, \tag{13}$$
$$\sin(\tfrac{1}{2}\pi - x) = \cos x, \quad \cos(\tfrac{1}{2}\pi - x) = \sin x, \tag{14}$$
$$\sin(\pi + x) = -\sin x, \quad \cos(\pi + x) = -\cos x, \tag{15}$$
$$\sin(\pi - x) = \sin x, \quad \cos(\pi - x) = -\cos x. \tag{16}$$

Z druhé rovnice (10) a z rovnice (12) dostáváme

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x. \tag{17}$$

---

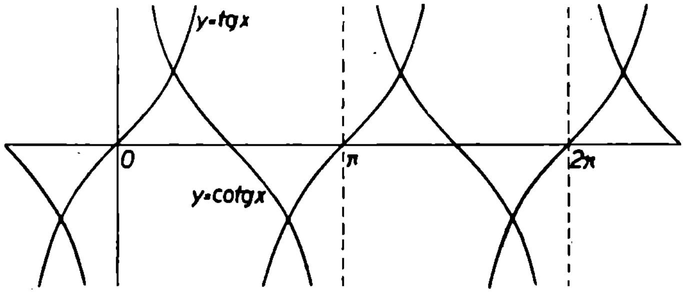
*) $\sin^2 x$ značí totéž jako $(\sin x)^2$, podobně $\cos^2 x$ značí totéž jako $(\cos x)^2$.

Konečně sečtením a odečtením rovnic (9) a (11) vyjde

$$\begin{aligned}
\sin(x_1 + x_2) + \sin(x_1 - x_2) &= 2 \sin x_1 \cos x_2,\\
\sin(x_1 + x_2) - \sin(x_1 - x_2) &= 2 \cos x_1 \sin x_2,\\
\cos(x_1 + x_2) + \cos(x_1 - x_2) &= 2 \cos x_1 \cos x_2,\\
\cos(x_1 + x_2) - \cos(x_1 - x_2) &= -2 \sin x_1 \sin x_2.
\end{aligned}$$

Položíme-li sem $x_1 + x_2 = z_1$, $x_1 - x_2 = z_2$ čili $x_1 = \frac{1}{2}(z_1 + z_2)$, $x_2 = \frac{1}{2}(z_1 - z_2)$, dostaneme

$$\begin{aligned}
\sin z_1 + \sin z_2 &= 2 \sin\tfrac{1}{2}(z_1 + z_2) \cos\tfrac{1}{2}(z_1 - z_2),\\
\sin z_1 - \sin z_2 &= 2 \cos\tfrac{1}{2}(z_1 + z_2) \sin\tfrac{1}{2}(z_1 - z_2),\\
\cos z_1 + \cos z_2 &= 2 \cos\tfrac{1}{2}(z_1 + z_2) \cos\tfrac{1}{2}(z_1 - z_2),\\
\cos z_1 - \cos z_2 &= -2 \sin\tfrac{1}{2}(z_1 + z_2) \sin\tfrac{1}{2}(z_1 - z_2).
\end{aligned} \tag{18}$$



Obr. 24

Příklad 13. Na základě funkcí $\sin x$ a $\cos x$ definujeme další dvě funkce

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}. \tag{19}$$

První z nich čteme *tangens* x a je definována pro všecka x, pro něž je $\cos x \neq 0$, t. j. $x \neq \frac{1}{2}(2k + 1)\pi$, kde k je celé. Druhou z nich čteme *kotangens* x a je definována pro všecka x, pro něž $\sin x \neq 0$, t. j. $x \neq k\pi$, kde k je číslo celé. Průběh funkcí $\operatorname{tg} x$ a $\operatorname{cotg} x$ je znázorněn na obr. 24.

Cvičení.

1. Graficky vyjádřete funkce: a) $y = x + |x|$, b) $y = |x| + |x - 1|$, c) $y = 2|x + 1| - 3|x - 1|$.

2. Je funkce a) $\dfrac{x}{x^2 - 4}$, b) $\dfrac{x^2 + 3}{x^2 - 3x - 4}$, c) $\dfrac{2x - 1}{2x^2 - 2x + 1}$ definována pro každé x?

3. V čem se navzájem liší funkce a) $\dfrac{x}{x}$ a 1, b) $\dfrac{2x + 3}{2x^2 + x - 3}$ a $\dfrac{1}{x - 1}$, c) $\dfrac{1}{\operatorname{tg} x}$ a $\operatorname{cotg} x$?

4. Vyjádřete pomocí konstant a čísla n n-tý člen posloupnosti dané rekurentně: a) $a_1 = 1$, $a_{n+1} = -a_n$, b) $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 1 - a_n$, c) $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \dfrac{n}{n + 1} \cdot a_n$.

5. Úplnou indukcí dokažte t. zv. Bernoulliho nerovnost

$$(1 + x)^n \geqq 1 + nx, \text{ kde } x > -1, \; n \text{ celé kladné.}$$

Kdy může nastat rovnost?

6. Pomocí Bernoulliho nerovnosti dokažte, že pro n celé kladné a) $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \dfrac{1}{n + 1}\right)^{n+1}$, b) $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n+1} > \left(1 + \dfrac{1}{n + 1}\right)^{n+2}$.

7. Pro která a, b a pro která celá r, s platí vzorce: a) $a^r : a^s = a^{r-s}$, b) $(a^r)^s = a^{rs}$, c) $(ab)^r = a^r b^r$, d) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^r = \dfrac{a^r}{b^r}$, e) $1^r = 1$, f) $0^r = 0$?

8. a) Vyjádřete velikost y úhlu v míře obloukové jako funkci jeho velikosti x v míře stupňové. b) Jak velký je v míře stupňové úhel, jehož velikost v míře obloukové je dána číslem 1? (Tento úhel se jmenuje **radián**.)

9. Vyšetřete vlastnosti následujících funkcí a vyjádřete tyto funkce graficky: a) $\sin(x + a)$, b) $\sin ax$, kde $a \neq 0$, c) $\sin x^2$, d) $\sin \frac{1}{x}$, e) $\frac{1}{\sin x}$.

10. a) Vyjádřete $\operatorname{tg}(-x)$, $\operatorname{tg}(\frac{1}{2}\pi + x)$, $\operatorname{tg}(\frac{1}{2}\pi - x)$, $\operatorname{tg}(\pi + x)$, $\operatorname{tg}(\pi - x)$ pomocí $\operatorname{tg} x$. b) Dokažte, že $\operatorname{tg}(x_1 + x_2) = \frac{\operatorname{tg} x_1 + \operatorname{tg} x_2}{1 - \operatorname{tg} x_1 \operatorname{tg} x_2}$, $\operatorname{tg} 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$, $\operatorname{tg} \frac{1}{2}x = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$, $\operatorname{tg} \frac{1}{2}x = \frac{1 - \cos x}{\sin x}$. Ve všech případech udejte ta x, pro něž napsané vztahy platí.

II. LIMITA

Abychom si úvahy zbytečně nekomplikovali, budeme se většinou zabývat jen takovými funkcemi, jejichž obor se skládá vesměs z intervalů.

Mějme funkci f definovanou pro všecka x z nějakého intervalu, jehož vnitřním bodem je bod a. Blíží-li se proměnná x k číslu a a blíží-li se při tom hodnota $f(x)$ k nějakému číslu b, říkáme, že funkce f má v bodě a *limitu* b, a píšeme to krátce takto:

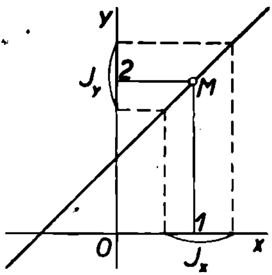
$$\lim_{x \to a} f(x) = b$$

(čteme: limita funkce f pro x blížící se k a je b). Pojem limity bude ústředním pojmem našich úvah, proto mu věnujeme zvýšenou pozornost. Slova „blíží-li se“, jichž jsme právě užili, je však třeba nejprve přeložit do přesné řeči, abychom si pod nimi představovali něco určitého a abychom je mohli vyjádřit matematicky. Ukážeme to nejprve na jednoduchém příkladě, a teprve potom budeme definici limity přesně formulovat.

Příklad 14. Mějme funkci

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}.$$

Tato funkce je definována pro všecka x s výjimkou $x = 1$, neboť pro $x = 1$ má náš zlomek ve jmenovateli nulu. V bodě 1 hodnota funkce f definována není. Ve všech ostatních bodech je definována a její hodnota je $x + 1$, neboť pro $x \neq 1$ lze daný zlomek krátit výrazem $x - 1$. Naše funkce je tedy znázorněna přímkou $y = x + 1$, z níž je však vyloučen bod M o souřadnicích 1, 2 (obr. 25). Blíží-li se x libovolně blízko s kterékoli strany k číslu 1, blíží se y libovolně blízko k číslu 2; tento fakt vyjadřujeme slovy, že limita dané funkce v bodě 1 je rovna číslu 2, a zapisujeme



Obr. 25

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 2 \quad \text{nebo} \quad \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2.$$

Na tom, že hodnota $f(1)$ není definována, nezáleží. Naše „blížení", o kterém jsme dosud mluvili, přesně vyjádříme takto: Na ose y zvolíme zcela libovolný otevřený interval J_y, který obsahuje bod 2 jako vnitřní. Takový interval jsme na str. 14 nazvali okolím bodu 2. Pak dovedeme na ose x nalézt takový interval J_x, který je okolím bodu 1, že pro všechna x z intervalu J_x (ovšem s výjimkou bodu 1, pro nějž není $f(1)$ definováno) příslušná hodnota $f(x)$ padne do intervalu J_y.

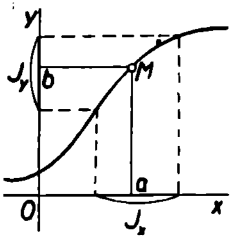
Vyslovíme tedy tuto definici:

Funkce f má v bodě a limitu b, když ke každému okolí J_y bodu b dovedeme určit*) takové okolí J_x

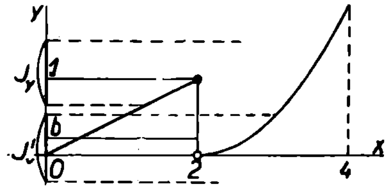
*) Slova „dovedeme určit" znamenají, že ke každému okolí J_y existuje okolí J_x bodu a, které má žádané vlastnosti.

bodu a, že pro každé $x \neq a$ z J_x hodnota $f(x)$ patří do J_y (obr. 26).

Znovu si připomeňme, že funkce f je definována ve všech bodech nějakého okolí J_x bodu a. Hodnota $f(a)$ může při tom být jakákoli nebo nemusí být vůbec definována.



Obr. 26



Obr. 27

Není ovšem nutné, aby měla každá funkce v každém bodě svého oboru limitu. Uvedeme příklad funkce, která limitu nemá.

Příklad 15. Funkce f budiž definována takto:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x & \text{pro } 0 \leqq x \leqq 2, \\ \frac{1}{2}(x-2)^2 & \text{pro } 2 < x \leqq 4. \end{cases}$$

Tato funkce je definována v intervalu $\langle 0, 4 \rangle$, její průběh znázorňuje obr. 27. Podle její definice je $f(2) = 1$, ale tato hodnota není limitou funkce f v bodě 2, neboť je možné vymezit takové okolí J_y bodu 1, že k němu neexistuje žádné okolí J_x bodu 2 tak, aby pro všecka $x \neq 2$ z J_x hodnota $f(x)$ padla do J_y. Stačí volit J_y tak, aby neobsahovalo bod 0, jak je vidět z obr. 27. Žádná jiná hodnota $b \neq 1$ není však také limitou funkce f v bodě 2, neboť pak lze vždy vymezit takové okolí J'_y bodu b, že neobsahuje bod 1. K tomuto okolí J'_y pak zase nelze nalézt žádné okolí J_x bodu 2 tak, aby pro všecka $x \neq 2$ z J_x hodnota $f(x)$ padla do J'_y.

Příklad 16. Dokážeme, že funkce

$$f(x) = kx + q,$$

definovaná pro každé x, má v bodě a limitu $b = ka + q$. Ukážeme, že ke každému okolí (y_1, y_2), kde $y_1 < b < y_2$, dovedeme nalézt takové okolí (x_1, x_2), kde $x_1 < a < x_2$, že pro všecka x z (x_1, x_2) hodnota $f(x)$ padne do (y_1, y_2).

Zvolme tedy libovolné okolí (y_1, y_2) bodu b, t. j. zvolme dvě čísla y_1, y_2 tak, aby $y_1 < b < y_2$. Protože $b = ka + q$, musí být

$$y_1 < ka + q < y_2. \tag{a}$$

(1) Je-li $k > 0$, dostáváme odtud

$$\frac{y_1 - q}{k} < a < \frac{y_2 - q}{k}.$$

Volíme-li x tak, aby $\frac{y_1 - q}{k} < x < \frac{y_2 - q}{k}$, plyne odtud $y_1 - q < kx < y_2 - q$, t. j. $y_1 < kx + q < y_2$. Je tedy interval $\left(\frac{y_1 - q}{k}, \frac{y_2 - q}{k}\right)$ hledaným okolím bodu a.

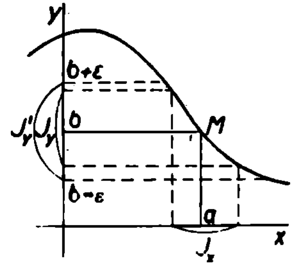
(2) Je-li $k < 0$, dostáváme z podmínky (a)

$$\frac{y_1 - q}{k} > a > \frac{y_2 - q}{k} \text{ čili } \frac{y_2 - q}{k} < a < \frac{y_1 - q}{k}.$$

Volíme-li x tak, aby $\frac{y_2 - q}{k} < x < \frac{y_1 - q}{k}$, plyne odtud $y_2 - q > kx > y_1 - q$ čili $y_1 < kx + q < y_2$. Je tedy $\left(\frac{y_2 - q}{k}, \frac{y_1 - q}{k}\right)$ hledaným okolím bodu a.

(3) Je-li $k = 0$, je $f(x) = q$ pro každé x; můžeme tedy interval (x_1, x_2) volit jakkoli a pro každé x z (x_1, x_2) je $y_1 < q < y_2$.

K definici, která byla výše vyslovena, poznamenejme ještě totó: Podaří-li se nám k nějakému okolí J_y bodu b nalézt takové okolí J_x bodu a, že pro všecka $x \neq a$ z J_x hodnota $f(x)$ padne do J_y, padnou všecky tyto hodnoty $f(x)$ také do každého širšího okolí J'_y bodu b, do něhož patří všecky body okolí J_y. Nalezneme-li tedy okolí J_x bodu a příslušné ke zvolenému okolí J_y bodu b, nalezli jsme tím zároveň také okolí J_x bodu a příslušné k širšímu okolí J'_y bodu b. Toho často užíváme ke zjednodušení počtu a okolí J'_y bodu b volíme tak, aby mělo bod b právě uprostřed (obr. 28). Zvolíme nějaké číslo $\varepsilon > 0$ a do J'_y vezmeme taková $f(x)$, pro něž $b - \varepsilon < f(x) < b + \varepsilon$ čili podle (3) (str. 16) $|f(x) - b| < \varepsilon$. Definici limity pak často vyslovujeme takto:



Obr. 28

Funkce f má v bodě a limitu b, když ke každému číslu $\varepsilon > 0$ dovedeme nalézt takové okolí J_x bodu a, že pro všecka $x \neq a$ z J_x platí $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Podobně můžeme vyšetřovat, co se děje, když x neomezeně vzrůstá nebo neomezeně klesá. Blíží-li se při tom hodnota $f(x)$ nějakému číslu, nazýváme toto číslo *limitou* funkce f *v nevlastním bodě* ∞ *nebo* $-\infty$. K tomu je ovšem třeba předpokládat, že funkce f je definována v neomezeném intervalu. Každý neomezený interval (k, ∞) můžeme nazývat *okolím nevlastního bodu* ∞ a každý interval $(-\infty, k)$ okolím nevlastního bodu $-\infty$. Znovu však podotkneme, že symboly ∞ a $-\infty$ neznačí žádné číslo a že jim neodpovídají žádné body na ose číselné. Názvů „bod ∞“ a „bod $-\infty$“ užíváme jen proto, abychom se vyjadřovali stručněji. Abychom tyto dva „body“ zřetelně odlišili od ostatních bodů číselné osy, mluvíme o nevlastních bodech. Analogicky podle předchozího vyslovíme definici:

Funkce f má v nevlastním bodě ∞ nebo $-\infty$ limitu b, když ke každému okolí J_y bodu b dovedeme stanovit takové okolí J_x tohoto nevlastního bodu, že pro každé x z J_x hodnota $f(x)$ padne do J_y.

Pro takto definované limity budeme užívat symbolů

$$\lim_{x \to \infty} f(x), \quad \lim_{x \to -\infty} f(x).$$

Příklad 17. Dokážeme, že funkce

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

má v nevlastním bodě ∞ i v nevlastním bodě $-\infty$ za limitu nulu. Za J_y zvolíme okolí $(-\varepsilon, \varepsilon)$ bodu 0, při čemž $\varepsilon > 0$; pak hodnoty $f(x)$ spadající do tohoto intervalu vyhovují nerovnostem

$$-\varepsilon < \frac{1}{x} < \varepsilon.$$

Odtud plyne buď $x > \frac{1}{\varepsilon}$, nebo $x < -\frac{1}{\varepsilon}$. Pro každé x z intervalu $\left(\frac{1}{\varepsilon}, \infty\right)$ je hodnota $f(x) = \frac{1}{x}$ definována a padne do J_y. Je tedy $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$. Podobně pro každé x z intervalu $\left(-\infty, -\frac{1}{\varepsilon}\right)$ hodnota $f(x) = \frac{1}{x}$ padne rovněž do J_y. Je tedy také $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$ (viz obr. 19).

Obdobnou definici zavedeme i tehdy, když místo funkce definované na nějakém neomezeném intervalu máme posloupnost, t. j. funkci, jejímž oborem je množina přirozených čísel. Také tu se může stát, že se hodnota a_n blíží určitému číslu, když n roste nade všecky meze. Definujeme:

Posloupnost, jejíž n-tý člen je a_n, má limitu b, když ke každému okolí J_y bodu b dovedeme stanovit takové číslo k, aby pro všecka přirozená čísla $n > k$ patřila hodnota a_n do J_y.

To, že číslo b je limitou posloupnosti, jejíž obecný člen je a_n, zapisujeme $b = \lim\limits_{n \to \infty} a_n$.

Příklad 18. Posloupnost, jejíž n-tý člen je

$$a_n = \frac{n}{n+1},$$

má za limitu číslo 1. Dokážeme to. Za J_y zvolíme interval $(1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon)$, kde $\varepsilon > 0$ je libovolné číslo kladné. Je-li n přirozené číslo, je $\dfrac{n}{n+1} < 1$ pro každé n, a tedy také $a_n < 1 + \varepsilon$ pro každé n. Zbývá nalézt taková n, pro něž $1 - \varepsilon < a_n$ čili $1 - \varepsilon < \dfrac{n}{n+1}$. Odtud však plyne $n > \dfrac{1}{\varepsilon} - 1$. Je-li tedy n libovolné přirozené číslo z intervalu $\left(\dfrac{1}{\varepsilon} - 1, \infty\right)$, pak pro každé takové n je $1 - \varepsilon < a_n < 1 + \varepsilon$, t. j. hodnota a_n patří do J_y, takže vskutku $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 1$.

Někdy se stává, že hodnota $f(x)$ padne do intervalu J_y jen pro taková x, která jsou větší než a, t. j. která leží v pravém okolí tohoto bodu (viz str. 14). Pak říkáme, že funkce f má v bodě a *limitu zprava* rovnou číslu b. V obdobném smyslu mluvíme o *limitě zleva*. Definujeme:

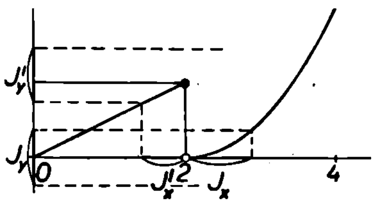
Funkce f má v bodě a limitu $\begin{matrix}\text{zprava}\\\text{zleva}\end{matrix}$ rovnou číslu b, když ke každému okolí J_y bodu b dovedeme nalézt takové $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{pravé}}{\text{levé}}$ okolí J_x bodu a, že pro všecka $x \neq a$ z J_x hodnota $f(x)$ patří do J_y.

To, že číslo b je limitou zprava funkce f v bodě a, zapisujeme $b = \lim\limits_{x \to a+} f(x)$ a to, že číslo b je limitou zleva funkce f v bodě a, zapisujeme $b = \lim\limits_{x \to a-} f(x)$.

Příklad 19. Funkce

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x & \text{pro } 0 \leqq x \leqq 2, \\ \frac{1}{2}(x-2)^2 & \text{pro } 2 < x \leqq 4, \end{cases}$$

kterou jsme již vyšetřovali v příkladu 14, má $\lim\limits_{x \to 2+} f(x) = 0$ a $\lim\limits_{x \to 2-} f(x) = 1$, neboť ke každému okolí J_y bodu 0 dovedeme nalézt takové pravé okolí J_x bodu 2, že pro všecka $x \neq 2$ z J_x hodnota $f(x)$ padne do J_y, a ke každému okolí J'_y bodu 1 dovedeme nalézt takové levé okolí J'_x bodu 2, že pro všecka x z J'_x hodnota $f(x)$ padne do J'_y (obr. 29).



Obr. 29

Nyní si dokážeme několik důležitých vět o limitách.

Věta **3**. Funkce f má v bodě a limitu b tehdy a jen tehdy, když má v tomto bodě limitu zprava i limitu zleva a obě tyto limity jsou rovny číslu b.

Důkaz. 1. To, že funkce f má v bodě a limitu b, znamená, že ke každému okolí J_y bodu b dovedeme nalézt okolí J_x bodu a tak, že pro všecka $x \neq a$ z J_x hodnota $f(x)$ padne do J_y. Platí-li naše tvrzení pro všecka $x \neq a$ z J_x, platí zajisté i pro ta x z J_x, která leží vpravo od a, t. j. pro všecka $x \neq a$

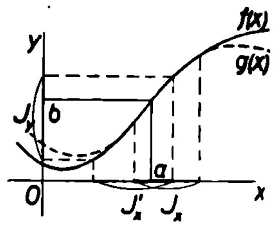
z nějakého pravého okolí bodu a. Na hodnotě $f(a)$ při tom nezáleží. Proto $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = b$. Z téhož důvodu však naše tvrzení platí i pro ta x z J_x, která leží vlevo od a, t. j. pro všecka $x \neq a$ z nějakého levého okolí bodu a. Na hodnotě $f(a)$ při tom opět nezáleží. Proto $\lim\limits_{x\to a-} f(x) = b$.

2. Obráceně to, že funkce f má v bodě a limitu zprava i limitu zleva a že jsou obě rovny číslu b, znamená, že ke každému okolí J_y bodu b dovedeme nalézt takové pravé okolí J'_x bodu a a takové levé okolí J''_x bodu a, že pro všecka $x \neq a$ z těchto dvou okolí hodnota $f(x)$ padne do J_y. Sjednocením obou okolí J'_x a J''_x dostaneme jakési okolí J_x bodu a. Platí-li naše tvrzení pro všecka $x \neq a$ z J'_x i z J''_x, platí pro všecka $x \neq a$ z okolí J_x. To však znamená, že $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$.

Aby nemohl nastat omyl, budeme někdy pro zřetelnost přidávat ke slovu „limita" ještě slovo „oboustranná", abychom jasně naznačili, že tím nemíníme limitu zprava ani limitu zleva.

Věta **4**. Nechť dvě funkce f a g pro všecka $x \neq a$ z jistého okolí J_x bodu a splňují rovnost $f(x) = g(x)$. ~~Pak~~ platí: Má-li funkce f limitu b v bodě a, má funkce g v témž bodě touž limitu.

Důkaz. To, že $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, znamená, že ke každému okolí J_y bodu b existuje okolí J'_x bodu a tak, že hodnota $f(x)$ pro všecka $x \neq a$ z J'_x patří do J_y (viz obr. 30). Sestrojme průnik J''_x obou okolí J_x a J'_x. Pak pro každé $x \neq a$ z J''_x platí:



Obr. 30

a) $f(x) = g(x)$, neboť x patří do J_x, a

b) $f(x)$ patří do J_y, neboť x patří do J'_x.

Proto také $g(x)$ patří do J_y. Tím je ke každému okolí J_y bodu b nalezeno okolí J''_x bodu a tak, že hodnota $g(x)$ pro každé $x \neq a$ z J''_x patří do J_y. To však znamená, že $\lim\limits_{x\to a} g(x) = b$.

Jestliže $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$, říkáme, že funkce f je *nekonečně malá* v okolí bodu a. Podobně je-li $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$ nebo je-li $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$, říkáme, že funkce f je nekonečně malá v okolí nevlastního bodu ∞ nebo $-\infty$, a konečně je-li $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = 0$ nebo $\lim\limits_{x\to a-} f(x) = 0$, říkáme, že funkce f je nekonečně malá zprava nebo zleva v okolí bodu a.

Vzhledem k poznámce uvedené na str. 35 můžeme definici funkce nekonečně malé v okolí bodu a vyslovit také takto: Funkce f je nekonečně malá v okolí bodu a, když lze ke každému $\varepsilon > 0$ nalézt takové okolí J_x bodu a, že pro všecka $x \neq a$ z J_x je $|f(x)| < \varepsilon$.

Věta 5. Výrok: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ platí tehdy a jen tehdy, když funkce $f(x) - b$ je nekonečně malá v okolí bodu a.

Důkaz. To, že $\lim f(x) = b$, značí, že ke každému $\varepsilon > 0$ dovedeme nalézt takové okolí J_x bodu a, že pro všecka $x \neq a$ z J_x je $|f(x) - b| < \varepsilon$. To však je totéž, jako kdybychom řekli, že funkce $f(x) - b$ je nekonečně malá v okolí bodu a. Obráceně: To, že funkce $f(x) - b$ je nekonečně malá v okolí bodu a, znamená, že ke každému $\varepsilon > 0$ dovedeme nalézt takové okolí J_x bodu a, že pro všecka $x \neq a$ z J_x je $|f(x) - b| < \varepsilon$. To však je totéž, jako kdybychom řekli, že $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$.

Z dokázané věty plyne, že je-li $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, je $f(x) = b + \varphi(x)$, kde $\varphi(x) = f(x) - b$ je funkce nekonečně malá v okolí bodu a.

Věta 6. Nechť funkce f a g jsou nekonečně malé v okolí bodu a. Pak i funkce $k \,.\, f(x) + h \,.\, g(x)$, kde k, h jsou daná čísla, je nekonečně malá v okolí bodu a.

Důkaz. Je-li $k = h = 0$, pak v každém okolí J_x bodu a je $k \,.\, f(x) + h \,.\, g(x) = 0$, proto $|k \,.\, f(x) + h \,.\, g(x)| < \varepsilon$, kde ε je zcela libovolné číslo kladné. Můžeme tedy v dalším předpokládat, že aspoň jedno z čísel k, h je různé od nuly.

Naše předpoklady značí, že ke každému $\varepsilon' > 0$ lze najít takové okolí J'_x bodu a, že pro všecka $x \neq a$ z J'_x je $|f(x)| < \varepsilon'$. Podobně lze ke každému $\varepsilon'' > 0$ najít takové okolí J''_x bodu a, že pro všecka $x \neq a$ z J''_x je $|g(x)| < \varepsilon''$. Máme dokázat, že také ke každému $\varepsilon > 0$ lze najít takové okolí J_x bodu a, že pro všecka $x \neq a$ z J_x je $|k \,.\, f(x) + h \,.\, g(x)| < \varepsilon$. Budiž tedy dáno libovolné $\varepsilon > 0$ a zvolme ε' a ε'' tak, aby

$$\varepsilon' \leqq \frac{\varepsilon}{|k| + |h|}, \quad \varepsilon'' \leqq \frac{\varepsilon}{|k| + |h|}.$$

K těmto zvoleným číslům ε' a ε'' nalezněme příslušná okolí J'_x a J''_x. Obě nerovnosti $|f(x)| < \varepsilon'$, $|g(x)| < \varepsilon''$ jsou splněny pro všecka $x \neq a$ z průniku J_x intervalů J'_x a J''_x. Pro každé takové x je podle vztahů (1) a (2)

$$|k \,.\, f(x) + h \,.\, g(x)| \leqq |k| \,.\, |f(x)| + |h| \,.\, |g(x)| < |k|\varepsilon' +$$
$$+ |h|\varepsilon'' \leqq |k| \frac{\varepsilon}{|k| + |h|} + |h| \frac{\varepsilon}{|k| + |h|} = \varepsilon.$$

Poněvadž J_x je okolí bodu a, je $\lim\limits_{x \to a}[k \,.\, f(x) + h \,.\, g(x)] = 0$, jak jsme měli dokázat.

Odtud plyne jako důsledek, že každá funkce může mít v každém bodě svého oboru nejvýše jednu limitu. To, že nemusí mít žádnou limitu, vyplynulo z příkladu 15. To, že nemůže mít dvě, dokážeme takto:

Dejme tomu, že by funkce f měla v bodě a dvě limity b a c a že by bylo $b \neq c$. Protože b je limita funkce f v bodě a, je funkce $f(x) - b$ nekonečně malá v okolí bodu a. Protože c je rovněž limita funkce f v bodě a, je také funkce $f(x) - c$ nekonečně malá v okolí bodu a. Podle právě dokázané věty 6 je i funkce $\varphi(x) = [f(x) - b] - [f(x) - c] = c - b$ nekonečně malá v okolí bodu a. To znamená: zvolíme-li libovolné $\varepsilon > 0$, je možno nalézt takové okolí J_x bodu a, že pro všecka $x \neq a$ z J_x je $|\varphi(x)| < \varepsilon$ čili $|c - b| < \varepsilon$. Zvolíme-li však $\varepsilon < |c - b|$, dostáváme $|c - b| < |c - b|$, ale to není pravda. Není tedy možné, aby funkce f měla v bodě a dvě různé limity b a c.

Je ovšem možné, aby měla funkce f v bodě a limitu zprava rovnou b a limitu zleva rovnou c a aby $b \neq c$ (viz příklad 19); limita zprava ani limita zleva však není limita.

Funkce g, která má tu vlastnost, že pro všecka x z jistého intervalu J_x je $h < g(x) < k$, kde k a h jsou vhodná čísla, se jmenuje *omezená* v tomto intervalu. Označíme-li větší z čísel $|k|$, $|h|$ písmenem m, lze naši podmínku zapsat ve tvaru $|g(x)| < m$, kde $m > 0$.

Za interval J_x budeme často volit nějaké okolí bodu a. O funkci g budeme říkati, že je omezená v okolí J_x bodu a, i když hodnota $g(a)$ nebude definována, ale pro všecka $x \neq a$ z J_x bude platit $|g(x)| < m$, kde $m > 0$.

Věta 7. Nechť je funkce f nekonečně malá v okolí bodu a a funkce g je v jistém okolí bodu a omezená. Pak je funkce $f(x) \, . \, g(x)$ nekonečně malá v okolí bodu a.

Důkaz. Podle daných předpokladů lze ke každému $\varepsilon' > 0$ nalézt takové okolí J'_x bodu a, že pro všecka $x \neq a$ z J'_x je $|f(x)| < \varepsilon'$. Dále existuje takové okolí J_x bodu a, že pro všecka $x \neq a$ z J_x je $|g(x)| < m$, kde $m > 0$ je vhodné číslo. Pak pro každé $x \neq a$ z průniku J''_x intervalů J_x a J'_x je

$$|f(x) \, . \, g(x)| = |f(x)| \, . \, |g(x)| < m\varepsilon'.$$

Volíme-li tedy zcela libovolné $\varepsilon > 0$, stačí volit ε' tak, aby

$m\varepsilon' \leqq \varepsilon$, t. j. $\varepsilon' \leqq \frac{\varepsilon}{m}$. Pak pro každé $x \neq a$ z J''_x je $|f(x) \,.\, g(x)| < \varepsilon$. Poněvadž J''_x je okolí bodu a, proto $\lim\limits_{x \to a}[f(x) \,.\, g(x)] = 0$.

Věta platí samozřejmě i tehdy, když je funkce g nekonečně malá v okolí bodu a, neboť taková funkce g je rovněž omezená v jistém okolí bodu a, jak plyne z nerovnosti $|g(x)| < \varepsilon$ platné pro každé $x \neq a$ ve vhodném okolí J_x bodu a.

Věta 8. Je-li $\lim\limits_{x \to a} g(x) = c \neq 0$, je funkce $\frac{1}{g(x)}$ omezená v jistém okolí bodu a.

Důkaz. Poněvadž $\lim\limits_{x \to a} g(x) = c$, existuje ke každému $\varepsilon > 0$ takové okolí J_x bodu a, že pro všecka $x \neq a$ z J_x je $|g(x) - c| < \varepsilon$. Proto

$$|c| - |g(x)| \leqq ||g(x)| - |c|| \leqq |g(x) - c| < \varepsilon$$

podle (1), takže $|g(x)| > |c| - \varepsilon$. Volíme-li $\varepsilon < |c|$, a to lze, neboť $c \neq 0$, je $|c| - \varepsilon > 0$, takže pro každé $x \neq a$ z J_x platí

$$\left|\frac{1}{g(x)}\right| < \frac{1}{|c| - \varepsilon}.$$

Věta 9. Nechť $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, $\lim\limits_{x \to a} g(x) = c$. Potom

a) $\lim\limits_{x \to a}[k \,.\, f(x) + h \,.\, g(x)] = kb + hc$, kde k a h jsou daná čísla,

b) $\lim\limits_{x \to a}[f(x) \,.\, g(x)] = bc$,

c) $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{b}{c}$, pokud $c \neq 0$.

Důkaz. Je-li $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, $\lim\limits_{x \to a} g(x) = c$, pak podle věty 5 je $f(x) = b + \varphi(x)$, $g(x) = c + \psi(x)$, kde φ a ψ jsou funkce nekonečně malé v okolí bodu a. Potom

$$\text{a)}\quad k \,.\, f(x) + h \,.\, g(x) = k[b + \varphi(x)] + h[c + \psi(x)] = \\ = kb + hc + k \,.\, \varphi(x) + h \,.\, \psi(x).$$

Avšak $k \,.\, \varphi(x) + h \,.\, \psi(x)$ je podle věty 6 funkce nekonečně malá v okolí bodu a. Proto podle věty 5 je $\lim\limits_{x \to a}[k \,.\, f(x) + h \,.\, g(x)] = kb + hc$.

$$\text{b)}\quad f(x) \,.\, g(x) = [b + \varphi(x)][c + \psi(x)] = \\ = bc + c \,.\, \varphi(x) + b \,.\, \psi(x) + \varphi(x) \,.\, \psi(x).$$

Avšak $c \,.\, \varphi(x) + b \,.\, \psi(x) = \varrho(x)$ je podle věty 6 funkce nekonečně malá v okolí bodu a a $\varphi(x) \,.\, \psi(x) = \sigma(x)$ je podle věty 7 rovněž funkce nekonečně malá v okolí bodu a. Proto také $\varrho(x) + \sigma(x)$ je podle věty 6 funkce nekonečně malá v okolí bodu a, takže podle věty 5 je $\lim\limits_{x \to a}[f(x) \,.\, g(x)] = bc$.

$$\text{c)}\quad \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{b}{c} + \frac{b + \varphi(x)}{c + \psi(x)} - \frac{b}{c} = \frac{b}{c} + \\ + \frac{c \,.\, \varphi(x) - b \,.\, \psi(x)}{c[c + \psi(x)]} = \frac{b}{c} + \frac{1}{g(x)} \,.\, [\varphi(x) - \frac{b}{c} \,.\, \psi(x)].$$

Avšak $\dfrac{1}{g(x)}$ je podle věty 8 omezená v jistém okolí bodu a a $\varphi(x) - \dfrac{b}{c} \,.\, \psi(x)$ je pro $c \neq 0$ podle věty 6 nekonečně malá v okolí bodu a. Proto je podle věty 7 i funkce $\dfrac{1}{g(x)}\,[\varphi(x) - \dfrac{b}{c} \,.\, \psi(x)]$ nekonečně malá v okolí bodu a, takže podle věty 5 je $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{b}{c}$.

Věta **10.** Je-li $\lim_{x \to a} f(x) = b \neq 0$, existuje takové okolí J_a bodu a, že pro všecka $x \neq a$ z J_a hodnota $f(x)$ má totéž znaménko jako číslo b.

Důkaz. Je-li $\lim_{x \to a} f(x) = b$, znamená to, že ke každému $\varepsilon > 0$ existuje takové okolí J_a bodu a, že pro všecka $x \neq a$ z J_a je $|f(x) - b| < \varepsilon$, čili podle (3) platí $b - \varepsilon < f(x) < b + \varepsilon$. Je-li $b > 0$, volme $\varepsilon = b$. Pak pro všecka $x \neq a$ z J_a je $0 < f(x)$. Je-li však $b < 0$, volme $\varepsilon = -b$. Pak rovněž pro všecka $x \neq a$ z J_a je $f(x) < 0$.

Věta **11.** Je-li $\lim_{x \to a} f(x) > \lim_{x \to a} g(x)$, existuje takové okolí J_a bodu a, že pro všecka $x \neq a$ z J_a je $f(x) > g(x)$.

Důkaz. Vezmeme-li v úvahu funkci $f(x) - g(x)$, je $\lim_{x \to a}[f(x) - g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) - \lim_{x \to a} g(x) > 0$ (věta 9); proto podle věty 10 existuje takové okolí J_a bodu a, že pro všecka $x \neq a$ z J_a je $f(x) - g(x) > 0$ čili $f(x) > g(x)$.

Je-li $g(x) = k$, zní naše věta takto: Je-li $\lim_{x \to a} f(x) > k$, kde k je konstanta, existuje takové okolí J_a bodu a, že pro všecka $x \neq a$ z J_a je $f(x) > k$.

Věta **12.** Jestliže existují limity $\lim_{x \to a} f(x) = b$, $\lim_{x \to a} g(x) = c$ a pro všecka $x \neq a$ z jistého okolí J_a bodu a platí $f(x) \leqq g(x)$, pak $b \leqq c$.

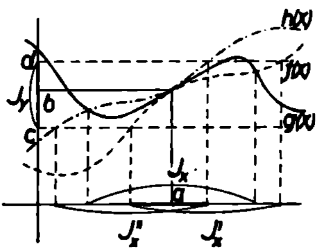
Důkaz. Kdyby bylo $b > c$, muselo by podle věty 11 existovat takové okolí J_a bodu a, že pro všecka $x \neq a$ z J_a by bylo $f(x) > g(x)$, ale to není možné, neboť naše věta žádá, aby pro všecka x z jistého okolí bodu a bylo právě naopak $f(x) \leqq g(x)$.

Je-li $g(x) = k$, zní naše věta takto: Jestliže existuje limita $\lim_{x \to a} f(x) = b$ a jestliže pro všecka $x \neq a$ z jistého okolí J_x bodu a platí $f(x) \leqq k$, kde k je konstanta, pak $b \leqq k$.

Je třeba výslovně upozornit na to, že i když je hodnota $f(x)$ menší než $g(x)$ pro všecka $x \neq a$ z jistého okolí J_x bodu a, může se stát, že si příslušné limity v bodě a mohou být rovny, jak ukazuje tento příklad: Je-li $f(x) = 1 - x^2$ a $g(x) = 1 + x^2$, je pro každé $x \neq 0$ $f(x) < g(x)$; přesto však $\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} g(x) = 1$.

Věta **13**. Jestliže pro každé $x \neq a$ z jistého okolí J_x bodu a platí $f(x) \leqq g(x) \leqq h(x)$ a existují-li limity $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x)$, existuje také limita $\lim_{x \to a} g(x)$ a je rovna oběma limitám předcházejícím.

Důkaz. Označme b společnou hodnotu limit $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x)$. Pak ke každému okolí J_y bodu b existuje okolí J'_x bodu a tak, že pro všecka $x \neq a$ z J'_x hodnota $f(x)$ padne do J_y. Volíme-li za J_y interval (c, d), kde $c < b < d$, znamená to, že pro každé $x \neq a$ z J'_x je $c < f(x) < d$. Dále k okolí J_y existuje okolí J''_x bodu a tak, že pro všecka $x \neq a$ z J''_x hodnota $h(x)$ padne do J_y, t. j. platí $c < h(x) < d$. Utvořme průnik $\bar{J}_x$ okolí J_x, J'_x a J''_x. Pak pro každé $x \neq a$ z $\bar{J}_x$ platí



Obr. 31

a) $f(x) \leqq g(x) \leqq h(x)$, neboť x patří do J_x,

b) $c < f(x) < d$, neboť x patří do J'_x,

c) $c < h(x) < d$, neboť x patří do J''_x.

Proto je celkem $c < f(x) \leqq g(x) \leqq h(x) < d$ čili $c < g(x) < < d$, takže $g(x)$ patří rovněž do J_y. Tím je ke každému okolí J_y bodu b nalezeno okolí J_x bodu a tak, že pro každé $x \neq a$ hodnota $g(x)$ padne do J_y. To však znamená, že $\lim\limits_{x \to a} g(x) = b$ (viz obr. 31).

Věty obdobné větám 4—13 dostaneme, když místo oboustranných limit vezmeme pouze limitu zprava (po případě limitu zleva). Ačkoli těchto vět pro jednostrannou limitu několikrát ještě použijeme, nebudeme je pro úsporu místa dokazovat. Ostatně tyto důkazy by byly jen opakováním důkazů právě uvedených.

Jestliže v definicích limity uvedených na počátku této kapitoly nahradíme bod b nevlastním bodem ∞ nebo $-\infty$, dostaneme definici t. zv. *nevlastní limity*. To, že funkce f má v bodě a nevlastní limitu ∞, píšeme $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$. Znamená to, že ke každému okolí (k, ∞) nevlastního bodu ∞ existuje takové okolí J_x bodu a, že pro všecka $x \neq a$ z J_x padne hodnota $f(x)$ do intervalu (k, ∞). Podobný význam mají i ostatní případy.

Funkce může mít nevlastní limitu i v nevlastním bodě. Má-li na příklad funkce f v nevlastním bodě ∞ nevlastní limitu ∞, píšeme to $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$ a znamená to: Ke každému okolí (k, ∞) nevlastního bodu ∞ existuje okolí (h, ∞) nevlastního bodu ∞ tak, že pro všecka x z intervalu (h, ∞) hodnota $f(x)$ padne do intervalu (k, ∞).

P ř í k l a d 20. Dokážeme, že $\lim\limits_{x \to 0+} \frac{1}{x} = \infty$, $\lim\limits_{x \to 0-} \frac{1}{x} = -\infty$, t. j. že funkce $\frac{1}{x}$ má v bodě 0 nevlastní limitu zprava ∞ a nevlastní limitu zleva $-\infty$. Volíme-li libovolné okolí (k, ∞) nevlastního bodu ∞, dovedeme udat takové pravé okolí J_x bodu 0, že pro všecka $x \neq 0$ z J_x hodnota $f(x)$ padne do intervalu (k, ∞). Stačí se omezit jen na kladná k. Ptáme se tedy, pro která x je $f(x) > k$ čili $\frac{1}{x} > k$. Dostáváme $0 < x < \frac{1}{k}$, t. j. daná nerovnost je splněna pro každé x z intervalu $\left(0, \frac{1}{k}\right)$. Je tedy vskutku $\lim\limits_{x \to 0+} \frac{1}{x} = \infty$. Podobně do okolí $(-\infty, k')$, kde $k' < 0$, nevlastního bodu $-\infty$ padnou ty hodnoty $f(x)$, pro něž je $\frac{1}{x} < k'$. Odtud plyne $\frac{1}{k'} < x < 0$, t. j. daná nerovnost je splněna pro každé x z intervalu $\left(\frac{1}{k'}, 0\right)$, který tvoří levé okolí bodu 0. Je tedy $\lim\limits_{x \to 0-} \frac{1}{x} = -\infty$.

Cvičení.

11. Dokažte, že $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{|x| - 1} = 2$, $\lim\limits_{x \to -1} \frac{x^2 - 1}{|x| - 1} = 2$.

12. Dokažte, že a) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x^2} = 0$, $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x^2} = 0$, b) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$.

13. Dokažte, že a) $\lim\limits_{x \to \infty} x^2 = \infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = \infty$, b) $\lim\limits_{x \to \infty} x^3 = \infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$.

14. Dokažte, že a) při $c \neq 0$ je $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{ax + b}{cx + d} = \frac{a}{c}$, $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{ax + b}{cx + d} = \frac{a}{c}$, b) při $c \neq 0$ a $bc > ad$ je $\lim\limits_{x \to -\frac{d}{c}+} \frac{ax + b}{cx + d} = \infty$, $\lim\limits_{x \to -\frac{d}{c}-} \frac{ax + b}{cx + d} = -\infty$.

15. Dokažte, že a) $\lim\limits_{x \to 0} f(x + a)$ znamená totéž jako $\lim\limits_{x \to a} f(x)$, b) $\lim\limits_{x \to \infty} f(x + a)$ znamená totéž jako $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$, c) $\lim\limits_{x \to a} |f(x)| = \infty$ znamená totéž jako $\lim\limits_{x \to a} \frac{1}{f(x)} = 0$.

16. Jsou-li funkce f a g omezené v intervalu J_x, pak i funkce $f(x) + g(x)$, $f(x) - g(x)$, $f(x) \,.\, g(x)$ jsou omezené v intervalu J_x. Dokažte.

17. Je-li $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, je $\lim\limits_{x \to a} |f(x)| = |b|$. Dokažte. Platí věta také obráceně?

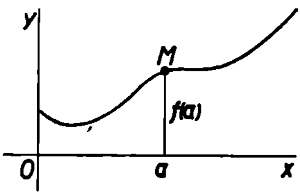
18. Je-li $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$ a jestliže pro každé $x \neq a$ z nějakého okolí J_x bodu a platí $|g(x)| \leqq |f(x)|$, pak také $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$. Dokažte.

19. Je-li funkce f omezená v nějakém okolí bodu a, není $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{1}{f(x)} = 0$. Dokažte.

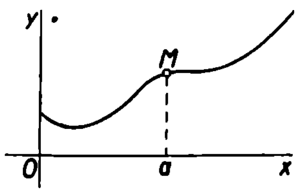
20. Věty 4—13 dokažte pro limitu zprava a pro limitu zleva.

III. SPOJITOST

Je dána funkce f definovaná ve všech bodech nějakého okolí J_x bodu a nejvýše s výjimkou tohoto bodu a. Znázor-



Obr. 32

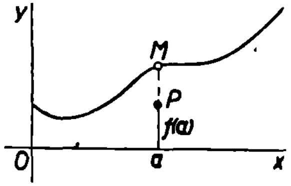


Obr. 33

níme-li si tuto funkci graficky, bude v obvyklých případech tímto znázorněním jakási křivka. Mysleme si, že tuto křivku probíháme bod po bodu tak, že se blížíme k bodu M, jehož vzdálenost od osy y je a.

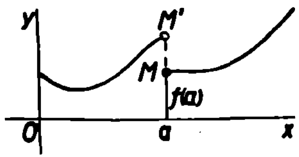
a) Jestliže hodnotě a proměnné x odpovídá hodnota $f(a)$ funkce f tak, že bod M o souřadnicích a, $f(a)$ leží na naší křivce, můžeme ve svém pohybu pokračovat „spojitě“ dále za bod M na druhou stranu. Říkáme, že funkce f je v bodě a *spojitá* (obr. 32). To však neznamená nic jiného než to, že limita funkce f v bodě a je právě rovna hodnotě $f(a)$, t. j. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

b) Může se však také stát, že bod M k naší křivce nepatří, a to buď proto, že funkce f není vůbec v bodě a definována (obr. 33), nebo proto, že hodnota $f(a)$ je definována jinak a je znázorněna bodem P, který je různý od bodu M (obr. 34). V žádném z těchto případů nemůžeme v pohybu po křivce dále pokračovat, neboť křivka je v bodě M přerušena. Také neplatí rovnice $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$; v prvém případě proto, že $f(a)$ není vůbec definováno, a ve druhém případě proto, že $f(a)$ značí jinou hodnotu než $\lim\limits_{x \to a} f(x)$.



Obr. 34

c) Konečně se může stát, že rovnice $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ neplatí proto, že limita funkce f v bodě a neexistuje (obr. 35). Ani v tomto případě nelze křivku v bodě M probíhat spojitě.



Obr. 35

Vyslovíme tedy tuto definici:

Funkce f je v bodě a spojitá, když $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Zcela analogicky vyslovíme také definici jednostranné spojitosti v bodě a, t. j. *spojitosti zprava* nebo *spojitosti zleva*:

Funkce f je v bodě a spojitá zprava, když $\lim\limits_{x \to a+} f(x) = f(a)$.

Funkce f je v bodě a spojitá zleva, když $\lim\limits_{x \to a-} f(x) = f(a)$.

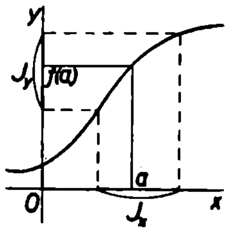
Funkce znázorněná na obr. 35 je podle této definice v bodě a spojitá zprava, není však v něm spojitá zleva.

O spojitých funkcích vyslovíme větu:

Věta **14.** Funkce f je spojitá v bodě a tehdy a jen tehdy, když je v něm spojitá zprava i spojitá zleva.

Důkaz. Věta je přímým důsledkem věty 3, podle níž $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ značí přesně totéž jako $\lim\limits_{x \to a+} f(x) = \lim\limits_{x \to a-} f(x) = f(a)$.

Definici spojitosti můžeme formulovat i jinak, užijeme-li k tomu definice limity uvedené na str. 32, v níž místo b píšeme $f(a)$. Pak ovšem hodnota $f(a)$ padne do intervalu J_y. Můžeme tedy říci:



Obr. 36

Funkce f je spojitá v bodě a, když ke každému okolí J_y bodu $f(a)$ dovedeme určit takové okolí J_x bodu a, že pro každé x z J_x (bez jakékoli výjimky) hodnota $f(x)$ padne do J_y (obr. 36).

Důležitý důsledek odvodíme z věty 9:

Věta **15.** Nechť funkce f a g jsou spojité v bodě a. Pak jsou v bodě a spojité i funkce:

a) $k \,.\, f(x) + h \,.\, g(x)$, kde k a h jsou daná čísla,

b) $f(x) \,.\, g(x)$,

c) $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, pokud $g(a) \neq 0$.

Důkaz. Funkce f a g jsou spojité v bodě a, t. j. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = g(a)$. Pak podle věty 9:

a) $\lim\limits_{x\to a}[k \,.\, f(x) + h \,.\, g(x)] = k \,.\, \lim\limits_{x\to a} f(x) + h \,.\, \lim\limits_{x\to a} g(x) = k \,.\, f(a) + h \,.\, g(a)$,

b) $\lim\limits_{x\to a}[f(x) \,.\, g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) \,.\, \lim\limits_{x\to a} g(x) = f(a) \,.\, g(a)$,

c) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)} = \dfrac{f(a)}{g(a)}$, je-li $\lim\limits_{x\to a} g(x) = g(a) \neq 0$.

Tato věta nám umožní stanovit, že mnohé důležité funkce jsou spojité.

Věta 16. a) **Funkce x^n pro $n \geqq 0$ celé je spojitá v každém bodě. b) Funkce x^n pro $n < 0$ celé je spojitá v každém bodě s výjimkou bodu 0.**

Důkaz. a) Důkaz prvé části provedeme úplnou indukcí.

(1) V příkladě 16 jsme dokázali, že $\lim\limits_{x\to a}(kx + q) = ka + q$. To značí, že funkce $kx + q$ je spojitá v každém bodě. Položíme-li $k = 0$, $q = 1$, plyne odtud, že funkce $\varphi(x) = x^0 = 1$ je spojitá v každém bodě. Položíme-li $k = 1$, $q = 0$, dostáváme, že i funkce $\psi(x) = x$ je spojitá v každém bodě. Věta tedy platí pro $n = 1$ (i pro $n = 0$).

(2) Je-li funkce $f(x) = x^n$ spojitá v každém bodě, je podle věty 15b i funkce $f(x) \,.\, \psi(x) = x^n \,.\, x = x^{n+1}$ spojitá v každém bodě. Věta a) tedy platí pro každé přirozené číslo n.

b) Je-li $n < 0$ celé, položme $n = -m$, kde $m > 0$. Funkce x^m je podle a) spojitá v každém bodě a hodnoty 0 nabývá pouze pro $x = 0$. Funkce $\varphi(x) = 1$ je rovněž spojitá podle a) v každém bodě. Proto podle věty 15c je i funkce $\dfrac{1}{x^m} = x^{-m} = x^n$ spojitá v každém bodě s výjimkou bodu 0.

Funkce

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n,$$

kde $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ jsou konstanty, se jmenuje *racionální funkce celistvá* čili *mnohočlen*. Je-li $a_n \neq 0$, říkáme, že mnohočlen je n-tého stupně. Funkce

$$g(x) = \frac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n}{b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_mx^m},$$

kde $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, b_0, b_1, b_2, \ldots, b_m$ jsou konstanty, se jmenuje *racionální funkce lomená*. Aby měl výraz pro $g(x)$ smysl, musí být aspoň jedna z konstant b_i různá od nuly.

Věta 17. Racionální funkce celistvá je spojitá v každém bodě; racionální funkce lomená je spojitá v každém bodě s výjimkou těch bodů, v nichž je jmenovatel roven nule.

Důkaz. a) Důkaz prvé části provedeme úplnou indukcí.

(1) Funkce $f_1(x) = a_0 + a_1x$ je spojitá v každém bodě, neboť podle příkladu 16 je $\lim\limits_{x \to a} f_1(x) = a_0 + a_1a$ pro každé a.

(2) Je-li funkce $f_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$, kde n je číslo přirozené, spojitá v každém bodě, je i funkce $f_{n+1}(x) = f_n(x) + a_{n+1}x^{n+1}$ spojitá v každém bodě podle věty 15a a 16a.

Tím je dokázáno, že každý mnohočlen je funkce spojitá v každém bodě.

b) Jsou-li funkce $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$, $h(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_mx^m$ spojité v každém bodě, při čemž aspoň jedna z konstant b_i je různá od nuly, je podle věty 15c i funkce $g(x) = \dfrac{f(x)}{h(x)}$ spojitá v každém bodě s výjimkou těch bodů, v nichž je jmenovatel $h(x)$ roven nule.

Chceme-li stanovit limitu nějaké funkce v bodě a, leckdy se nám to podaří podle věty 4. Máme-li totiž dvě funkce f a g, které pro všecka $x \neq a$ z jistého okolí J_x bodu a splňují rovnost $f(x) = g(x)$, a je-li funkce f v bodě a spojitá, je $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$. Pak podle věty 4 je také $\lim\limits_{x\to a} g(x) = f(a)$. Ukážeme si to na příkladě.

Příklad 21. Máme stanovit $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x-1}$. Pro každé $x \neq 1$ je $\dfrac{x^2-1}{x-1} = x+1$, avšak funkce $f(x) = x + 1$ je racionální funkce celistvá, o níž podle věty 17 víme, že je spojitá v každém bodě. Proto $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = f(1) = 2$. Podle věty 4 je tedy také $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x-1} = 2$. To je v souhlasu s výsledkem příkladu 14.

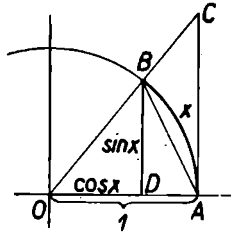
Příklad 22. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-3x+2}{x^2-x-2} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{(x-1)(x-2)}{(x+1)(x-2)} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x-1}{x+1} = \frac{1}{3}$, neboť pro každé $x \neq 2$ platí $\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-x-2} = \dfrac{x-1}{x+1}$ a funkce $\dfrac{x-1}{x+1}$ je spojitá pro každé $x \neq -1$.

Jindy můžeme stanovit limitu s použitím věty 12 takto: Jsou-li f a g funkce, které pro všecka $x \neq a$ z nějakého okolí J_x bodu a splňují nerovnost $f(x) \leqq g(x)$, a jestliže funkce f má v bodě a limitu a funkce g je v tomto bodě spojitá, je $\lim\limits_{x\to a} f(x) \leqq g(a)$. Jestliže naopak funkce g má v bodě a limitu a funkce f je v něm spojitá, pak $f(a) \leqq \lim\limits_{x\to a} g(x)$. Ke stanovení limity užíváme často také věty 13.

Příklad 23. Podle věty 13 stanovíme $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x}$, kterou budeme dál potřebovat. Z obr. 37 je jasné, že

$$\triangle\, OAB < \text{výseč } OAB < \triangle\, OAC.$$

Trojúhelník OAB má však stranu $OA = 1$, příslušnou výšku $DB = \sin x$, kde x je délka oblouku AB. Je tedy obsah trojúhelníka OAB roven $\frac{1}{2}\sin x$. Trojúhelník OAC je pravoúhlý; jeho odvěsny jsou OA, AC, při čemž $OA = 1$, $AC : DB = OA : OD$, takže $AC = \dfrac{DB \,.\, OA}{OD} = \dfrac{\sin x}{\cos x}$, jeho obsah je tedy $\frac{1}{2} \,.\, \dfrac{\sin x}{\cos x}$. Konečně obsah výseče OAB je $\frac{1}{2}x$, neboť oblouk AB má délku x a poloměr je 1. Máme tedy nerovnosti



Obr. 37

$$\tfrac{1}{2}\sin x < \tfrac{1}{2}x < \tfrac{1}{2} \cdot \frac{\sin x}{\cos x}, \qquad \text{(a)}$$

z nichž pro $0 < x < \frac{1}{2}\pi$ plyne

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1. \qquad \text{(b)}$$

Podle vzorce (17) na str. 28 je $\cos x = 1 - 2\sin^2 \frac{1}{2}x$. Podle (a) je však $\sin x < x$. Proto také $\sin \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}x$, $\sin^2 \frac{1}{2}x < \frac{1}{4}x^2$, takže $\cos x = 1 - 2\sin^2 \frac{1}{2}x > 1 - \frac{1}{2}x^2$. Spojíme-li tento výsledek s nerovnostmi (b), dostaneme pro $0 < x < \frac{1}{2}\pi$

$$1 - \tfrac{1}{2}x^2 < \frac{\sin x}{x} < 1. \qquad \text{(c)}$$

Nerovnosti (c) však platí i pro $-\frac{1}{2}\pi < x < 0$, neboť $(-x)^2 = x^2$, $\sin(-x) = -\sin x$ (vzorec (8)), takže $\dfrac{\sin(-x)}{-x} = \dfrac{\sin x}{x}$. Platí-li nerovnosti (c) pro nějaké x, platí i pro $-x$, a proto platí v celém intervalu $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$ (nejvýše s výjimkou bodu 0).

Protože $\lim\limits_{x\to 0}(1 - \frac{1}{2}x^2) = 1$ a rovněž $\lim\limits_{x\to 0} 1 = 1$, proto podle věty 13 také

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \tag{20}$$

Ačkoli jsme si s důkazem pohráli, není zcela rigorosní. Vyšli jsme totiž z názoru a na základě jakéhosi obrázku jsme sestavili jakési nerovnosti mezi obsahy jakýchsi ploch. Dosud však nemáme vůbec definováno, co je to obsah plochy, a proto zatím ještě nemůžeme užívat obsahu k žádným důkazům. Prozatím však budeme považovat vzorec (20) za správný; jeho přesný důkaz podáme v kapitole X.

Věta **18.** **Funkce $\sin x$ a $\cos x$ jsou spojité v každém bodě.**

Důkaz. Je třeba dokázat, že $\lim_{x \to a} \sin x = \sin a$ čili $\lim_{h \to 0} \sin(a + h) = \sin a$ pro každé a. To je totéž jako $\lim_{h \to 0} \sin(a + h) - \sin a = 0$ čili

$$\lim_{h \to 0} [\sin(a + h) - \sin a] = 0.$$

Abychom to dokázali, všimněme si, že podle vzorců (18) na str. 29 je

$$\sin(a + h) - \sin a = 2 \cos(a + \tfrac{1}{2}h) \sin \tfrac{1}{2}h.$$

Podle (20) je $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, proto $\lim_{x \to 0} \sin x = \lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin x}{x} \cdot x\right) = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \to 0} x = 1 \cdot 0 = 0$ a ovšem také $\lim_{h \to 0} \sin \frac{1}{2}h = 0$. Je tedy $\sin \frac{1}{2}h$ funkce nekonečně malá v okolí bodu 0. Vedle toho $|\cos(a + \frac{1}{2}h)| \leq 1$, takže funkce $\cos(a + \frac{1}{2}h)$ je omezená. Proto podle věty 7 je $\lim_{h \to 0} [\sin(a + h) - \sin a] = 0$ a funkce $\sin x$ je spojitá v každém bodě a. Funkce $\cos x = \sin(\frac{1}{2}\pi + x)$ (vzorec (13)) je však potom rovněž spojitá v každém bodě.

Zavedeme tuto definici:

Funkce f je *spojitá v intervalu* J_x, má-li tyto vlastnosti:

1. v každém vnitřním bodě intervalu J_x je spojitá,

2. patří-li počáteční bod k intervalu J_x, je v něm spojitá zprava,

3. patří-li koncový bod k intervalu J_x, je v něm spojitá zleva.

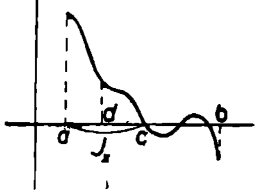
Pojem funkce spojité v intervalu musíme odlišovat od pojmu funkce spojité v bodě. Je-li funkce spojitá v určitém bodě, jde tu pouze o vlastnost okolí tohoto bodu; je-li však spojitá v intervalu, jde tu o vlastnost celého intervalu.

O funkcích spojitých v uzavřeném intervalu platí několik důležitých vět, které nyní vyslovíme a dokážeme.

Věta **19**. Je-li funkce f spojitá v uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$ a mají-li hodnoty $f(a)$ a $f(b)$ opačná znaménka, existuje takový vnitřní bod c z intervalu $\langle a, b\rangle$, že $f(c) = 0$.

Důkaz. Předpokládejme, že třeba $f(a) > 0$, $f(b) < 0$. Budiž $\langle a, d)$ takový interval, že pro všecka x z $\langle a, d)$ je $f(x) > 0$. Množinu všech čísel d, která mají tuto vlastnost, označme M.

Tato množina není prázdná. Funkce f je totiž v bodě a spojitá zprava, jinými slovy $\lim\limits_{x \to a+} f(x) = f(a) > 0$. Proto podle věty 10 existuje takové (pravé) okolí J_x bodu a, že pro všecka x z J_x hodnota $f(x)$ má totéž znaménko jako $f(a)$, t. j. je $f(x) > 0$. Interval J_x je tedy jedním z intervalů $\langle a, d)$. Označme c supremum množiny M (viz str. 12). Podle toho, co bylo právě řečeno, je určitě $c > a$ a ovšem $c \leqq b$ (obr. 38).



Obr. 38

Pro všecka x z $\langle a, c)$ musí být $f(x) > 0$. Kdyby totiž existovalo takové x_1 z $\langle a, c)$, že $f(x_1) < 0$, existovalo by podle vlastností suprema aspoň jedno číslo $d_1 > x_1$, které patří do $\boldsymbol{M}$. Pak by v intervalu $\langle a, d_1)$ existoval bod x_1, pro nějž by bylo $f(x_1) < 0$, ale to není možné vzhledem k definici množiny $\boldsymbol{M}$.

Dejme tomu, že $f(c) > 0$. Pak ovšem nemůže být $c = b$, neboť $f(b) < 0$. Musí tedy $c < b$. Avšak $f(c) = \lim\limits_{x \to c+} f(x)$ (viz větu 14), a proto podle věty 10 existuje takové (pravé) okolí $\langle c, d_2)$ bodu c, že pro všecka x z $\langle c, d_2)$, pro něž tedy platí $c \leqq x < d_2$, má $f(x)$ totéž znaménko jako $f(c)$, t. j. je $f(x) > 0$. Avšak potom $f(x) > 0$ pro všecka x z $\langle a, d_2)$ a c není supremem množiny $\boldsymbol{M}$. Proto nemůže být $f(c) > 0$.

Musí tedy $f(c) \leqq 0$, ale pro každé $x < c$ je $f(x) > 0$. Proto podle věty 12 je $\lim\limits_{x \to c-} f(x) \geqq 0$, ale $\lim\limits_{x \to c-} f(x) = f(c)$, takže $f(c) \geqq \geqq 0$. Obojímu současně lze vyhovět jen tak, že je $f(c) = 0$, při čemž $c \neq b$. Kdyby totiž bylo $c = b$, bylo by $f(c) < 0$ a to není.

Je-li $f(a) < 0$, $f(b) > 0$, vezmeme funkci $g(x) = -f(x)$, která má tu vlastnost, že $g(a) > 0$, $g(b) < 0$ a je spojitá v intervalu $\langle a, b\rangle$. Podle právě provedeného důkazu existuje vnitřní bod c intervalu $\langle a, b\rangle$ té vlastnosti, že $g(c) = 0$. Tedy i $f(c) = 0$.

Dokázaná věta se zdá podle názoru zcela samozřejmá. Každá spojitá funkce (t. j. funkce, jejíž graf lze narýsovat jedním tahem), která v bodech a, b nabývá hodnot, jež mají různá znaménka, má tu vlastnost, že její graf protíná osu x aspoň v jednom bodě mezi body a, b (obr. 38). Přesto však je třeba větu dokázat nezávisle na názoru, abychom snad nebyli názorem svedeni ke klamným závěrům.

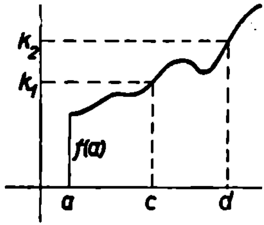
Věta **20**. Je-li funkce f spojitá v uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$, je v tomto intervalu omezená.

Důkaz. Naše věta tvrdí, že existují čísla k, h taková, že $h < f(x) < k$ pro všecka x z $\langle a, b\rangle$. Dokážeme především existenci čísla k.

1. Zvolme libovolné číslo k_1 tak, aby $k_1 > f(a)$. Funkce f je v bodě a spojitá zprava, t. j. $\lim\limits_{x \to a+} f(x) = f(a) < k_1$. Proto podle věty 11 existuje takové (pravé) okolí J_x bodu a čili interval $\langle a, c)$, že pro všechna x z J_x je $f(x) < k_1$. Zřejmě je $a < c \leqq \leqq b$.

Dokázali jsme tedy, že existuje jakési číslo c takové, že $a < c \leqq b$, a k němu existuje číslo k_1 tak, že pro všecka x z $\langle a, c)$ je $f(x) < k_1$ (obr. 39).

2. Předpokládejme, že $c < b$ a že neexistuje již žádné $d > c$ z intervalu $\langle a, b\rangle$, k němuž by bylo možno nalézt takové číslo k, aby pro všecka x z $\langle a, d)$ bylo $f(x) < k$.



Obr. 39

Zvolme libovolné číslo $k_2 > > f(c)$. Funkce f je v bodě c spojitá, t. j. $\lim\limits_{x \to c} f(x) = f(c) < k_2$. Proto podle věty 11 existuje takové okolí J'_x bodu c, že pro všecka x z J'_x je $f(x) < k_2$. Okolí J'_x je interval (c_1, d), kde $c_1 < c$, $d > c$; proto sjednocením intervalů $\langle a, c)$ a J'_x vznikne interval $\langle a, d)$. Označíme-li k_3 větší z obou čísel k_1 a k_2, platí vztah $f(x) < k_3$ pro každé x z $\langle a, c)$ a také pro každé x z J'_x, tedy také pro každé x z $\langle a, d)$.

To však je ve sporu s předpokladem učiněným na počátku bodu 2. Proto není možné, aby bylo $c < b$, a je tedy $c = b$. Tím jsme dokázali, že existuje číslo k_3 tak, že pro všecka x z $\langle a, b)$ je $f(x) < k_3$.

3. Zvolme libovolné číslo $k_4 > f(b)$. Označíme-li k větší z obou čísel k_3 a k_4, platí vztah $f(x) < k$ pro každé x z $\langle a, b)$ a také pro b, tedy pro každé x z $\langle a, b\rangle$. Existuje tedy takové číslo k, že nerovnost $f(x) < k$ platí pro každé x z $\langle a, b\rangle$.

Abychom dokázali existenci čísla h, vezměme funkci $g(x) = -f(x)$, která je také spojitá v $\langle a, b\rangle$. Proto podle právě provedeného důkazu existuje takové číslo k', že pro všecka x z $\langle a, b\rangle$ platí $g(x) < k'$. Položíme-li $h = -k'$, je $-f(x) < -h$ čili $f(x) > h$.

Věta platí pouze pro funkce spojité v **uzavřeném** intervalu. Pro funkce spojité v otevřeném intervalu nemusí platit. Na příklad funkce $f(x) = \frac{1}{x}$ je spojitá v otevřeném intervalu $(0, \infty)$, ale není v něm omezená, jak plyne z příkladu 20, kde bylo ukázáno, že, ať volíme číslo k jakkoli, vždy existuje takové x z intervalu $(0, \infty)$, pro něž je $f(x) = \frac{1}{x} > k$.

Věta **21**. **Je-li funkce f spojitá v uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$ a je-li M supremum a m infimum hodnot, jichž funkce v tomto intervalu nabývá, pak ke každému číslu d, které má tu vlastnost, že $m \leqq d \leqq M$, existuje v intervalu $\langle a, b\rangle$ takové číslo c, že $f(c) = d$.**

Důkaz. Nejprve dokážeme, že v intervalu $\langle a, b\rangle$ existuje takové číslo c_1, že $f(c_1) = M$. Kdyby číslo c_1 neexistovalo, bylo by $f(x) < M$ pro každé x z $\langle a, b\rangle$. Pak $M - f(x) > 0$ pro každé x z $\langle a, b\rangle$ a tedy také $\frac{1}{M - f(x)} > 0$. Funkce $\frac{1}{M - f(x)}$ je však podle věty 15 spojitá v intervalu $\langle a, b\rangle$; proto podle věty 20 existuje takové číslo $k > 0$, že $\frac{1}{M - f(x)} < k$ pro každé x z $\langle a, b\rangle$. Odtud plyne $f(x) < M - \frac{1}{k}$. To však znamená, že M není supremem hodnot $f(x)$, neboť má-li M být supremem, musí podle vlastnosti 2 na str. 12 existovat aspoň jedno číslo ξ z $\langle a, b\rangle$, pro něž $f(\xi) > M - \frac{1}{k}$, ať zvolíme číslo $k > 0$ jakkoli. Není tedy možné, aby neexistovalo žádné číslo c_1 z $\langle a, b\rangle$, pro něž $f(c_1) = M$.

Vezmeme-li funkci $g(x) = -f(x)$, pak z podmínky $m \leqq f(x)$ plyne $g(x) \leqq -m$, takže $-m$ je supremem všech hodnot $g(x)$. Protože $g(x)$ je funkce spojitá v $\langle a, b\rangle$, musí podle toho, co bylo právě dokázáno, existovat takové číslo c_2 z $\langle a, b\rangle$, že $g(c_2) = -m$ čili $f(c_2) = m$.

Je-li nyní d takové libovolné číslo, že $m < d < M$, pak $M - d > 0$, $m - d < 0$. Funkce $h(x) = f(x) - d$ je rovněž spojitá v $\langle a, b\rangle$, při čemž $h(c_1) = f(c_1) - d = M - d > 0$, $h(c_2) = f(c_2) - d = m - d < 0$. Proto podle věty 19 musí existovat takové číslo c, které leží mezi čísly c_1 a c_2, tedy v intervalu $\langle a, b\rangle$, že $h(c) = f(c) - d = 0$ čili $f(c) = d$.

Také věta 21 platí pouze pro funkce spojité v uzavřeném intervalu. Na příkladu ukážeme, že nemusí platit pro funkce spojité v otevřeném intervalu.

Příklad 24. Mějme funkci $f(x) = 2x$ definovanou pro všecka x z otevřeného intervalu $(-1, 1)$. Probíhá-li x všecky hodnoty z intervalu $(-1, 1)$, nabývá $f(x)$ všech hodnot z intervalu $(-2, 2)$, takže $M = 2$, $m = -2$. Ke každému d, pro které platí $-2 < d < 2$, existuje číslo c tak, že $f(c) = d$. Toto c je zřejmě dáno podmínkou $c = \frac{1}{2}d$. Neexistuje však žádné c_1, pro něž by bylo $f(c_1) = 2$, neboť pro $x = 1$ není již hodnota $f(x)$ definována. Rovněž tak neexistuje žádné c_2, pro něž by bylo $f(c_2) = -2$, neboť hodnota $f(x)$ pro $x = -1$ rovněž není definována.

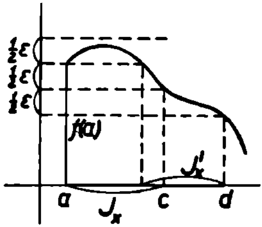
Věta **22**. Je-li funkce f spojitá v uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$, pak ke každému číslu $\varepsilon > 0$ existuje takové číslo $\delta > 0$, že pro každá dvě čísla x_1, x_2 z $\langle a, b\rangle$, která vyhovují nerovnosti $|x_1 - x_2| < \delta$, je $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.

Důkaz. Zvolme libovolné číslo $\varepsilon > 0$.

1. Funkce f je v bodě a spojitá zprava. To znamená, že k číslu $\frac{1}{2}\varepsilon$ existuje takové (pravé) okolí J_x bodu a, že pro všecka x z J_x je $|f(x) - f(a)| < \frac{1}{2}\varepsilon$ (obr. 40). Jsou-li x_1, x_2 dva body z J_x, je podle (1)

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |[f(x_1) - f(a)] - [f(x_2) - f(a)]| \leqq$$
$$\leqq |f(x_1) - f(a)| + |f(x_2) - f(a)| < \tfrac{1}{2}\varepsilon + \tfrac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon.$$

Označíme-li šířku okolí J_x písmenem δ_1, je $|x_1 - x_2| < \delta_1$. Tím je věta dokázána pro všecka x_1, x_2 z jakéhosi intervalu $\langle a, a + \delta_1)$.



Obr. 40

2. Podle bodu 1 věta platí pro všecka x_1, x_2 z jakéhosi intervalu $\langle a, c)$, kde $a < c \leqq b$. Předpokládejme, že $c < b$ a že pro všecka x_1, x_2 z $\langle a, c)$, pro něž platí $|x_1 - x_2| < \delta_1$, kde $\delta_1 > 0$ je vhodné číslo, je $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$, kdežto

pro žádné číslo $x_1 > c$ nebo $x_2 > c$ z $\langle a, b\rangle$ taková věta neplatí. (*)

Funkce f je spojitá v bodě c. To znamená, že k číslu $\frac{1}{2}\varepsilon$ existuje takové okolí J'_x bodu c, že pro všecka x z J'_x je $|f(x) - f(c)| < \frac{1}{2}\varepsilon$. Jsou-li x_1, x_2 dva libovolné body z J'_x, pak opět

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |[f(x_1) - f(c)] - [f(x_2) - f(c)]| \leqq$$
$$\leqq |f(x_1) - f(c)| + |f(x_2) - f(c)| < \tfrac{1}{2}\varepsilon + \tfrac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon.$$

Okolí J'_x je interval (c_1, d), kde $c_1 < c$, $d > c$. Označíme-li $d - c_1 = \delta_2$, pak pro každé dva body x_1, x_2 z J'_x platí $|x_1 - x_2| < \delta_2$. Označme dále δ_3 menší z obou čísel δ_1 a δ_2; pak pro každé x_1, x_2 ze sjednocení intervalů $\langle a, c)$ a J'_x, t. j. z intervalu $\langle a, d)$, pro něž platí $|x_1 - x_2| < \delta_3$, je $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$. To je ale ve sporu s předpokladem (*), podle něhož taková věta nemá platit pro $x_1 > c$ nebo pro $x_2 > c$. Není tedy možné, aby $c < b$, a proto musí $c = b$.

3. Ještě je třeba dokázat, že číslo x_1 nebo x_2 může být rovno b. Funkce f je v bodě b spojitá zleva, t. j. existuje takové (levé) okolí J''_x bodu b, že pro všechna x z J''_x je $|f(x) - f(b)| < \frac{1}{2}\varepsilon$. Jsou-li opět x_1, x_2 dvě čísla z J''_x, je

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |[f(x_1) - f(b)] - [f(x_2) - f(b)]| \leqq$$
$$\leqq |f(x_1) - f(b)| + |f(x_2) - f(b)| < \tfrac{1}{2}\varepsilon + \tfrac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon.$$

Označíme-li šířku okolí J''_x písmenem δ_4, platí $|x_1 - x_2| < \delta_4$. Označíme-li konečně písmenem δ menší z obou čísel δ_3 a δ_4, pak pro každé x_1, x_2 z celého intervalu $\langle a, b\rangle$, pro něž platí $|x_1 - x_2| < \delta$, je $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$; tím je věta dokázána.

Ani tato věta neplatí pro funkce spojité v otevřeném intervalu. Vezměme třeba funkci $f(x) = \dfrac{1}{x}$ spojitou v intervalu $(0, \infty)$. Je-li $0 < x_1 < x_2$ a $x_2 - x_1 < \delta$, je $\delta > 0$ a $\dfrac{1}{x_1} - \dfrac{1}{x_2} = \dfrac{x_2 - x_1}{x_1 x_2} < \dfrac{\delta}{x_1 x_2} < \dfrac{\delta}{{x_1}^2}$. Volíme-li tedy libovolné $\varepsilon > 0$ a má-li být $\dfrac{1}{x_1} - \dfrac{1}{x_2} < \varepsilon$, vyhovíme tomu tak, že volíme $\dfrac{\delta}{{x_1}^2} \leqq \varepsilon$, čili $\delta \leqq \varepsilon {x_1}^2$, což má být splněno pro **každé** (i sebe menší) x_1. Musí tedy být $\delta = 0$, ale my chceme, aby $\delta > 0$.

Cvičení.

21. Je funkce

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{pro } 0 \leqq x \leqq 1 \\ 3 - x & \text{pro } 1 < x \leqq 2 \end{cases}$$

spojitá v každém bodě intervalu $\langle 0, 2\rangle$?

22. Dokažte, že funkce

$$f(x) = \begin{cases} \sin \dfrac{1}{x} & \text{pro } x \neq 0 \\ k & \text{pro } x = 0 \end{cases}$$

není spojitá v bodě 0, ať volíme hodnotu k jakkoli.

23. Jak třeba volit hodnotu k, aby funkce

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x} & \text{pro } x \neq 0 \\ k & \text{pro } x = 0 \end{cases}$$

byla spojitá v bodě 0?

24. Pro která x není spojitá funkce a) $\dfrac{x}{\sin x}$, b) $\dfrac{\cos \frac{1}{2}\pi x}{x(x-1)}$?

25. V kterých intervalech je spojitá funkce a) $\operatorname{tg} x$, b) $\operatorname{cotg} x$?

26. Nalezněte: a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 + 2x}{x^3 - 3x^2 + 2x}$, b) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - x - 2}{x^3 - 3x^2 + 2x}$,

c) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{3x^4 - 4x^3 + 1}{(x-1)^2}$.

27. Určete a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 5x}{x}$, b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x}{x}$, c) $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}\pi} \dfrac{1 - \sin x}{\frac{1}{2}\pi - x}$.

28. Dokažte, že a) $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{1}{1-x} - \dfrac{3}{1-x^3} \right) = -1$,

b) $\lim\limits_{x \to \frac{1}{4}\pi} \dfrac{\sin x - \cos x}{1 - \operatorname{tg} x} = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$,

c) $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\dfrac{1}{n^2} + \dfrac{2}{n^2} + \dfrac{3}{n^2} + \ldots + \dfrac{n}{n^2} \right) = \frac{1}{2}$.

29. Je-li funkce $f(x)$ spojitá v bodě a, je i funkce $|f(x)|$ spojitá v bodě a. Dokažte.

30. Funkce $f(x)$ a $g(x)$ nejsou spojité v bodě a. Může se stát, že funkce $f(x) + g(x)$ je spojitá v bodě a?

IV. DERIVACE

Nejdůležitější místo mezi všemi limitami zaujímá limita, kterou označujeme názvem *derivace*. Definujeme ji takto:

Derivací funkce f v bodě a nazýváme (vlastní) limitu

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

S pojmem derivace se setkáváme při různých úvahách fysikálních i geometrických. Ukážeme si dva typické příklady takových úvah.

Příklad 25. Mysleme si bod M, který se pohybuje po přímce. Jeho polohu udáváme souřadnicí x měřenou od určitého počátku O. Tato souřadnice se mění s časem. Každému časovému údaji t odpovídá jediná a určitá poloha bodu M. Souřadnice x je tedy funkcí času t, t. j. $x = f(t)$. Vezměme si dva časové údaje, jejichž rozdíl je h. První z nich označme a, druhý pak bude $a + h$. Je-li $h > 0$, značí $a + h$ okamžik pozdější a a okamžik dřívější; je-li $h < 0$, je tomu naopak. Počítejme dráhu, kterou bod M urazí za dobu h. V okamžiku a má bod M souřadnici $f(a)$, v okamžiku $a + h$ má souřadnici $f(a + h)$; za dobu h tedy urazí dráhu $f(a + h) - f(a)$. Podíl

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

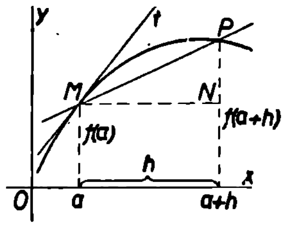
udává průměrnou rychlost bodu M od okamžiku a do okamžiku $a + h$, neboť je to dráha, kterou bod průměrně urazí za jednotku času. Zkracuje-li se rozdíl h obou časových údajů a blíží-li se při tom průměrná rychlost limitě

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h},$$

nazýváme tuto limitu okamžitá rychlost bodu M v okamžiku a. Okamžitá rychlost je tedy derivace funkce f v bodě a.

Příklad 26. Mějme funkci f spojitou v určitém intervalu. Grafickým znázorněním této funkce je jakási křivka $y = f(x)$

(obr. 41). Souřadnice x, y libovolného bodu této křivky jsou vázány rovnicí $y = f(x)$. Vezměme na křivce libovolně zvolený pevný bod M; jeho souřadnice jsou a, $f(a)$. Dále vytkněme na křivce ještě další bod P různý od M; jeho souřadnice označíme $a + h$, $f(a + h)$. Je-li bod P vpravo od bodu M, je $h > 0$, je-li vlevo, je $h < 0$. Přejdeme-li od bodu M do bodu P, zvětší se souřadnice a o přírůstek $MN = h$ a souřadnice $f(a)$ o přírůstek $NP = f(a + h) - f(a)$. Podíl



Obr. 41

$$\frac{NP}{MN} = \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

udává směrnici přímky MP. Blíží-li se přírůstek h k nule a blíží-li se při tom uvedený podíl limitě

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h},$$

nazýváme tuto limitu *směrnice tečny* křivky $y = f(x)$ v bodě M. Přímku t procházející bodem M, jejíž směrnice je rovna uvedené limitě, nazýváme *tečnou* křivky $y = f(x)$ v bodě M. Směrnice tečny je tedy rovna derivaci funkce f v bodě a.

Z toho je patrné, že pojem derivace hraje základní úlohu v mnohých problémech matematiky a fysiky.

Příklad 27. Jako příklad vypočteme derivaci funkce $f(x) = x^2$ v bodě a. Platí

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(a + h)^2 - a^2}{h} = \lim_{h\to 0} (2a + h) = 2a.$$

Není však nutno, aby každá funkce měla v každém bodě, v němž je definována, derivaci, neboť uvedená limita nemusí existovat.

Věta **23**. Má-li funkce f v bodě a derivaci, je v tom bodě spojitá.

Důkaz. Má-li funkce f v bodě a derivaci, existuje (vlastní) limita

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = D.$$

Pak je

$$\lim_{h\to 0} [f(a+h)-f(a)] = \lim_{h\to 0} \left[\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \,.\, h\right] =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \,.\, \lim_{h\to 0} h = D \,.\, 0 = 0.$$

Odtud plyne $\lim\limits_{h\to 0} f(a+h) = f(a)$ čili $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$ a to značí, že funkce f je v bodě a spojitá.

Poznámka. Tuto větu lze také vyslovit ve tvaru: Není-li funkce f v bodě a spojitá, nemá v něm derivaci. Věta se však nedá obrátit: je-li funkce f v bodě a spojitá, nemusí mít v tomto bodě derivaci.

Příklad 28. Funkce $f(x) = |x|$, která je spojitá v bodě 0 (viz příklad 5), nemá v tomto bodě derivaci, neboť

a) pro $x \geqq 0$ je $f(x) = x$ a $\lim\limits_{h\to 0+} \dfrac{f(h)-f(0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0+} \dfrac{h}{h} = 1$;

b) pro $x \leqq 0$ je $f(x) = -x$ a $\lim\limits_{h\to 0-} \dfrac{f(h)-f(0)}{h} =$

$$= \lim_{h\to 0-} \frac{-h}{h} = -1.$$

Poněvadž limita zprava není rovna limitě zleva, neexistuje limita v bodě 0 (věta 3). To, že funkce $f(x) = |x|$ nemá v bodě 0 derivaci, jeví se také na jejím grafu: křivka se skládá ze dvou částí, které se stýkají v bodě 0, v němž však křivka náhle mění svůj směr (obr. 13).

Derivace funkce f v bodě x je limita $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$, která má jistou hodnotu; tato hodnota závisí na volbě čísla x. Ke každému číslu x, pro něž existuje derivace funkce f, je tak přiřazeno určité číslo, totiž hodnota derivace funkce f v bodě x. Je tedy derivace funkce f v bodě x opět funkcí proměnné x. Je zvykem označovat derivaci funkce f znakem f', takže derivaci funkce f v bodě x označujeme nejčastěji $f'(x)$. Značíme-li hodnotu funkce f v bodě x jediným písmenem, třeba y, označujeme derivaci znakem y'.

Protože budeme často počítat derivace, nebylo by vhodné postupovat po každé tak, jak jsme to učinili v příkladě 27. Proto si odvodíme několik vět, jimiž se počítání derivací usnadní.

Věta **24**. Derivace konstanty je v každém bodě rovna nule.

Důkaz. Je-li $f(x) = k$, kde k je konstanta, je také $f(x + h) = k$. Pak

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{k - k}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0}{h} = \lim_{h \to 0} 0 = 0.$$

Věta **25**. Derivace funkce $f(x) = x$ je v každém bodě rovna jedné.

Důkaz. Je-li $f(x) = x$, je $f(x + h) = x + h$, takže

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x + h - x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h}{h} = \lim_{h \to 0} 1 = 1.$$

Věta **26**. Nechť funkce f a g mají derivace f' a g'. Pak

a) funkce $k_1 f(x) + k_2 g(x)$, kde k_1 a k_2 jsou daná čísla, má v bodě x derivaci $k_1 f'(x) + k_2 g'(x)$;

b) funkce $f(x) \,.\, g(x)$ má v bodě x derivaci $f'(x) \,.\, g(x) + f(x) \,.\, g'(x)$;

c) **funkce** $\dfrac{1}{g(x)}$ **má v bodě** x, **pro nějž** $g(x) \neq 0$, **derivaci** $-\dfrac{g'(x)}{g^2(x)}$.

Důkaz. Platí

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \quad g'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}.$$

Potom

a) $$\lim_{h \to 0} \frac{k_1 f(x+h) + k_2 g(x+h) - k_1 f(x) - k_2 g(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \left[k_1 \cdot \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + k_2 \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right] =$$

$$= k_1 \cdot \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + k_2 \cdot \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} =$$

$$= k_1 f'(x) + k_2 \cdot g'(x).$$

b) Poněvadž $f(x+h) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x) = f(x+h) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x+h) + f(x) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x)$,

proto

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot g(x+h) + f(x) \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right] =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot \lim_{h \to 0} g(x+h) +$$

$$+ f(x) \cdot \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x),$$

neboť podle věty 23 je $\lim\limits_{h \to 0} g(x + h) = g(x)$, ježto funkce g je spojitá v bodě x.

c) Je-li $g(x) \neq 0$, existuje okolí J_x bodu x tak, že pro všecka $x + h$ z J_x je $g(x + h) \neq 0$ (věta 11). Proto

$$\lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{1}{g(x + h)} - \dfrac{1}{g(x)}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{g(x) - g(x + h)}{h \, . \, g(x) \, . \, g(x + h)} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \left[\frac{-1}{g(x) \, . \, g(x + h)} \, . \, \frac{g(x + h) - g(x)}{h} \right] =$$

$$= \frac{-1}{g(x)} \, . \lim_{h \to 0} \frac{1}{g(x + h)} \, . \lim_{h \to 0} \frac{g(x + h) - g(x)}{h} = - \frac{g'(x)}{g^2(x)}.\ ^{*)}$$

Z odvozených vět plyne několik důsledků, které si musíme pamatovat.

Označíme-li $f(x) = u$, $g(x) = v$, lze větu 26a zapsat ve tvaru

$$(k_1 u + k_2 v)' = k_1 u' + k_2 v'; \tag{21}$$

speciálně pro $k_1 = 1$ a $k_2 = 1$ nebo $k_2 = -1$

$$(u + v)' = u' + v', \ (u - v)' = u' - v'. \tag{22}$$

Odtud pro $v = k$, kde k je konstanta, podle věty 24

$$(u + k)' = u', \tag{23}$$

což se často vyslovuje slovy: a d i t i v n í k o n s t a n t a (t. j. konstanta, která se přičítá) p ř i d e r i v o v á n í o d p a d á.

Podobně lze větu 26b zapsat ve tvaru

$$(uv)' = u'v + uv'. \tag{24}$$

Odtud pro $v = k$ dostáváme

$$(ku)' = ku', \tag{25}$$

---

*) $g^2(x)$ značí totéž jako $[g(x)]^2$.

což vyjadřujeme slovy: **multiplikativní konstanta** (t. j. konstanta, kterou se násobí) **zůstává při derivování beze změny.**

Konečně podle věty 26b a 26c je $\left(\frac{u}{v}\right)' = \left(u \cdot \frac{1}{v}\right)' =$ $= u' \cdot \frac{1}{v} + u \cdot \left(\frac{1}{v}\right)' = \frac{u'}{v} - \frac{uv'}{v^2} = \frac{u'v - uv'}{v^2}$, takže

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}, \text{ pokud } v \neq 0. \tag{26}$$

Dále dokážeme vzorec

$$(x^n)' = nx^{n-1} \tag{27}$$

platný při celém $n > 0$ pro každé x a při celém $n < 0$ pro každé $x \neq 0$. Důkaz pro $n > 0$ celé provedeme úplnou indukcí.

(1) $x' = 1 = 1 \cdot x^0$ pro každé x podle věty 25 (viz vzorec (4) na str. 24). Vzorec (27) tedy platí pro $n = 1$.

(2) Platí-li vzorec (27) pro nějaké n, t. j. je-li $(x^n)' = nx^{n-1}$, je podle vzorce (24)

$$(x^{n+1})' = (x^n \cdot x)' = (x^n)' \cdot x + x^n \cdot x' = nx^{n-1} \cdot x + \\ + x^n \cdot 1 = (n + 1)\, x^n,$$

takže vzorec (27) platí i pro $n + 1$. Vzorec (27) tedy platí pro každé přirozené číslo n.

Je-li $n < 0$ celé, položme $n = -m$, takže m je celé kladné. Dokázali jsme, že $(x^m)' = mx^{m-1}$, proto podle věty 26c pro $x \neq 0$ platí

$$(x^n)' = (x^{-m})' = \left(\frac{1}{x^m}\right)' = -\frac{mx^{m-1}}{(x^m)^2} = -mx^{-m-1} = nx^{n-1}.$$

Vzorec (27) tedy platí i pro $n < 0$ celé a pro $x \neq 0$.

Vzorec (27) platí dokonce i pro $n = 0$ a pro $x \neq 0$, neboť tu je $x^0 = 1$ pro každé x, a pak podle věty 24 je $(x^0)' = 1' = = 0 = 0 \,.\, x^{-1}$; to je správné, pokud $x \neq 0$.

Pro derivace funkcí $\sin x$ a $\cos x$ platí

$$(\sin x)' = \cos x, \quad (\cos x)' = -\sin x, \tag{28}$$

jak si nyní dokážeme. Podle vzorců (18) je

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2\cos(x+\frac{1}{2}h) \,.\, \sin\frac{1}{2}h}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\cos(x+\tfrac{1}{2}h) \,.\, \lim_{h\to 0} \frac{\sin\frac{1}{2}h}{\frac{1}{2}h} = \cos x;$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-2\sin(x+\frac{1}{2}h) \,.\, \sin\frac{1}{2}h}{h} =$$

$$= -\lim_{h\to 0} \sin(x+\tfrac{1}{2}h) \,.\, \lim_{h\to 0} \frac{\sin\frac{1}{2}h}{\frac{1}{2}h} = -\sin x,$$

neboť $\cos x$ a $\sin x$ jsou funkce spojité (věta 18) a $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sin\frac{1}{2}h}{\frac{1}{2}h} = 1$ (vzorec (20)).

Na základě odvozených vztahů ukážeme, že platí

$$(\mathrm{tg}\,x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad (\mathrm{cotg}\,x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} \tag{29}$$

pro všecka x, pro něž se jmenovatel nerovná nule. Podle vzorců (26) a (28) máme

$$(\mathrm{tg}\,x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\text{pro } x \neq \tfrac{1}{2}(2k+1)\,\pi, \ k \text{ celé},$$

$$(\mathrm{cotg}\,x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$\text{pro } x \neq k\pi, \ k \text{ celé}.$$

Na příkladech ukážeme, jak se užívá odvozených vzorců.

Příklad 29. $(2x^3 - \frac{1}{6}x^2 + x - 4)' = 6x^2 - \frac{1}{3}x + 1$ podle vzorců (21) a (27).

Příklad 30. $\left(\dfrac{ax + b}{cx + d}\right)' = \dfrac{a(cx + d) - (ax + b)\,c}{(cx + d)^2} =$

$= \dfrac{ad - bc}{(cx + d)^2}$ pro $x \neq -\dfrac{d}{c}$ a $c \neq 0$ podle vzorce (26).

Příklad 31. $(x \cos x)' = \cos x - x \sin x$ podle (24) a (28).

Příklad 32. $\left(\dfrac{1}{\sin x}\right)' = \dfrac{-\cos x}{\sin^2 x}$ pro $x \neq k\pi$, kde k je celé, podle (26) a (28).

V příkladech tohoto druhu je třeba stanovit podmínky, za nichž jsou uvedené výpočty správné (viz příklad 30 a 32). Není-li uvedeno žádné omezení, značí to, že výpočet platí pro každé x (příklad 29 a 31).

Někdy se může stát, že funkce nemá derivaci, neboť příslušná limita neexistuje, existuje však limita zprava nebo limita zleva (viz příklad 28). Pak říkáme, že funkce má v bodě x *derivaci zprava* (značka $f'_+(x)$) nebo *derivaci zleva* (značka $f'_-(x)$). Tak na příklad pro funkci $f(x) = |x|$ je $f'_+(0) = 1$, $f'_-(0) = -1$.

Je-li některá z limit

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}, \quad \lim_{h\to 0+} \frac{f(x + h) - f(x)}{h},$$

$$\lim_{h\to 0-} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

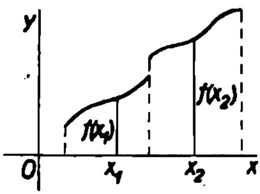
nevlastní, říkáme, že funkce f má v bodě x *nevlastní derivaci*, příp. *nevlastní derivaci zprava* nebo *nevlastní derivaci zleva*. Zpravidla však slovem derivace rozumíme derivaci, která není nevlastní a kterou někdy k zamezení nedorozumění označujeme názvem *derivace vlastní*.

Nyní zavedeme novou definici:

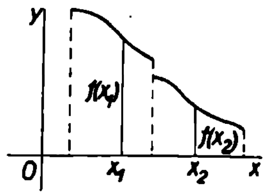
Funkci f nazýváme $\genfrac{}{}{0pt}{}{\textit{rostoucí}}{\textit{klesající}}$ *v intervalu* J_x, když pro každá dvě čísla x_1, x_2 z tohoto intervalu, která splňují podmínku $x_1 < x_2$, platí nerovnost

$$\genfrac{}{}{0pt}{}{f(x_1) < f(x_2).}{f(x_1) > f(x_2).}$$

Přejdeme-li tedy od menšího x_1 k většímu x_2, hodnota $f(x)$ se u funkce rostoucí zvětší, kdežto u funkce klesající se



Obr. 42



Obr. 43

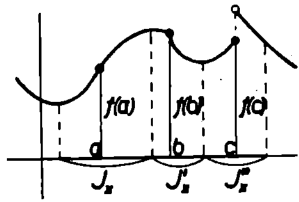
zmenší (viz obr. 42 a 43). Funkce rostoucí a funkce klesající v intervalu nazýváme někdy společným jménem *funkce monotonní*.

Vedle pojmu funkce rostoucí nebo funkce klesající v intervalu zavedeme ještě pojem funkce rostoucí a funkce klesající v bodě, a to touto definicí:

Funkce f se nazývá $\genfrac{}{}{0pt}{}{\textit{rostoucí}}{\textit{klesající}}$ *v bodě* a, lze-li udat takové okolí J_x bodu a, že pro všechna $x < a$ z J_x je $\genfrac{}{}{0pt}{}{f(x) < f(a)}{f(x) > f(a)}$ a pro všechna $x > a$ z J_x je $\genfrac{}{}{0pt}{}{f(x) > f(a).}{f(x) < f(a).}$

Funkce zobrazená na obr. 44 je podle toho rostoucí v bodě

a, neboť existuje takové okolí J_x bodu a, že pro všecka x z J_x, která jsou vlevo od a, je $f(x) < f(a)$, kdežto pro všecka x z J_x, která jsou vpravo od a, je $f(x) > f(a)$. Podobně je tato funkce klesající v bodě b a v bodě c je opět rostoucí, jak plyne z vlastností okolí J''_x, přes to, že není v bodě c spojitá.



Obr. 44

Oba pojmy musíme od sebe náležitě odlišovat: Je-li funkce rostoucí v bodě, je to pouze vlastnost okolí tohoto bodu; je-li funkce rostoucí v intervalu, jde o vlastnost celého intervalu. Souvislost mezi oběma pojmy osvětluje následující věta.

Věta **27**. Funkce f je $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{rostoucí}}{\text{klesající}}$ v intervalu (a, b) tehdy a jen tehdy, je-li $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{rostoucí}}{\text{klesající}}$ v každém bodě tohoto intervalu.

Důkaz. Důkaz provedeme nejprve pro funkci rostoucí.

1. Je-li funkce f rostoucí v intervalu (a, b) a je-li c libovolný bod tohoto intervalu, pak pro každé $x < c$ z (a, b) je $f(x) < f(c)$ a pro každé $x > c$ z (a, b) je $f(x) > f(c)$; je tedy f rostoucí v bodě c. Funkce f je tedy rostoucí v každém bodě intervalu (a, b).

2. Předpokládejme, že f je rostoucí v každém bodě intervalu (a, b), ale není rostoucí v intervalu (a, b). Pak existují dva body $c < d$ v (a, b) tak, že $f(c) \geqq f(d)$. Poněvadž funkce f je rostoucí v bodě c, existuje v intervalu (c, d) bod c_1 tak, že $f(c_1) > f(c)$. Proto také $f(c_1) > f(d)$. Označme M množinu těch x z intervalu $\langle c_1, d)$, pro něž platí $f(x) \geqq f(c_1)$. Množina M není prázdná, neboť bod c_1 do ní patří. Její supremum označme γ. Zřejmě je $c_1 \leqq \gamma \leqq d$.

Nechť je $\gamma = d$. To znamená, že v každém levém okolí bodu d existuje bod x tak, že $f(x) \geqq f(c_1) > f(d)$. Pak funkce f není rostoucí v bodě d, ale to nesouhlasí s předpokladem. Není tedy možné, aby $\gamma = d$.

Je proto jistě $\gamma < d$. Pak pro každé x_1 z (γ, d) je $f(x_1) < < f(c_1)$, neboť žádné toto x_1 nepatří do $\boldsymbol{M}$. Mezi body x_1 z (γ, d) však existují takové, že $f(x_1) > f(\gamma)$, neboť f je rostoucí v bodě γ podle předpokladu. Proto $f(\gamma) < f(c_1)$.

Kdyby bylo $\gamma = c_1$, bylo by $f(c_1) < f(c_1)$, ale to jistě není. Je tedy určitě $\gamma > c_1$. Avšak potom existuje levé okolí J_x bodu γ tak, že pro všecka x z J_x je $f(x) \leqq f(\gamma)$, neboť f je v bodě γ rostoucí. Mezi body x z J_x je však aspoň jeden takový, který patří do $\boldsymbol{M}$ a pro nějž je tedy $f(x) \geqq f(c_1)$, neboť γ je supremum množiny $\boldsymbol{M}$ a v každém levém okolí suprema leží aspoň jeden bod x množiny $\boldsymbol{M}$ (viz str. 12). Proto $f(\gamma) \geqq \geqq f(c_1)$, ale to také není možné, neboť jsme výše dokázali, že vždy musí $f(\gamma) < f(c_1)$.

Všecky možné polohy bodu γ vedou tedy ke sporu. Proto není možné, aby v intervalu (a, b) existovaly dva body $c < d$ tak, aby $f(c) \geqq f(d)$, nýbrž pro každé dvě hodnoty c, d z (a, b), které splňují nerovnost $c < d$, musí platit $f(c) < < f(d)$. Funkce f je tedy rostoucí v intervalu (a, b).

Je-li funkce f klesající, vezmeme místo funkce f funkci g, pro niž platí $g(x) = -f(x)$. Pak z nerovností $f(x_1) > f(x_2)$ plyne $-f(x_1) < -f(x_2)$ čili $g(x_1) < g(x_2)$. Je-li tedy funkce f klesající (v intervalu nebo v bodě), je funkce g rostoucí. Protože věta platí pro funkce rostoucí, platí i pro funkce klesající.

O tom, je-li funkce v některém svém bodě rostoucí nebo klesající, lze pohodlně rozhodnout na základě derivace.

Věta **28**. Má-li funkce f v bodě a derivaci kladnou, je v tom bodě rostoucí, má-li v bodě a derivaci zápornou, je v tom bodě klesající.

Důkaz. Položme $a + h = x$ čili $h = x - a$. Pak

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

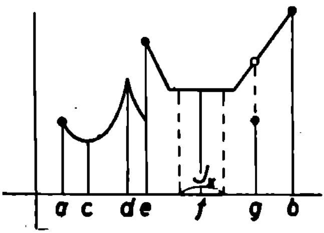
a) Je-li $f'(a) > 0$, značí to podle věty 10, že existuje takové okolí J_x bodu a, že pro všecka $x \neq a$ z J_x je $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} > 0$. Je-li $x > a$, je také $f(x) > f(a)$, a je-li $x < a$, je $f(x) < f(a)$. Funkce f je v bodě a vskutku rostoucí.

b) Je-li $f'(a) < 0$, značí to podle téže věty, že existuje takové okolí J_x bodu a, že pro všecka $x \neq a$ z J_x je $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} < 0$. Je-li tedy $x > a$, je $f(x) < f(a)$, a je-li $x < a$, je $f(x) > f(a)$ a funkce f je v bodě a klesající.

Budeme se zabývati t. zv. lokálními *extrémy*, které definujeme takto:

Funkce f nabývá v bodě a lokálního $\begin{matrix}\textit{maxima,}\\ \textit{minima,}\end{matrix}$ lze-li udat takové okolí J_x bodu a, že pro všecka $x \neq a$ z J_x je $\begin{matrix} f(x) < f(a). \\ f(x) > f(a). \end{matrix}$

Tak na příklad funkce zobrazená na obr. 45, jež je definována v uzavřeném intervalu $\langle a, b \rangle$, nabývá v bodech d, e lokálního maxima a v bodech c, g lokálního minima přes to, že není v bodech e a g spojitá. V bodě f nelze mluvit o minimu podle naší definice, neboť nelze udat takové okolí J_x bodu f, aby platila napsaná nerovnost. Rovněž tak nelze mluvit o maximu v bodě b, poněvadž tu nelze udat žádné okolí tohoto bodu, nejvýše jen levé okolí.



Obr. 45

Hledáme-li lokální extrémy dané funkce, můžeme je hledat jen v těch bodech, v nichž funkce buď nemá derivaci, nebo v nichž je derivace rovna nule, neboť v těch bodech, v nichž má funkce derivaci kladnou, je rostoucí a v těch bodech, v nichž má derivaci zápornou, je klesající, jak praví věta 28. Nemůže tam tedy nastat extrém. Hledání lokálních extrémů nám usnadní tato věta:

Věta **29**. Je-li funkce f v bodě a spojitá a lze-li udat takové okolí J_x bodu a, že f je v každém bodě $x < a$ z J_x funkcí $\begin{matrix}\text{rostoucí}\\ \text{klesající}\end{matrix}$ a v každém bodě $x > a$ z J_x funkcí $\begin{matrix}\text{klesající,}\\ \text{rostoucí,}\end{matrix}$ nabývá funkce f v bodě a lokálního $\begin{matrix}\text{maxima.}\\ \text{minima.}\end{matrix}$

Důkaz. Důkaz provedeme nejprve pro maximum. Předpokládejme, že funkce f nemá v bodě a lokální maximum, tedy že existuje v J_x aspoň jeden bod $b \neq a$ tak, že $f(b) \geqq f(a)$, avšak pro každé $x < a$ z J_x je f funkce rostoucí a pro každé $x > a$ z J_x je klesající. Jsou dvě možnosti: buď je $b < a$, nebo je $b > a$.

a) Nechť je $b < a$. Poněvadž funkce f je rostoucí v každém bodě $x < a$ z J_x, je podle věty 27 rostoucí v celé části okolí J_x, která leží vlevo od bodu a. Zvolme nějaké číslo b_1 tak, aby $b < b_1 < a$. Potom $f(b_1) > f(b)$ a také ovšem

$$f(b_1) > f(a). \tag{a}$$

Vedle toho pro každé x, které vyhovuje podmínkám $b_1 < x < a$, platí $f(x) > f(b_1)$.

Funkce f je spojitá v bodě a, a proto $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a-} f(x) = f(a)$ (věta 3). Protože však $f(x) > f(b_1)$ pro každé x z (b_1, a), je podle věty 12 $\lim\limits_{x \to a-} f(x) \geqq f(b_1)$ čili $f(a) \geqq f(b_1)$, ale to odporuje nerovnosti (a). Není tedy možné, aby $b < a$.

b) Musí tedy $b > a$. Poněvadž funkce f je klesající v každém bodě $x > a$ z J_x, je podle věty 27 klesající v celé části okolí J_x, která leží vpravo od bodu a. Zvolme nějaké b_1 tak, aby $a < b_1 < b$. Potom $f(b_1) > f(b)$ a ovšem opět

$$f(b_1) > f(a). \tag{a}$$

Vedle toho pro každé x, které vyhovuje podmínkám $a < < x < b_1$, platí $f(x) > f(b_1)$.

Funkce f je spojitá v bodě a, a proto $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a+} f(x) = = f(a)$. Protože však $f(x) > f(b_1)$ pro každé x z (a, b_1), je podle věty 12 $\lim\limits_{x \to a+} f(x) \geqq f(b_1)$ čili $f(a) \geqq f(b_1)$, ale to opět odporuje nerovnosti (a). Proto není možné, aby $b > a$.

Z toho plyne, že pro žádné b z J_x nemůže být $f(b) \geqq f(a)$; proto v bodě a musí nastávat maximum.

Jde-li o minimum, vezmeme funkci $g(x) = - f(x)$, která je v každém bodě $x < a$ z J_x rostoucí a v každém bodě $x > a$ z J_x klesající. O této funkci jsme právě dokázali, že má v bodě a maximum, t. j. pro každé $x \neq a$ z J_x je $g(x) < g(a)$. Proto $- f(x) < - f(a)$ čili $f(x) > f(a)$, takž funkce f má v bodě a lokální minimum.

Příklad 33. Vyšetřme průběh funkce

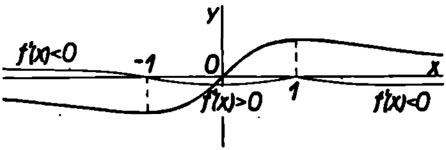
$$f(x) = \frac{x}{1 + x^2}.$$

Tato funkce je definována pro každé x, neboť výraz $f(x)$ má smysl pro každé x, a je spojitá v celém intervalu $(-\infty, \infty)$. Utvořme derivaci

$$f'(x) = \frac{1 - x^2}{(1 + x^2)^2};$$

to opět platí pro každé x. Je-li $1 - x^2 > 0$, je $f'(x) > 0$, a je-li $1 - x^2 < 0$, je $f'(x) < 0$. Funkce f je tedy rostoucí ve všech bodech, pro něž platí $1 - x^2 > 0$, t. j. $|x| < 1$, a klesající ve všech bodech, pro něž platí $1 - x^2 < 0$, t. j. $|x| > 1$.

Podle znaménka derivace však nemůžeme rozhodnout o průběhu funkce f v bodech $x = \pm 1$, neboť tam je $f'(x) = 0$. Funkce f je však v těchto bodech spojitá a v každém bodě $x \neq 1$ jistého levého okolí bodu 1 je $f'(x) > 0$ a v každém bodě $x \neq 1$ jistého pravého okolí bodu 1 je $f'(x) < 0$, proto



Obr. 46

v bodě 1 podle věty 29 nastává lokální maximum. Podobně ukážeme, že v bodě -1 nastává lokální minimum (viz obr. 46).

Příklad 34. Podobně vyšetříme funkci

$$f(x) = |\sin x|.$$

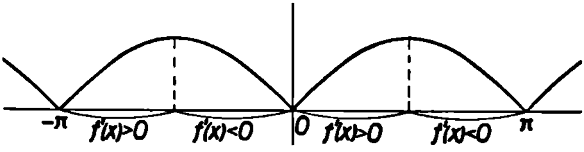
Funkce je definována opět pro každé x, ale vzhledem k periodicitě funkce sinus se můžeme omeziti pouze na interval $\langle -\pi, \pi \rangle$. Pro $0 \leqq x \leqq \pi$ je $|\sin x| = \sin x$ a pro $-\pi \leqq x \leqq 0$ je $|\sin x| = -\sin x$. Proto

$$f'(x) = \begin{cases} \cos x & \text{pro } 0 < x < \pi, \\ -\cos x & \text{pro } -\pi < x < 0. \end{cases}$$

V bodě 0 derivace neexistuje, neboť $f'_+(0) = 1$, $f'_-(0) = -1$; rovněž neexistuje derivace v bodech π a $-\pi$. Vedle toho je $f'(\frac{1}{2}\pi) = f'(-\frac{1}{2}\pi) = 0$. Ve všech ostatních bodech derivace existuje a není rovna nule. Pro každé x z intervalů $(0, \frac{1}{2}\pi)$ a $(-\pi, -\frac{1}{2}\pi)$ je $f'(x) > 0$, proto je tam funkce rostoucí. Pro každé x z intervalů $(-\frac{1}{2}\pi, 0)$ a $(\frac{1}{2}\pi, \pi)$ je $f'(x) < 0$, proto je tam funkce klesající. Vzhledem k tomu, že funkce f je ve všech bodech spojitá, nastává maximum v bodech $\frac{1}{2}\pi$ a $-\frac{1}{2}\pi$

a minimum v bodech π, 0, $-\pi$. Průběh se ovšem periodicky opakuje (obr. 47).

Tuto kapitolu ukončíme důkazem dvou důležitých vět.



Obr. 47

Věta **30** (*věta Rolleova*). Má-li funkce f derivaci ve všech bodech (otevřeného) intervalu (a, b), je-li dále spojitá zprava v bodě a a spojitá zleva v bodě b a je-li $f(a) = f(b) = 0$, pak existuje (aspoň jeden) vnitřní bod c intervalu (a, b), pro nějž $f'(c) = 0$.

Důkaz. Funkce f je spojitá ve všech vnitřních bodech intervalu (a, b), neboť v nich má podle předpokladu derivaci (věta 23); v bodě a je spojitá zprava a v bodě b je spojitá zleva, je tedy spojitá v uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$. Nutno rozeznávat několik případů:

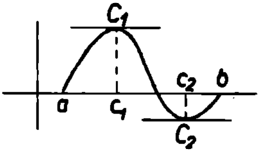
a) Existuje aspoň jeden bod x z intervalu (a, b), pro nějž $f(x) > 0$. Poněvadž funkce f je spojitá v $\langle a, b\rangle$, existuje podle věty 21 bod c, v němž funkce f nabývá své největší hodnoty M. Hodnota M musí být kladná, neboť předpokládáme, že existuje bod x, pro nějž $f(x) > 0$ a zcela jistě $M \geqq f(x)$. Při tom $c \neq a$ a $c \neq b$, neboť $f(a) = f(b) = 0$. Funkce f nemůže být v bodě c rostoucí; kdyby byla v bodě c rostoucí, musel by existovat aspoň jeden bod $x_1 > c$ tak, že by $f(x_1) > f(c) = M$, což není možné. Proto také funkce f nemůže mít v bodě c kladnou derivaci podle věty 28. *) Musí tedy $f'(c) \leqq 0$. Kdyby bylo $f'(c) < 0$, byla by funkce f v bodě c

*) Větu 28 možno vyslovit ve tvaru: Není-li funkce f v bodě a rostoucí, nemá v něm kladnou derivaci.

klesající podle věty 28, ale to také není možné, neboť pak by musel existovat takový bod $x_2 < c$, pro nějž by bylo $f(x_2) > f(c) = M$. Musí tedy $f'(c) = 0$.

b) Druhá možnost je ta, že pro žádné x z (a, b) není $f(x) > 0$.

1. Je-li $f(x) = 0$ pro každé x z (a, b), pak podle věty 24 je $f'(x) = 0$ pro každé x z (a, b) a věta je tedy správná.



Obr. 48

2. Je-li pro některé x z (a, b) hodnota $f(x) < 0$, pak $-f(x) > 0$ a pro funkci $g(x) = -f(x)$ jsou splněny podmínky odstavce a). Proto existuje c tak, že $g'(c) = 0$. Avšak $g'(c) = -f'(c)$ podle vzorce (25). Proto také $f'(c) = 0$. Tím je věta zcela dokázána.

Geometrický význam věty Rolleovy je tento: Jestliže funkce f splňuje podmínky uvedené ve větě, existuje na grafu funkce f mezi body a, b aspoň jeden takový bod C, že tečna v něm je rovnoběžná s osou x (viz obr. 48, v němž jsou takové body dva).

Věta **31** (*věta o přírůstku funkce* čili *věta o střední hodnotě*). Má-li funkce f ve všech bodech intervalu (a, b) derivaci a je-li v bodě a spojitá zprava a v bodě b spojitá zleva, existuje (aspoň jeden) vnitřní bod c intervalu (a, b), pro nějž platí $f(b) - f(a) = (b - a) \cdot f'(c)$.

Důkaz. Vezměme v úvahu funkci

$$F(x) = (b - a)[f(x) - f(a)] - (x - a)[f(b) - f(a)].$$

Tato funkce má derivaci

$$F'(x) = (b - a) \cdot f'(x) - [f(b) - f(a)]$$

ve všech bodech intervalu (a, b), v bodě a je spojitá zprava, v bodě b je spojitá zleva a $F(a) = F(b) = 0$, jak se snadno přesvědčíme. Funkce F tedy splňuje podmínky věty Rolleovy; proto existuje vnitřní bod c intervalu (a, b) tak, že $F'(c) = 0$, t. j. $(b - a) \cdot f'(c) - [f(b) - f(a)] = 0$.

Také věta o přírůstku funkce má jednoduchý geometrický význam. Protože je $b - a \neq 0$, lze nalezenou rovnost psát ve tvaru

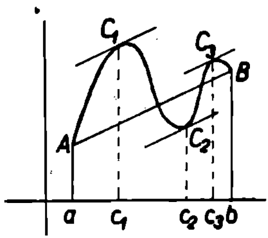
$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Pravá strana je směrnice přímky AB (obr. 49), levá strana je směrnice tečny v bodě o souřadnicích c, $f(c)$. Splňuje-li funkce f podmínky věty o přírůstku funkce, existuje na oblouku křivky mezi body A, B aspoň jeden bod C tak, že tečna v něm je rovnoběžná s přímkou AB.

Z věty o přírůstku funkce plyne tento důsledek:

Důsledek. Má-li funkce f pro všecka x z nějakého intervalu J_x derivaci rovnou nule, pak pro každé x z J_x platí $f(x) = k$, kde k je konstanta.

Poněvadž funkce f má pro všecka x z J_x derivaci, je spojitá ve všech bodech intervalu J_x. Jsou-li a, b dva (vnitřní) body z J_x takové, že $a < b$, je funkce f v bodě a spojitá zprava a v bodě b zleva. Můžeme tedy na interval $\langle a, b \rangle$ aplikovat větu o přírůstku funkce, podle níž existuje vnitřní bod c intervalu (a, b) tak, že $f(b) - f(a) = (b - a) \cdot f'(c)$. Avšak $f'(c) = 0$, neboť c je vnitřní bod intervalu J_x, proto $f(b) - f(a) = 0$ čili $f(b) = f(a)$. To platí pro kterékoli dva body x, x_1 z J_x. Položíme-li $f(x_1) = k$, je $f(x) = k$ pro každé x z J_x.



Obr. 49

Cvičení.

31. Stanovte derivace funkcí: a) $3x^2 - 2x + 1$, b) $\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + 2$, c) $(x^2 + 2x - 3)(x^2 - x + 4)$, d) $\dfrac{x + \sqrt{5}}{x}$,

e) $\dfrac{a^2 + x^2}{a^2 - x^2}$, $a \neq 0$, f) $\dfrac{(x-1)(x-2)}{x-3}$, g) $\dfrac{1}{(x+a)(x+b)}$, $a \neq 0$, $b \neq 0$, h) $\dfrac{1+x^2}{(1+x)^2}$, i) $\operatorname{tg}x - x$, j) $\dfrac{1}{\cos x}$, k) $x^2 \sin x$, l) $\sin 2x$, m) $\dfrac{\sin x}{1 - \sin x}$, n) $\dfrac{\operatorname{tg}x + 1}{\operatorname{tg}x - 1}$.

32. Jakou derivaci má funkce a) $\dfrac{1}{|x|}$, b) $|x+1| + |x|$, c) $\left|\dfrac{x+1}{x-1}\right|$?

33. Těleso vržené svisle vzhůru rychlostí c se pohybuje podle rovnice $s = ct - \frac{1}{2}gt^2$, při čemž s je dráha, t čas, g (konstantní) zrychlení gravitační. a) Stanovte okamžitou rychlost tělesa v okamžiku t. b) V které výši a v kterém okamžiku je jeho okamžitá rychlost rovna nule? c) S jakou okamžitou rychlostí dopadne těleso zpět do místa, z něhož bylo vrženo?

34. V kterých bodech a pod kterým úhlem protínají osu x křivky: a) $y = \sin x$, b) $y = \operatorname{tg}x$, c) $y = x^3 - x$?

35. Úplnou indukcí dokažte, že

$$(k_1u_1 + k_2u_2 + \ldots + k_nu_n)' = k_1u'_1 + k_2u'_2 + \ldots + k_nu'_n,$$

kde $k_1, k_2, \ldots, k_n$ jsou konstanty a $u_1, u_2, \ldots, u_n$ jsou funkce proměnné x.

36. Úplnou indukcí dokažte, že pro $n > 0$ celé je

$$[f^n(x)]' = nf^{n-1}(x) \,.\, f'(x),$$

kde f je funkce, která má v bodě x derivaci $f'(x)$. b) Platí vzorec i pro $n < 0$ celé? c) Derivujte podle toho $\sin^2 x$, $\dfrac{1}{\cos^2 x}$, $(1 + 2x)^{23}$.

37. Úplnou indukcí dokažte, že

$$\frac{(u_1 \,.\, u_2 \ldots u_n)'}{u_1 \,.\, u_2 \ldots u_n} = \frac{u_1'}{u_1} + \frac{u_2'}{u_2} + \ldots + \frac{u_n'}{u_n}\,,$$

pokud jsou jmenovatelé různí od nuly. Odvoďte odtud znovu vzorec ze cvič. 36.

38. Funkce f se nazývá $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{sudá,}}{\text{lichá,}}$ má-li tuto vlastnost: Je-li definována v bodě x, je definována také v bodě $-x$ a $\genfrac{}{}{0pt}{}{f(-x) = f(x).}{f(-x) = -f(x).}$ (Na př. x^n pro n sudé nebo $\cos x$ jsou funkce sudé, x^n pro n liché nebo $\sin x$ jsou funkce liché.)

Dokažte větu: Derivace $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{sudé}}{\text{liché}}$ funkce je $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{lichá}}{\text{sudá}}$ funkce.

39. Stanovte body, v kterých je daná funkce rostoucí nebo klesající, a body, ve kterých nabývá maxima nebo minima, v případech: a) $x^3 - x$, b) $(x^2 - 1)^2$, c) $\dfrac{1}{1 + x^2}$, d) $\dfrac{x}{(1 - x)^2}$, $x \neq 1$, e) $|x + 1| + |x - 1|$, f) $x + \sin x$, g) $|\sin x| + |\cos x|$.

40. Pomocí věty o přírůstku funkce dokažte, že pro $0 < x < \frac{1}{2}\pi$ je a) $\sin x < x$, b) $\operatorname{tg} x > x$.

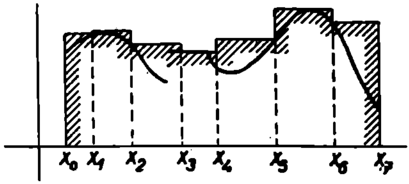
V. URČITÝ INTEGRÁL

Budiž dána funkce f definovaná pro všechna x z jakéhosi intervalu $\langle a, b\rangle$ a v tomto intervalu omezená. Zvolme libovolných $n - 1$ čísel $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, tak, aby $a < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < b$, a pro úplnost ještě doplníme označení $a = x_0$, $b = x_n$. Tím jsme rozdělili interval $\langle a, b\rangle$ na n dílčích intervalů $\langle x_0, x_1\rangle, \langle x_1, x_2\rangle, \ldots, \langle x_{n-1}, x_n\rangle$ (obr. 50, v němž je $n = 7$). Délky těchto intervalů označme $\Delta x_1 = x_1 - x_0$,

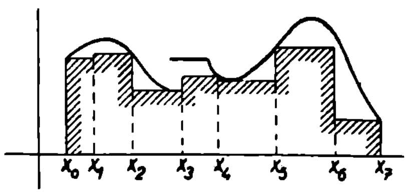
$\Delta x_2 = x_2 - x_1, \ldots, \Delta x_n = x_n - x_{n-1}$. Obecně k-tý interval je $\langle x_{k-1}, x_k \rangle$ a jeho délka $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$. Vždy je $\Delta x_k > 0$ a

$$\Delta x_1 + \Delta x_2 + \ldots + \Delta x_n = b - a.$$

Množinu dělicích bodů $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n$ nazveme *rozdělením* intervalu $\langle a, b \rangle$. Abychom se mohli jasně vyjadřovat, označme toto rozdělení nějakým písmenem, třeba D.



Obr. 50



Obr. 51

Protože funkce f je omezená v intervalu $\langle a, b \rangle$, je omezená i v každém dílčím intervalu $\langle x_{k-1}, x_k \rangle$. Proto má v každém dílčím intervalu určité supremum a určité infimum. Toto supremum v k-tém dílčím intervalu označme M_k, infimum v témž intervalu označme m_k. Je ovšem vždy $M_k \geqq m_k$. Utvořme nyní součty

$$S(D) = M_1 \,.\, \Delta x_1 + M_2 \,.\, \Delta x_2 + \ldots + M_n \,.\, \Delta x_n,$$
$$s(D) = m_1 \,.\, \Delta x_1 + m_2 \,.\, \Delta x_2 + \ldots + m_n \,.\, \Delta x_n.$$

Je-li $f(x) \geqq 0$ pro každé x z $\langle a, b\rangle$, je geometrický význam součtů $S(D)$ a $s(D)$ znázorněn vyčárkovanou plochou na obr. 50 a 51. Jejich hodnota závisí jednak na průběhu funkce f v intervalu $\langle a, b\rangle$, jednak na tom, jak zvolíme rozdělení D. Ježto $M_k \geqq m_k$, je $S(D) \geqq s(D)$. Proto součet $S(D)$ nazveme *horním součtem* a součet $s(D)$ *dolním součtem* příslušným k rozdělení D.

Ponecháme nyní funkci f beze změny a budeme zkoumat, jak závisí hodnoty $S(D)$ a $s(D)$ na rozdělení D.

Jestliže v určitém rozdělení ponecháme všecky dělicí body $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ beze změny a zavedeme tam ještě další dělicí body, vznikne nové rozdělení D_1, které nazveme *zjemněním* rozdělení D.

Pomocná věta. Je-li D_1 zjemněním rozdělení D, pak $S(D) \geqq S(D_1) \geqq s(D_1) \geqq s(D)$; jsou-li D a D' dvě libovolná rozdělení intervalu $\langle a, b\rangle$, je vždy $S(D) \geqq s(D')$.

Důkaz prvé části provedeme tak, že si budeme myslit, že rozdělení D_1 vznikne z rozdělení D tak, že k dělicím bodům rozdělení D přidáváme další dělicí body rozdělení D_1 postupně jeden po druhém. Všimněme si nejprve jen dílčího intervalu $\langle x_{k-1}, x_k\rangle$, který do součtu $S(D)$ přispívá příspěvkem $M_k \,.\, \Delta x_k$ a do součtu $s(D)$ příspěvkem $m_k \,.\, \Delta x_k$. Přidáme-li sem další dělicí bod ξ tak, že $x_{k-1} < \xi < x_k$, dostaneme z intervalu $\langle x_{k-1}, x_k\rangle$ dva intervaly $\langle x_{k-1}, \xi\rangle$, $\langle \xi, x_k\rangle$. V intervalu $\langle x_{k-1}, \xi\rangle$ má funkce f supremum M_k' a infimum m_k' a v intervalu $\langle \xi, x_k\rangle$ má supremum M_k'' a infimum m_k''. Tyto dva intervaly přispívají do součtu $S(D_1)$ hodnotou

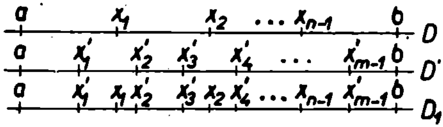
$$M_k'(\xi - x_{k-1}) + M_k''(x_k - \xi) \leqq M_k(\xi - x_{k-1}) +$$
$$+ M_k(x_k - \xi) = M_k(x_k - x_{k-1}) = M_k \,.\, \Delta x_k,$$

neboť M_k je supremum v celém k-tém dílčím intervalu, takže $M_k' \leqq M_k$, $M_k'' \leqq M_k$. Podobně oba intervaly přispívají k součtu $s(D_1)$ hodnotou

$$m_k'(\xi - x_{k-1}) + m_k''(x_k - \xi) \geqq m_k(\xi - x_{k-1}) +$$
$$+ m_k(x_k - \xi) = m_k(x_k - x_{k-1}) = m_k \,.\, \Delta x_k,$$

neboť m_k je infimum v celém k-tém dílčím intervalu, takže $m'_k \geqq m_k$, $m''_k \geqq m_k$. Totéž platí, přidáme-li kterýkoli další dělicí bod, takže $S(D_1) \leqq S(D)$ a $s(D_1) \geqq s(D)$. Ježto dále vždy $S(D_1) \geqq s(D_1)$, máme celkem $S(D) \geqq S(D_1) \geqq s(D_1) \geqq$ $\geqq s(D)$.

Máme-li dále dvě libovolná různá rozdělení D a D' intervalu $\langle a, b \rangle$, existuje vždy takové rozdělení D_1, které je současně zjemněním obou. Stačí totiž zahrnout do rozdělení D_1 všecky dělicí body rozdělení D i všecky dělicí body rozdělení D' (viz obr. 52). Takto vzniklé rozdělení D_1 obsahuje všecky



Obr. 52

dělicí body rozdělení D a je tedy jeho zjemněním. Rozdělení D_1 však také obsahuje všecky dělicí body rozdělení D' a je tedy také jeho zjemněním. Proto podle toho, co bylo výše dokázáno, je $S(D) \geqq S(D_1)$ a zároveň $s(D_1) \geqq s(D')$ čili $S(D) \geqq s(D')$, neboť $S(D_1) \geqq s(D_1)$, t. j. **žádný horní součet není nikdy menší než kterýkoli dolní součet.**

Nejjednodušší rozdělení D_0 vzniká pro $n = 1$, t. j. pro $x_0 = a$, $x_1 = b$, tedy když necháme interval $\langle a, b \rangle$ nerozdělený. Pak horní součet $S(D_0)$ má pouze jediný člen $M(b - a)$, kde M je supremum funkce f v celém intervalu $\langle a, b \rangle$, a také dolní součet $s(D_0)$ má pouze jediný člen $m(b - a)$, kde m je infimum funkce f v intervalu $\langle a, b \rangle$. Poněvadž každé rozdělení D možno považovat za zjemnění rozdělení D_0, je vždy

$$M(b - a) \geqq S(D) \geqq s(D) \geqq m(b - a).$$

Množina všech horních součtů i množina všech dolních součtů jsou tedy množiny omezené, které podle vět na str. 12

mají určité supremum a infimum. Infimum množiny horních součtů označujeme názvem *horní integrál* funkce f od a do b a užíváme pro ně znaku

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x$$

a podobně supremum množiny dolních součtů označujeme názvem *dolní integrál* funkce f od a do b a užíváme pro ně znaku

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Jestliže se obě takto definovaná čísla sobě rovnají, užíváme pro ně společného názvu *integrál* funkce f od a do b (někdy říkáme také *určitý integrál* funkce f od a do b) a značíme

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Funkce f se jmenuje *funkce integrovaná*, číslo a se jmenuje *dolní mez*, číslo b se jmenuje *horní mez*, písmeno x se nazývá *integrační proměnná.*

Poznámka. Aby měly vyslovené definice smysl, je jasné, že funkce f musí být v intervalu $\langle a, b\rangle$ omezená; kdyby totiž omezená nebyla, neměly by její hodnoty v intervalu $\langle a, b\rangle$ suprema nebo infima a nemělo by smysl hovořit o horních nebo o dolních součtech (nebo o obojím).

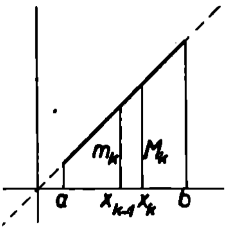
Věta **32.** Je-li funkce f omezená v intervalu $\langle a, b\rangle$, je

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \geqq \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Důkaz. Je-li funkce f omezená v intervalu $\langle a, b\rangle$, pak podle předcházející poznámky oba integrály existují. Je zřejmé, že horní integrál nemůže být menší než dolní integrál, neboť kdyby bylo $\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x < \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x$, znamenalo by to, že existuje číslo K, které má tu vlastnost, že

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x < K < \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Číslo K je předně větší než infimum množiny horních součtů, a proto podle věty na str. 12 existuje takové rozdělení D, že $S(D) < K$. Číslo K je za druhé menší než supremum množiny dolních součtů, a proto podle věty na str. 12 existuje takové rozdělení D', že $s(D') > K$ čili $S(D) < s(D')$. To však není možné, neboť to odporuje výše dokázané pomocné větě.



Obr. 53

Příklad 35. Vypočteme horní a dolní integrál funkce $f(x) = x$ od a do b, kde $a < b$. Tato funkce je v intervalu $\langle a, b \rangle$ omezená, a proto oba integrály existují. Abychom si zjednodušili počet, volíme rozdělení D_n tak, že interval $\langle a, b \rangle$ rozdělíme na n stejných dílů. Délku každého dílčího intervalu označíme $\delta = \dfrac{b-a}{n}$; to značí, že $\Delta x_k = \delta$ pro všecka přirozená čísla k od 1 do n. Supremum funkce f v k-tém dílčím intervalu je $M_k = a + k\delta$ a infimum v témže intervalu je $m_k = a + (k-1)\,\delta$ (obr. 53). Pak je

$$\begin{aligned} S(D_n) &= (a+\delta)\,\delta + (a+2\delta)\,\delta + (a+3\delta)\,\delta + \ldots + (a + \\ &+ n\delta)\,\delta = na\delta + (1+2+3+\ldots+n)\,\delta^2 = na\delta + \\ &+ \tfrac{1}{2}n(n+1)\,\delta^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s(D_n) &= a\delta + (a+\delta)\,\delta + (a+2\delta)\,\delta + \ldots + [a + (n - \\ &- 1)\,\delta]\,\delta = na\delta + [1+2+\ldots+(n-1)]\,\delta^2 = \\ &= na\delta + \tfrac{1}{2}n(n-1)\,\delta^2, \end{aligned}$$

neboť podle příkladu 9 je $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{1}{2}n(n + 1)$, $1 + 2 + \ldots + (n - 1) = \frac{1}{2}(n - 1)\, n$. Protože $n\delta = b - a$, proto

$$S(D_n) = a(b - a) + \tfrac{1}{2}(b - a)^2 + \tfrac{1}{2}(b - a)\,\delta = \tfrac{1}{2}(b^2 - a^2) + \\ + \tfrac{1}{2} \cdot \frac{(b - a)^2}{n},$$

$$s(D_n) = a(b - a) + \tfrac{1}{2}(b - a)^2 - \tfrac{1}{2}(b - a)\,\delta = \tfrac{1}{2}(b^2 - a^2) - \\ - \tfrac{1}{2} \cdot \frac{(b - a)^2}{n}.$$

Pro různá n dostáváme různé hodnoty $S(D_n)$ a $s(D_n)$. Nám jde o infimum množiny horních součtů pro všecka možná rozdělení a o supremum množiny dolních součtů opět pro všecka možná rozdělení. Určitě je

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \leqq \lim_{n\to\infty} S(D_n), \quad \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \geqq \lim_{n\to\infty} s(D_n),$$

neboť zvětšováním n vybíráme z množiny všech rozdělení určitou posloupnost. Protože však $\lim_{n\to\infty} S(D_n) = \lim_{n\to\infty} s(D_n) = \frac{1}{2}(b^2 - a^2)$ a dolní integrál nemůže být podle věty 32 větší než horní integrál, musí se oba integrály sobě rovnat. Pak také existuje integrál funkce $f(x) = x$ od a do b. Dostáváme tedy

$$\overline{\int_a^b} x\,\mathrm{d}x = \underline{\int_a^b} x\,\mathrm{d}x = \int_a^b x\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}(b^2 - a^2).$$

V další kapitole však odvodíme mnohem jednodušší methodu pro výpočet určitých integrálů.

Příklad 36. Funkce f budiž definována takto:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{je-li } x \text{ racionální}, \\ 0, & \text{je-li } x \text{ iracionální}. \end{cases}$$

Hledáme opět horní a dolní integrál této funkce od a do b ($a < b$). Interval $\langle a, b\rangle$ rozdělíme rozdělením D na n dílčích intervalů o šířkách $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$, při čemž $\Delta x_1 + \Delta x_2 + \dots + \Delta x_n = b - a$. V každém dílčím intervalu je $M_k = 1$, $m_k = 0$, neboť každý dílčí interval obsahuje jak hodnoty racionální, tak i iracionální. Proto

$$S(D) = 1 \,.\, \Delta x_1 + 1 \,.\, \Delta x_2 + \dots + 1 \,.\, \Delta x_n = b - a,$$
$$s(D) = 0 \,.\, \Delta x_1 + 0 \,.\, \Delta x_2 + \dots + 0 \,.\, \Delta x_n = 0.$$

Poněvadž žádný z těchto součtů není závislý na rozdělení D, je

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = b - a,\quad \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

V tomto příkladě je tedy horní integrál různý od dolního integrálu.

Věta **33.** Je-li funkce f spojitá v intervalu $\langle a, b\rangle$, existuje integrál $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Důkaz. Poněvadž f je funkce spojitá v $\langle a, b\rangle$, je podle věty 20 v tomto intervalu omezená. Proto podle poznámky na str. 89 existuje horní i dolní integrál od a do b. Abychom ukázali, že existuje integrál, musíme dokázat, že horní integrál je roven dolnímu. Zvolme libovolné číslo $\gamma > 0$ a položme $\varepsilon = \dfrac{\gamma}{b-a}$. Pak podle věty 22 existuje takové číslo $\delta > 0$, že pro každá dvě čísla x_1, x_2 z $\langle a, b\rangle$, která vyhovují nerovnosti $|x_1 - x_2| < \delta$, platí $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$. Sestrojme nyní takové rozdělení D intervalu $\langle a, b\rangle$, aby $\Delta x_k < \delta$ pro každé k. To je zřejmě možné, jen je třeba volit dělicí body rozdělení D dosti hustě. Protože

$$S(D) \geqq \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \geqq \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \geqq s(D),$$

proto

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x - \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \leqq S(D) - s(D) =$$

$$= (M_1 - m_1)\,\Delta x_1 + (M_2 - m_2)\,\Delta x_2 + \ldots +$$
$$+ (M_n - m_n)\,\Delta x_n,$$

při čemž M_k, m_k je supremum a infimum funkce f v k-tém dílčím intervalu $\langle x_{k-1}, x_k\rangle$. Těchto hodnot dosáhne funkce f ve dvou bodech ξ_k, η_k tohoto intervalu. Protože je šířka k-tého dílčího intervalu menší než δ, je $|\xi_k - \eta_k| < \delta$. Proto také $M_k - m_k < \varepsilon = \dfrac{\gamma}{b-a}$ (absolutní hodnota je zbytečná, neboť víme, že $M_k \geqq m_k$). Je tedy

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x - \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x < \frac{\gamma}{b-a}\,(\Delta x_1 + \Delta x_2 + \ldots +$$
$$+ \Delta x_n) = \gamma, \tag{a}$$

neboť součet $\Delta x_1 + \Delta x_2 + \ldots + \Delta x_n = b - a$. Číslo γ je zcela libovolné, je omezeno pouze podmínkou $\gamma > 0$. Z toho plyne

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

neboť kdyby byl rozdíl obou integrálů roven jakémukoliv kladnému číslu $k > 0$, pak by nerovnost (a) neplatila pro $\gamma < k$ a to není možné.

Poznamenejme ještě, že obrácená věta neplatí; integrál $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ může existovat a funkce f nemusí být v intervalu $\langle a, b\rangle$ spojitá. Omezíme se však většinou jen na vyšetřování integrálů spojitých funkcí.

Věta **34**. Jestliže pro každé x z intervalu $\langle a, b\rangle$ platí $f(x) \leqq g(x)$ a jestliže existují integrály $\int_a^b f(x)\,dx$ a $\int_a^b g(x)\,dx$, pak $\int_a^b f(x)\,dx \leqq \int_a^b g(x)\,dx$.

Důkaz. Nazveme D libovolné rozdělení intervalu $\langle a, b\rangle$. Poněvadž obě dané funkce mají integrál v intervalu $\langle a, b\rangle$, mají také horní integrál i dolní integrál a jsou v intervalu $\langle a, b\rangle$ omezené podle poznámky na str. 89. Označíme-li M_k supremum hodnot $f(x)$ v k-tém dílčím intervalu, a M'_k supremum hodnot $g(x)$ v k-tém dílčím intervalu, je $M_k \leqq M'_k$. Kdyby totiž bylo $M_k > M'_k$, existovalo by podle základních vlastností suprema (viz str. 12) takové x_1, pro které by bylo $f(x_1) > M'_k$ a ovšem také $M'_k \geqq g(x_1)$, takže by bylo $f(x_1) > g(x_1)$, a to není možné. Označíme-li $S(D)$ horní součet příslušný k funkci f, $S'(D)$ horní součet příslušný k funkci g (a k rozdělení D), je zřejmě také $S(D) \leqq S'(D)$. Označíme-li ještě $I = \int_a^b f(x)\,dx$, $I' = \int_a^b g(x)\,dx$, je podle definice integrálu $I \leqq S(D)$ a $I' \leqq S'(D)$. Protože $S(D) \leqq S'(D)$, proto také $I \leqq S'(D)$, t. j. I není větší než žádný horní součet $S'(D)$ a také není větší než jejich infimum, t. j. $I \leqq I'$. Kdyby totiž bylo $I > I'$, pak by podle vlastností infima (str. 12) existovalo takové rozdělení D_1, že $S'(D_1) < I$. Vedle toho jistě je $I \leqq S(D_1)$; bylo by tedy $S'(D_1) < S(D_1)$ a to není možné.

Věta **35**. Je-li funkce f omezená v intervalu $\langle a, c\rangle$ a je-li b libovolný vnitřní bod tohoto intervalu, pak

$$\overline{\int_a^c} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx + \overline{\int_b^c} f(x)\,dx,$$

$$\underline{\int_a^c} f(x)\,dx = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx + \underline{\int_b^c} f(x)\,dx.$$

Důkaz. Poněvadž funkce f je omezená v intervalu $\langle a, c\rangle$, je také omezená v intervalech $\langle a, b\rangle$, $\langle b, c\rangle$. Proto také v každém z těchto intervalů existuje horní i dolní integrál. Pro zkrácení označme

$$\overline{\int_a^c} f(x)\,\mathrm{d}x = I, \quad \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = I_1, \quad \overline{\int_b^c} f(x)\,\mathrm{d}x = I_2.$$

$$\underline{\int_a^c} f(x)\,\mathrm{d}x = K, \quad \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = K_1, \quad \underline{\int_b^c} f(x)\,\mathrm{d}x = K_2.$$

Je-li D_1 libovolné rozdělení intervalu $\langle a, b\rangle$ a D_2 libovolné rozdělení intervalu $\langle b, c\rangle$, pak rozdělení D_1 a D_2 dohromady představují jakési rozdělení D celého intervalu $\langle a, c\rangle$, jehož jedním (pevným) dělicím bodem je bod b. Podle definice horních a dolních součtů je zřejmě

$$S(D_1) + S(D_2) = S(D), \quad s(D_1) + s(D_2) = s(D).$$

a) Protože I_1 je infimem horních součtů $S(D_1)$, proto pro každé rozdělení D_1 platí $I_1 \leqq S(D_1)$. Z podobného důvodu je $I_2 \leqq S(D_2)$ pro každé rozdělení D_2. Tedy také

$$I_1 + I_2 \leqq S(D_1) + S(D_2) = S(D) \tag{b}$$

pro každé rozdělení D, které má jeden dělicí bod v bodě b. Při tom $I_1 + I_2$ je infimem horních součtů příslušných ke všem rozdělením D. Zvolíme-li totiž libovolné číslo $\delta > 0$, existuje takové rozdělení $\overline{D_1}$ intervalu $\langle a, b\rangle$, že $S(\overline{D_1}) < I_1 + \frac{1}{2}\delta$, a takové rozdělení $\overline{D_2}$ intervalu $\langle b, c\rangle$, že $S(\overline{D_2}) < I_2 + \frac{1}{2}\delta$. Dělicí body rozdělení $\overline{D_1}$ a $\overline{D_2}$ dohromady tvoří rozdělení $\overline{D}$, jehož jedním dělicím bodem je bod b; při tom

$$S(\overline{D}) = S(\overline{D_1}) + S(\overline{D_2}) < I_1 + I_2 + \delta.$$

Je tedy $I_1 + I_2$ vskutku infimem horních součtů příslušných ke všem rozdělením D, která mají jeden dělicí bod v bodě b, neboť splňuje obě základní vlastnosti infima (str. 12).

Protože I je infimem horních součtů pro **všecka** rozdělení a ne jen pro ta, která mají jeden dělicí bod v bodě b, musí

$$I \leqq I_1 + I_2.$$

Dejme tomu, že $I < I_1 + I_2$. Podle základní vlastnosti infima existuje pak takové rozdělení D' intervalu $\langle a, c\rangle$, že

$$S(D') < I_1 + I_2. \tag{c}$$

Vezměme nyní některé rozdělení D intervalu $\langle a, c\rangle$, které má v bodě b jeden dělicí bod, a utvořme společné zjemnění D'' obou rozdělení D a D'. Podle pomocné věty musí

$$S(D'') \leqq S(D'). \tag{d}$$

Rozdělení D'' však má v bodě b jeden dělicí bod. Proto podle (b)

$$I_1 + I_2 \leqq S(D''). \tag{e}$$

Porovnáním vztahů (c), (d), (e) vidíme, že $I_1 + I_2 < I_1 + I_2$, což není možné. Není tedy možno, aby $I < I_1 + I_2$, nýbrž musí $I = I_1 + I_2$.

b) Protože K_1 je supremem dolních součtů $s(D_1)$, proto $K_1 \geqq s(D_1)$ pro každé rozdělení D_1. Z téhož důvodu $K_2 \geqq$ $\geqq s(D_2)$ pro každé rozdělení D_2. Tedy také

$$K_1 + K_2 \geqq s(D_1) + s(D_2) = s(D) \tag{b'}$$

pro každé rozdělení D, které má jeden dělicí bod v bodě b. Při tom $K_1 + K_2$ je supremem dolních součtů příslušných ke všem rozdělením D. Zvolíme-li totiž libovolné číslo $\delta > 0$, existuje takové rozdělení $\overline{D_1}$ intervalu $\langle a, b\rangle$, že $s(\overline{D_1}) >$ $> K_1 - \frac{1}{2}\delta$, a takové rozdělení $\overline{D_2}$ intervalu $\langle b, c\rangle$, že $s(\overline{D_2}) > K_2 - \frac{1}{2}\delta$. Dělicí body rozdělení $\overline{D_1}$ a $\overline{D_2}$ dohromady tvoří rozdělení $\overline{D}$, jehož jedním dělicím bodem je bod b; při tom

$$s(\overline{D}) = s(\overline{D_1}) + s(\overline{D_2}) > K_1 + K_2 - \delta.$$

Je tedy $K_1 + K_2$ vskutku supremem dolních součtů příslušných ke všem rozdělením D, která mají jeden dělicí bod v bodě b, neboť splňuje obě základní vlastnosti suprema (str. 12).

Protože K je supremem dolních součtů pro všecka rozdělení a ne jen pro ta, která mají jeden dělicí bod v bodě b, musí

$$K \geqq K_1 + K_2.$$

Dejme tomu, že $K > K_1 + K_2$. Podle základní vlastnosti suprema existuje pak takové rozdělení D' intervalu $\langle a, c\rangle$, že

$$s(D') > K_1 + K_2. \tag{c'}$$

Vezměme opět některé rozdělení D intervalu $\langle a, c\rangle$, které má v bodě b jeden dělicí bod, a utvořme společné zjemnění D'' obou rozdělení D a D'. Podle pomocné věty musí

$$s(D'') \geqq s(D'). \tag{d'}$$

Rozdělení D'' však má v bodě b jeden dělicí bod. Proto podle (b')

$$K_1 + K_2 \geqq s(D''). \tag{e'}$$

Porovnáním vztahů (c'), (d'), (e') vychází, že $K_1 + K_2 > > K_1 + K_2$, což není možné. Není tedy možno, aby $K > > K_1 + K_2$, nýbrž musí $K = K_1 + K_2$.

Z věty 35 odvodíme dva důležité důsledky:

Důsledek I. Je-li $a < b < c$ a existují-li integrály $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, $\int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x$, existuje také integrál $\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$, při čemž

$$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{30}$$

Protože existuje integrál $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, je funkce f v intervalu $\langle a, b\rangle$ omezená. Z podobného důvodu je funkce f omezená také v intervalu $\langle b, c\rangle$. Je tedy omezená v celém intervalu

$\langle a, c\rangle$ a má v něm horní integrál I i dolní integrál K. Proto podle věty 35

$$I = \overline{\int_a^c} f(x)\,\mathrm{d}x = \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x + \overline{\int_b^c} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$K = \underline{\int_a^c} f(x)\,\mathrm{d}x = \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x + \underline{\int_b^c} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x,$$

takže $I = K$, čímž je prokázána existence integrálu $\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$ a správnost rovnice (30).

Důsledek **2**. Je-li $a < c < d < b$ a existuje-li integrál $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, existují také integrály $\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$, $\int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x$, $\int_d^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Protože existuje integrál $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, je funkce f v intervalu $\langle a, b\rangle$ omezená. Proto je omezená i v intervalech $\langle a, c\rangle$, $\langle c, d\rangle$, $\langle d, b\rangle$ a existuje v nich horní i dolní integrál. Pak je

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \overline{\int_a^c} f(x)\,\mathrm{d}x + \overline{\int_c^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \overline{\int_a^c} f(x)\,\mathrm{d}x + \overline{\int_c^d} f(x)\,\mathrm{d}x + \overline{\int_d^b} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \underline{\int_a^c} f(x)\,\mathrm{d}x + \underline{\int_c^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \underline{\int_a^c} f(x)\,\mathrm{d}x + \underline{\int_c^d} f(x)\,\mathrm{d}x + \underline{\int_d^b} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Odečtením obou rovnic vychází

$$[\overline{\int_a^c} f(x)\,\mathrm{d}x - \underline{\int_a^c} f(x)\,\mathrm{d}x] + [\overline{\int_c^d} f(x)\,\mathrm{d}x - \underline{\int_c^d} f(x)\,\mathrm{d}x] +$$
$$+ [\overline{\int_d^b} f(x)\,\mathrm{d}x - \underline{\int_d^b} f(x)\,\mathrm{d}x] = 0.$$

Máme zde tři členy; v žádném z nich není záporné číslo, neboť podle věty 32 nemůže být horní integrál menší než dolní integrál. Součet těchto tří členů je roven nule, musí tedy každý z nich být roven nule; proto

$$\overline{\int_a^c} f(x)\,\mathrm{d}x = \underline{\int_a^c} f(x)\,\mathrm{d}x, \quad \overline{\int_c^d} f(x\,\mathrm{d}x) = \underline{\int_c^d} f(x)\,\mathrm{d}x,$$
$$\overline{\int_d^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \underline{\int_d^b} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

což zaručuje existenci integrálů, o nichž věta mluví.

Dosud jsme definovali integrál funkce f od a do b jen pro případ $a < b$. Toto omezení je nepohodlné, a proto položíme

$$\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0, \text{ kdykoli je hodnota } f(a) \text{ definována}, \tag{31}$$

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x, \text{ když } a > b. \tag{32}$$

Je-li M supremum a m infimum hodnot funkce f v intervalu $\langle a, b\rangle$ a má-li tato funkce integrál od a do b, plyne z nerovností na str. 88

$$M(b-a) \geqq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqq m(b-a),$$

pokud $a < b$. To lze přepsat ve tvaru

$$M \geqq \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqq m.$$

Poslední nerovnost však je správná i pro $a > b$, neboť

$$\frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a-b} \cdot \int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Věta **36.** Existují-li integrály $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, $\int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x$, existuje také integrál $\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$, při čemž je vždy

$$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Důkaz. Je-li $a = b$, je věta správná, neboť první člen na pravé straně je roven nule a druhý člen je roven levé straně. Je-li $b = c$, je druhý člen na pravé straně roven nule a prvý člen je roven levé straně. Je-li $a = c$, pak naše věta zní

$$0 = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$$

a to je také správné.

Jsou-li a, b, c tři libovolná čísla navzájem různá, je možno šest různých pořadí podle velikosti:

I. Pro případ $a < b < c$ je věta totožná s důsledkem 1 věty 35. Při tom z existence kterýchkoli dvou integrálů plyne existence třetího.

II. Je-li $a < c < b$, pak podle I. platí $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x =$
$= \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$, takže $\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x =$
$= \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x.$

III. Pro $b < a < c$ je $\int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$,

takže $\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x +$

$+ \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x$.

IV. Pro $b < c < a$ je $\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^a f(x)\,\mathrm{d}x$, tak-

že $\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_c^a f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x =$

$= \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x$.

V. Pro $c < a < b$ je $\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_c^a f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, takže

$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_c^a f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x +$

$+ \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x$.

VI. Pro $c < b < a$ je $\int_c^a f(x)\,\mathrm{d}x = \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$, tak-

že $\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_c^a f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x - \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x =$

$= \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x$.

Má-li funkce f integrál v nějakém uzavřeném intervalu J, má podle důsledku 2 věty 35 také integrál v každém intervalu, který je částí intervalu J. Tu můžeme horní mez považovat za proměnnou a hodnota integrálu se potom jeví jako funkce této proměnné horní meze. Zavedeme si označení

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt.$$

Integrační proměnnou jsme označili t, abychom ji nepletli s proměnnou horní mezí x.

Věta **37**. Je-li $a < b$ a má-li funkce f integrál od a do b, je funkce $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ spojitá v intervalu $\langle a, b\rangle$.

Důkaz. Poněvadž funkce f má integrál od a do b, je v intervalu $\langle a, b\rangle$ omezená, t. j. pro všechna x z $\langle a, b\rangle$ platí $|f(x)| < k$, kde $k > 0$ je vhodné číslo.

Je-li předně c vnitřním bodem intervalu $\langle a, b\rangle$, musíme dokázat, že funkce F je spojitá v bodě c, t. j. že platí $\lim\limits_{x\to c} F(x) = F(c)$ (str. 50) čili že funkce $F(x) - F(c)$ je v okolí bodu c nekonečně malá (věta 5). Zvolíme-li libovolné číslo $\varepsilon > 0$, je třeba ukázat, že existuje takové okolí J_x bodu c, že pro všechna $x \neq c$ z J_x je $|F(x) - F(c)| < \varepsilon$. Spočtěme tedy výraz $F(x) - F(c)$. Platí

$$F(x) - F(c) = \int_a^x f(t)\,dt - \int_a^c f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^x f(t)\,dt -$$
$$- \int_a^c f(t)\,dt \doteq \int_c^x f(t)\,dt.$$

Nechť M značí supremum a m infimum hodnot $f(x)$ v intervalu $\langle a, b\rangle$.

Poněvadž $M < k$, $m > -k$, je podle poznámky na str. 99

$$-k < \frac{1}{x - c}\int_c^x f(t)\mathrm{d}t < k$$ a odtud plyne

$$|F(x) - F(c)| = \left|\int_c^x f(t)\,dt\right| < k|x - c|.$$

Zvolíme-li tedy libovolné $\varepsilon > 0$, pak pro všecka x, pro něž platí $|x - c| < \frac{\varepsilon}{k}$, je splněna nerovnost $|F(x) - F(c)| < \varepsilon$. Nerovnost $|x - c| < \frac{\varepsilon}{k}$ určuje však podle (3) na str. 16 interval $c - \frac{\varepsilon}{k} < x < c + \frac{\varepsilon}{k}$, jenž je okolím bodu c.

Za druhé je třeba dokázat, že funkce F je v bodě a spojitá zprava, t. j. že $\lim\limits_{x \to a+} F(x) = F(a)$. Tu platí

$$|F(x) - F(a)| = \left|\int_a^x f(t)\,dt - \int_a^a f(t)\,dt\right| = \left|\int_a^x f(t)\,dt\right| <$$
$$< k(x - a).$$

Tento výraz je menší než ε pro každé x, které vyhovuje nerovnosti $0 < x - a < \frac{\varepsilon}{k}$ čili $a < x < a + \frac{\varepsilon}{k}$, což je pravé okolí bodu a (s výjimkou tohoto bodu). Je tedy $F(x)$ funkce nekonečně malá zprava v okolí bodu a.

Za třetí je třeba dokázat, že funkce F je v bodě b spojitá zleva, t. j. že $\lim\limits_{x \to b-} F(x) = F(b)$. Tu je

$$|F(x) - F(b)| = \left|\int_a^x f(t)\,dt - \int_a^b f(t)\,dt\right| = \left|\int_b^x f(t)\,dt\right| <$$
$$< k(b - x).$$

Tento výraz je menší než ε pro každé x, které vyhovuje nerovnostem $0 < b - x < \frac{\varepsilon}{k}$, t. j. $b - \frac{\varepsilon}{k} < x < b$; to je však levé okolí bodu b (s výjimkou toho bodu).

Věta **38**. Budiž c vnitřní bod intervalu $\langle a, b\rangle$. Existuje-li integrál $F(c) = \int_a^c f(t)\,dt$ a je-li funkce f spojitá v bodě c, pak $F'(c) = f(c)$.

Důkaz. Je-li funkce f spojitá v bodě c, znamená to podle definice na str. 51, že ke každému okolí J_y bodu $f(c)$ existuje takové okolí J_t bodu c, že pro všecka t z J_t padne hodnota $f(t)$ do J_y.*) Zvolme libovolné číslo $\varepsilon > 0$ a za okolí J_y volme interval $(f(c) - \varepsilon, f(c) + \varepsilon)$. To znamená: Ke každému číslu $\varepsilon > 0$ existuje takové okolí J_t bodu c, že pro všecka t z J_t platí $f(c) - \varepsilon < f(t) < f(c) + \varepsilon$. Utvořme nyní výraz

$$\frac{F(c+h) - F(c)}{h} = \frac{1}{h}\left[\int_a^{c+h} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t\right] = \frac{1}{h}\cdot\int_c^{c+h} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Padne-li $c + h$ do J_t, což nastane, je-li číslo $|h|$ dostatečně malé, je podle poznámky na str. 99

$$f(c) - \varepsilon < \frac{1}{h}\cdot\int_c^{c+h} f(t)\,\mathrm{d}t < f(c) + \varepsilon$$

čili

$$\left|\frac{F(c+h) - F(c)}{h} - f(c)\right| < \varepsilon.$$

To znamená, že funkce $\dfrac{F(c+h) - F(c)}{h} - f(c)$ proměnné h je nekonečně malá v okolí bodu 0, takže

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(c+h) - F(c)}{h} = f(c).$$

Limita na levé straně není však nic jiného než derivace $F'(c)$. Tím je věta dokázána.

Je-li funkce f spojitá v intervalu $\langle a, b\rangle$, pak podle věty 33 a podle důsledku 2 věty 35 existuje pro každé x z $\langle a, b\rangle$ integrál $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$. Tento integrál je funkcí proměnné x

*) Proměnnou značíme nyní t.

a tato funkce je podle věty 37 v intervalu $\langle a, b\rangle$ spojitá. Podle věty 38 derivace $F'(x) = f(x)$ pro každý vnitřní bod intervalu $\langle a, b\rangle$. Tohoto výsledku budeme v dalších kapitolách vydatně používat.

Cvičení.

41. a) Dokažte větu: Je-li funkce f omezená v intervalu $\langle a, b\rangle$, pak

$$\overline{\int_a^b} k\, f(x)\,\mathrm{d}x = k \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x, \quad \underline{\int_a^b} k\, f(x)\,\mathrm{d}x = k \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x$$

pro každé $k \geqq 0$ a

$$\overline{\int_a^b} k\, f(x)\,\mathrm{d}x = k \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x, \quad \underline{\int_a^b} k\, f(x)\,\mathrm{d}x = k \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x$$

pro $k < 0$. b) Odtud plyne: Má-li funkce $f(x)$ integrál od a do b, má také funkce $k\, f(x)$ integrál od a do b, při čemž je

$$\int_a^b k\, f(x)\,\mathrm{d}x = k \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

42. a) Jsou-li funkce f a g omezené v intervalu $\langle a, b\rangle$, pak

$$\overline{\int_a^b} [f(x) + g(x)]\,\mathrm{d}x \leqq \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x + \overline{\int_a^b} g(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$\underline{\int_a^b} [f(x) + g(x)]\,\mathrm{d}x \geqq \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x + \underline{\int_a^b} g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Dokažte. b) Odtud plyne: Mají-li funkce $f(x)$ a $g(x)$ integrály od a do b, má také funkce $f(x) + g(x)$ integrál od a do b, při čemž

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

43. Mají-li funkce $f(x)$ a $g(x)$ integrály od a do b, má také funkce $k\,f(x) + h\,g(x)$, kde k a h jsou daná čísla, integrál od a do b, při čemž

$$\int_a^b [k\,f(x) + h\,g(x)]\,\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + h\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

44. Má-li funkce $f(x)$ integrál od a do b ($a < b$) a je-li $\varepsilon > 0$ libovolné číslo, existuje takové rozdělení D intervalu $\langle a, b\rangle$, že $S(D) - s(D) < \varepsilon$. Dokažte.

45. Má-li funkce f integrál od a do b ($a < b$) a je-li $f(x) \geqq 0$ pro všecka x z $\langle a, b\rangle$, pak $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqq 0$. Dokažte.

46. Je-li $a > b$ a existují-li integrály $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$, při čemž pro každé x z intervalu $\langle b, a\rangle$ je $f(x) \leqq g(x)$, potom $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$. Dokažte.

47. Je-li funkce f spojitá v intervalu $\langle a, b\rangle$, existuje vnitřní bod c tohoto intervalu tak, že $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = (b - a)\,.\,f(c)$. Dokažte.

48. Je-li $a < b$, označme znakem J interval $\langle a, b\rangle$; je-li $a > b$, označme znakem J interval $\langle b, a\rangle$. Platí věta: Existuje-li integrál $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ a je-li c libovolný bod z J, potom

a) funkce $F(x) = \int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t$ proměnné x je spojitá v intervalu J;

b) je-li funkce f spojitá ve vnitřním bodě x z J, je $F'(x) = f(x)$. Dokažte.

49. Písmeno J znamená totéž jako v předcházejícím cvičení. Platí věta: Existuje-li integrál $\int_a^b f(t)\,dt$ a je-li c libovolný bod z J, potom

a) funkce $F(x) = \int_x^c f(t)\,dt$ proměnné x je spojitá v intervalu J;

b) je-li funkce f spojitá ve vnitřním bodě x z J, je $F'(x) = -f(x)$. Dokažte.

50. Písmeno J znamená totéž jako ve cvič. 48. Existuje-li integrál $\int_a^b f(t)\,dt$ a je-li $F(x) = \int_c^x f(t)\,dt$, kde c a x jsou libovolné body z J, platí $\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$. Dokažte.

VI. NEURČITÝ INTEGRÁL

Nechť je dána funkce f definovaná v jakémsi otevřeném intervalu J_x; hledáme funkci F, která má tu vlastnost, že pro všecka x z J_x je

$$F'(x) = f(x). \tag{a}$$

Funkce F se jmenuje *primitivní funkce* k funkci f v intervalu J_x. Často jí říkáme také *neurčitý integrál* funkce f v intervalu J_x. Pro primitivní funkci budeme užívat označení

$$F(x) = \int f(x)\,dx, \tag{b}$$

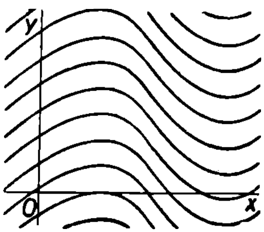
při čemž rovnost (b) značí přesně totéž jako rovnost (a). Symbol $\int f(x)\,dx$ čteme zpravidla slovy „integrál $f(x)\,dx$“. Funkce f se nazývá *funkce integrovaná* a proměnná x se jmenuje *integrační proměnná*. Nevadí, že volíme tytéž názvy jako u určitého integrálu, neboť mezi oběma integrály je, jak ihned uvidíme, úzká souvislost.

Úloha nalézt primitivní funkci F k dané funkci f je tedy obrácená úloha k úloze nalézt derivaci f dané funkce F.

Především je zřejmé, že primitivní funkce je vždy spojitá v J_x, neboť má-li funkce F derivaci v bodě x, je v tomto bodě spojitá podle věty 23.

Věta **39.** Je-li $F(x)$ primitivní funkce k funkci $f(x)$ v intervalu J_x, je $F(x) + c$, kde c je libovolná konstanta, také primitivní funkce k funkci $f(x)$ v témže intervalu. Žádná jiná primitivní funkce k funkci $f(x)$ v intervalu J_x již neexistuje.

Důkaz. Je-li $F(x)$ primitivní funkce k funkci $f(x)$ v intervalu J_x, znamená to, že pro všecka x z J_x platí $F'(x) = f(x)$. Avšak podle vzorce (23) je $[F(x) + c]' = F'(x)$, takže také $F(x) + c$ je primitivní funkce k funkci $f(x)$.



Obr. 54

Je třeba ještě dokázat, že tvarem $F(x) + c$ jsou vyčerpány všecky primitivní funkce. Nechť tedy $F(x)$ a $G(x)$ jsou dvě primitivní funkce k funkci $f(x)$ v intervalu J_x, t. j. nechť $F'(x) = f(x)$ a $G'(x) = f(x)$ pro všecka x z J_x. Pak podle vzorce (22) je

$$[G(x) - F(x)]' = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

pro všecka x z J_x. Derivace funkce $G(x) - F(x)$ je tedy rovna nule pro všecka x z J_x, a proto podle důsledku věty 31 o přírůstku funkce je $G(x) - F(x) = c$, čili $G(x) = F(x) + c$ pro všecka x z J_x.

Existuje-li tedy k dané funkci $f(x)$ jedna primitivní funkce $F(x)$, existuje jich nekonečně mnoho a všecky mají tvar $F(x) + c$, t. j. všecky se liší od funkce $F(x)$ pouze o aditivní konstantu (viz obr. 54). Proto se také může stát, že výsledky výpočtů neurčitých integrálů, k nimž dojdeme různými cestami, se liší o aditivní konstantu. Tuto konstantu zpravidla označujeme názvem *integrační konstanta*.

Ke každé funkci však neexistuje primitivní funkce. Ukážeme to na příkladě.

Příklad 37. Hledejme primitivní funkci k funkci

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x \leqq 0, \\ -1 & \text{pro } x > 0, \end{cases}$$

která je definována pro každé x. Tato funkce musí mít v intervalu $(-\infty, 0)$ za primitivní funkci funkci $F(x) = x + c$, neboť $(x + c)' = 1$. Podobně v intervalu $(0, \infty)$ musí mít za primitivní funkci funkci $F(x) = -x + c_1$, neboť $(-x + c_1)' = -1$. Poněvadž $F(x)$ je spojitá pro každé x, musí

$$\lim_{x\to 0-} F(x) = \lim_{x\to 0+} F(x) = F(0).$$

Avšak $\lim\limits_{x\to 0-} F(x) = c$, $\lim\limits_{x\to 0+} F(x) = c_1$, proto musí $c_1 = c$. Hledaná primitivní funkce musí tedy splňovat vztahy

$$F(x) = \begin{cases} x + c & \text{pro } x \leqq 0, \\ -x + c & \text{pro } x > 0 \end{cases}$$

a v bodě 0 musí mít derivaci rovnu jedné, neboť $f(0) = 1$. To však není možné; naše funkce F nemá v bodě 0 derivaci, neboť

$$\lim_{h\to 0-} \frac{F(h) - F(0)}{h} = \lim_{h\to 0-} \frac{h + c - c}{h} = 1,$$

$$\lim_{h\to 0+} \frac{F(h) - F(0)}{h} = \lim_{h\to 0+} \frac{-h + c - c}{h} = -1.$$

Z vět odvozených v kapitole V však plyne, že **ke každé funkci $f(x)$, která je v (otevřeném) intervalu J_x spojitá, existuje v tomto intervalu aspoň jedna primitivní funkce $F(x)$.** Zvolme si dva vnitřní body c, x z (otevřeného) intervalu J_x. Je-li $c < x$, existuje podle věty 33 integrál $F(x) = \int\limits_c^x f(t)\,dt$, jehož derivace v bodě x splňuje podle věty 38 rovnici $F'(x) = f(x)$. Při tom je $\lim\limits_{x \to c+} F(x) = 0$ (důkaz věty 37) a $\lim\limits_{x \to c+} F'(x) = f(c)$. Je-li $x < c$, existuje integrál $\int\limits_x^c f(x)\,dt$ a také integrál $F(x) = \int\limits_c^x f(t)\,dt = -\int\limits_x^c f(t)\,dt$. Je-li a libovolné číslo z J_x, pro něž platí $a < x$, je $F(x) = \int\limits_c^a f(t)\,dt +$

$+ \int\limits_a^x f(t)\,dt$. Potom $F'(x) = f(x)$, $\lim\limits_{x \to c-} F(x) = \int\limits_c^a f(t)\,dt +$

$+ \int\limits_a^c f(t)\,dt = 0$, $\lim\limits_{x \to c-} F'(x) = f(c)$. Položíme-li ještě $F(c) = 0$, je funkce $F(x)$ spojitá v J_x a pro každé x z J_x má derivaci $F'(x) = f(x)$. Je tedy $F(x)$ primitivní funkce k funkci $f(x)$ v intervalu J_x. Interval J_x nemusí být omezený; jeho omezenost jsme k důkazu nepotřebovali.

Věta **40.** Existuje-li integrál $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ a je-li $F(x)$ primitivní funkce k funkci $f(x)$ v (otevřeném) intervalu J_x, který obsahuje body a, b, pak

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a). \tag{33}$$

Důkaz. Budiž předně $a < b$. Je-li D nějaké rozdělení intervalu $\langle a, b \rangle$, je funkce F v jeho k-tém dílčím intervalu $\langle x_{k-1}, x_k \rangle$ spojitá a má ve všech jeho vnitřních bodech derivaci $f(x)$. Jsou tedy pro funkci F v tomto intervalu splněny podmínky věty 31 o přírůstku funkce, takže existuje takový vnitřní bod ξ_k intervalu $\langle x_{k-1}, x_k \rangle$, že

$$F(x_k) - F(x_{k-1}) = (x_k - x_{k-1}) \,.\, F'(\xi_k) = f(\xi_k) \,.\, \Delta x_k, \tag{c}$$

neboť $x_k - x_{k-1} = \Delta x_k$ a $F'(\xi_k) = f(\xi_k)$. Napíšeme-li rovnici (c) pro všecky dílčí intervaly, t. j. pro $k = 1, 2, 3, \ldots, n$, a sečteme, pak dostaneme (vzhledem k tomu, že $x_0 = a$, $x_n = b$)

$$F(b) - F(a) = f(\xi_1) \,.\, \Delta x_1 + f(\xi_2) \,.\, \Delta x_2 + f(\xi_3) \,.\, \Delta x_3 + \\ + \ldots + f(\xi_n) \,.\, \Delta x_n.$$

Označíme-li jako na počátku kapitoly V supremum hodnot $f(x)$ z k-tého dílčího intervalu znakem M_k a infimum týchž hodnot znakem m_k, je

$$M_k \geqq f(\xi_k) \geqq m_k.$$

Poněvadž čísla Δx_k jsou kladná, neboť $x_{k-1} < x_k$, proto

$$S(D) \geqq f(\xi_1) \,.\, \Delta x_1 + f(\xi_2) \,.\, \Delta x_2 + f(\xi_3) \,.\, \Delta x_3 + \ldots + \\ + f(\xi_n) \,.\, \Delta x_n \geqq s(D).$$

Číslo $F(b) - F(a)$ tedy není větší než žádný horní součet a nemůže být ani větší než infimum horních součtů čili

$$\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x \geqq F(b) - F(a).$$

Číslo $F(b) - F(a)$ není však také menší než žádný dolní součet a nemůže být proto menší než supremum dolních součtů, t. j.

$$\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x \leqq F(b) - F(a).$$

Spojením obojího dostáváme $\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x = F(b) - F(a)$.

Je-li $a > b$, je podle vzorce (32) a podle toho, co již bylo dokázáno,

$$\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x = - \int_b^a f(x) \, \mathrm{d}x = - [F(a) - F(b)] = F(b) - \\ - F(a).$$

Je-li konečně $a = b$, je $\int_a^a f(x)\,dx = 0$ podle (31) a $F(a) - F(a) = 0$, takže vzorec (33) je také splněn.

Poznamenejme ještě, že výsledek nezávisí na tom, kterou primitivní funkci vezmeme ve vzorci (33), neboť $F(b) - F(a) = [F(b) + c] - [F(a) - c]$.

Věta 40 popisuje souvislost mezi určitým integrálem a neurčitým integrálem (primitivní funkcí) ovšem za předpokladu, že obojí existuje. Tato věta nám umožní vypočítat hodnotu mnohých určitých integrálů.

Příklad 38. Spočtěme podle toho $\int_a^b x\,dx$, který jsme již jednou stanovili dosti pracným způsobem v příkladě 35. Poněvadž funkce $F(x) = \frac{1}{2}x^2$ má derivaci $F'(x) = x$ pro každé x, je $\frac{1}{2}x^2$ primitivní funkcí k funkci $f(x) = x$. Pak podle věty 40 je

$$\int_a^b x\,dx = \tfrac{1}{2}b^2 - \tfrac{1}{2}a^2$$

v souhlasu s výsledkem příkladu 35.

Nyní se soustředíme na methody, podle nichž se hledají primitivní funkce. Poněvadž hledání primitivní funkce je úloha obrácená k úloze najít derivaci dané funkce, můžeme rovnice (21) až (29) z kapitoly IV přepsat pomocí primitivních funkcí.

Nechť $f(x)$ a $g(x)$ jsou dvě funkce, k nimž existují primitivní funkce $F(x)$ a $G(x)$, t. j. nechť platí $F'(x) = f(x)$, $G'(x) = g(x)$. Pak podle (21)

$$[k_1 F(x) + k_2 G(x)]' = k_1 F'(x) + k_2 G'(x) = k_1 f(x) + k_2 g(x).$$

To však znamená, že funkce $k_1 F(x) + k_2 G(x)$ je primitivní funkce k funkci $k_1 f(x) + k_2 g(x)$, t. j.

$$\int[k_1 f(x) + k_2 g(x)]\,dx = k_1 F(x) + k_2 G(x)$$

čili

$$\int[k_1 f(x) + k_2 g(x)]\,dx = k_1\int f(x)\,dx + k_2\int g(x)\,dx. \tag{34}$$

Ve zvláštním případě pro $k_1 = 1$, $k_2 = 1$ nebo $k_2 = -1$ dostáváme

$$\begin{aligned} \int[f(x) + g(x)]\,dx &= \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx, \\ \int[f(x) - g(x)]\,dx &= \int f(x)\,dx - \int g(x)\,dx. \end{aligned} \tag{35}$$

Dále podle rovnice (24) je

$$[F(x)\,.\,G(x)]' = F'(x)\,.\,G(x) + F(x)\,.\,G'(x),$$

t. j. funkce $F(x)\,.\,G(x)$ je primitivní funkcí k funkci $F'(x)\,G(x) + F(x)\,.\,G'(x)$. Je tedy

$$\begin{aligned} F(x)\,.\,G(x) &= \int[F'(x)\,.\,G(x) + F(x)\,.\,G'(x)]\,dx = \\ &= \int F'(x)\,.\,G(x)\,dx + \int F(x)\,.\,G'(x)\,dx, \end{aligned}$$

pokud ovšem integrály $\int F'(x)\,.\,G(x)\,dx$, $\int F(x)\,.\,G'(x)\,dx$ existují. Označíme-li krátce $F(x) = u$, $G(x) = v$, psává se tato formule nejčastěji ve tvaru

$$\int uv'\,dx = uv - \int u'v\,dx. \tag{36}$$

Z rovnice (25) plyne $[k\,F(x)]' = k\,F'(x)$, t. j. funkce $k\,F(x)$ je primitivní funkce k funkci $k\,F'(x) = k\,f(x)$ čili

$$\int k\,f(x)\,dx = k\int f(x)\,dx. \tag{37}$$

Lze tedy podobně jako při derivování „vytknout“ multiplikativní konstantu před znak integrálu.

Z rovnice (27) plyne, že $(x^{n+1})' = (n+1)\,x^n$, kde n je celé. Je tedy funkce x^{n+1} primitivní funkcí k funkci $(n+1)\,x^n$, t. j.

$$x^{n+1} = \int(n+1)\,x^n\,dx = (n+1)\int x^n\,dx,$$

takže

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}, \text{ pokud } n \neq -1.$$

Tato rovnost platí jen v takových intervalech, v nichž je x^n definováno, neboť jen v takových intervalech je funkce x^n spojitá. Je-li n celé, je to při $n \geqq 0$ pro každé x a při $n < 0$ pro $x \neq 0$ (viz str. 24). Máme tedy výsledek:

$$\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \tag{38}$$

pro $n \geqq 0$ celé v intervalu $(-\infty, \infty)$ a
pro $n < -1$ celé v intervalech $(-\infty, 0)$, $(0, \infty)$.

Speciálně pro $n = 0$ je $\int dx = x$.

Prvá z rovnic (28) říká, že $(\sin x)' = \cos x$, t. j. $\sin x$ je primitivní funkce k funkci $\cos x$ čili $\int \cos x \, dx = \sin x$. Podobně druhá rovnice (28) praví, že $(\cos x)' = -\sin x$, t. j. $\cos x$ je primitivní funkcí k funkci $-\sin x$ čili $\cos x = \int (-\sin x) \, dx = -\int \sin x \, dx$. Dostáváme tedy

$$\int \sin x \, dx = -\cos x, \quad \int \cos x \, dx = \sin x \quad \text{v intervalu } (-\infty, \infty). \tag{39}$$

Konečně prvou rovnici (29), která zní $(\mathrm{tg}\, x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$, je možno přepsat ve tvaru $\int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx = \mathrm{tg}\, x$, což je správné v každém intervalu, v němž je funkce $\frac{1}{\cos^2 x}$ spojitá, t. j. ve všech intervalech $(\frac{1}{2}(2k-1)\pi, \frac{1}{2}(2k+1)\pi)$, kde k je libovolné číslo celé. Místo $\int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx$ píšeme však častěji $\int \frac{dx}{\cos^2 x}$.

Podobně druhou rovnici (29) přepíšeme ve tvaru $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{cotg}\, x$. To platí v těch intervalech, v nichž je funkce $\frac{1}{\sin^2 x}$ spojitá, t. j. v intervalech $(k\pi, (k+1)\pi)$, kde k je opět libovolné číslo celé. Dostáváme tedy

$$\left.\begin{aligned}&\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x} = -\operatorname{cotg} x\\ &\text{v intervalech } (k\pi, (k+1)\pi),\\ &\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x\\ &\text{v intervalech } (\tfrac{1}{2}(2k-1)\pi, \tfrac{1}{2}(2k+1)\pi),\end{aligned}\right\} k \text{ celé.} \qquad (40)$$

Poznamenejme ještě, že na pravých stranách rovnic (34) až (40) můžeme připsat libovolnou integrační konstantu, která v nich není uvedena. Odvozených vzorců se používá při výpočtu neurčitých integrálů. Ukážeme to na příkladech.

Příklad 39. $\int(2x^2 - 3x + 5)\,\mathrm{d}x = 2\int x^2\,\mathrm{d}x - 3\int x\,\mathrm{d}x + 5\int \mathrm{d}x = \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 5x + c$ v intervalu $(-\infty, \infty)$. Bylo užito vzorců (34) a (38); c je integrační konstanta.

Příklad 40. $\displaystyle\int \operatorname{tg}^2 x\,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x =$

$$= \int\left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right)\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} - \int \mathrm{d}x = \operatorname{tg} x - x + c$$

v intervalech $(\frac{1}{2}(2k-1)\pi, \frac{1}{2}(2k+1)\pi)$, kde k je číslo celé. Výpočet byl proveden podle vzorců (35) a (40).

Zejména často užíváme vzorce (36). Postup jím vyjádřený se nejčastěji nazývá *integrace po částech* (per partes) a spočívá v tom, že integrovanou funkci $f(x)$ rozložíme v součin dvou funkcí uv', z nichž druhou volíme tak, abychom ji dovedli integrovat a aby byl integrál $\int u'v\,\mathrm{d}x$ na pravé straně vzorce (36) jednodušší než integrál na levé straně. Uvedeme na to příklady.

Příklad 41. Abychom vypočetli integrál $\int x \sin x\,\mathrm{d}x$, položíme $u = x$, $v' = \sin x$; pak je $u' = 1$, $v = -\cos x$ podle (39), takže

$$\int x \sin x\,\mathrm{d}x = -x\cos x - \int 1\,.\,(-\cos x)\,\mathrm{d}x = -x\cos x + \int \cos x\,\mathrm{d}x = -x\cos x + \sin x + c \text{ v intervalu } (-\infty, \infty).$$

Příklad 42. Podobně užijeme integrace po částech k výpočtu integrálu $\int \sin^2 x \, dx$. Položíme $u = \sin x$, $v' = \sin x$; pak je $u' = \cos x$, $v = -\cos x$, takže

$$\int \sin^2 x \, dx = -\sin x \cos x + \int \cos^2 x \, dx = -\sin x \cos x + \\ + \int (1 - \sin^2 x) \, dx = -\sin x \cos x + \int dx - \int \sin^2 x \, dx = \\ = -\sin x \cos x + x - \int \sin^2 x \, dx.$$

Zdánlivě jsme nepokročili, neboť jsme dospěli k témuž integrálu, od něhož jsme vyšli. Avšak nalezený vztah

$$\int \sin^2 x \, dx = -\sin x \cos x + x - \int \sin^2 x \, dx$$

je rovnice, v níž je neznámou integrál $\int \sin^2 x \, dx$. Z ní určíme

$$\int \sin^2 x \, dx = \tfrac{1}{2}(x - \sin x \cos x) + c$$

v intervalu $(-\infty, \infty)$. Tu jsme ještě připsali integrační konstantu c.

Chceme-li se přesvědčit o tom, byl-li výpočet proveden správně, derivujeme nalezený výsledek. Bylo-li počítáno správně, musí být tato derivace podle definice primitivní funkce rovna dané funkci, kterou jsme integrovali. Tak třeba v příkladě 42 máme

$$[\tfrac{1}{2}(x - \sin x \cos x) + c]' = \tfrac{1}{2}(1 - \cos^2 x + \sin^2 x) = \sin^2 x$$

a to je skutečně funkce integrovaná.

Počítáme-li určitý integrál, můžeme nejdříve určit příslušnou primitivní funkci $F(x) = \int f(x) \, dx$ a pak užít věty 40, podle níž je

$$\int_a^b f(x) \, dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

Značka $[F(x)]_a^b$ nebo určitěji $[F(x)]_{x=a}^{x=b}$ značí, že máme určit hodnotu funkce $F(x)$ nejprve pro $x = b$ a potom pro $x = a$ a druhý výraz odečíst od prvého. Počítáme-li methodou po částech, můžeme výpočet urychlit tím, že obě meze dosadíme ihned, jakmile dostaneme nějakou funkci, obsahující integrační proměnnou. Bude tedy

$$\int_a^b uv' \,\mathrm{d}x = [uv]_{x=a}^{x=b} - \int_a^b u'v \,\mathrm{d}x.$$

Příklad 43. Abychom určili $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos^3 x \,\mathrm{d}x$, položíme $u = \cos^2 x$, $v' = \cos x$. Pak je $u' = -2 \sin x \cos x$ (viz cvič. 36; lze také počítat podle vzorce (24), neboť $u = \cos x \cos x$), $v = \sin x$. Je tedy

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos^3 x \,\mathrm{d}x = [\cos^2 x \sin x]_0^{\frac{1}{2}\pi} + 2\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^2 x \cos x \,\mathrm{d}x.$$

Avšak $[\cos^2 x \sin x]_0^{\frac{1}{2}\pi} = \cos^2 \frac{1}{2}\pi \sin \frac{1}{2}\pi - \cos^2 0 \sin 0 = 0$, $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, takže

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos^3 x \,\mathrm{d}x = 2\int_0^{\frac{1}{2}\pi} (1 - \cos^2 x) \cos x \,\mathrm{d}x = 2\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos x \,\mathrm{d}x - 2\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos^3 x \,\mathrm{d}x,$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos^3 x \,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos x \,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}[\sin x]_0^{\frac{1}{2}\pi} = \frac{2}{3}.$$

Podle věty 40 však nelze počítat zcela mechanicky. Vzorec (33) platí za předpokladu, že existuje integrál na jeho levé straně, a o tom se vždy předem musíme přesvědčit. Je známa řada vět, podle nichž lze rozhodnout o tom, zda nějaký integrál existuje. My jsme dokázali pouze jednu, podle níž integrál $\int_a^b f(x) \,\mathrm{d}x$ existuje tehdy, je-li f funkce spojitá v intervalu $\langle a, b \rangle$ (věta 33). V tomto případě existuje také primitivní funkce na pravé straně vzorce (33), jak bylo dokázáno na str. 109.

Chybný by tedy byl tento výpočet:

$$\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \left[-\frac{1}{x}\right]_{-1}^{1} = -1 + (-1) = -2,$$

neboť funkce $f(x) = 1 : x^2$ není v intervalu $\langle -1, 1\rangle$ spojitá (není totiž definována pro $x = 0$).

Cvičení.

51. Vypočtěte integrály:

$$\text{a)} \int x^4 \, dx, \text{ b)} \int \frac{dx}{x^3}, \text{ c)} \int (3x - 2) \, dx,$$

$$\text{d)} \int (\tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{2}{3}x + 1) \, dx, \text{ e)} \int x^2(1 - x^2) \, dx,$$

$$\text{f)} \int (x^2 - 1)^2 \, dx, \text{ g)} \int \frac{x^2 - 2}{x^2} \, dx, \text{ h)} \int \frac{x^3 + x - 5}{x^3} \, dx.$$

52. Vypočtěte integrály:

$$\text{a)} \int (a \sin x + b \cos x) \, dx, \text{ b)} \int \frac{dx}{1 + \cos 2x}, \text{ c)} \int \operatorname{cotg}^2 x \, dx,$$

$$\text{d)} \int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x} \, dx, \text{ e)} \int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}.$$

53. Integrací po částech určete: a) $\int x \cos x \, dx$, b) $\int x^2 \sin x \, dx$, c) $\int x^3 \sin x \, dx$, d) $\int \cos^2 x \, dx$, e) $\int \sin x \cos x \, dx$, f) $\int \sin^3 x \, dx$.

54. Užitím integrace po částech dokažte, že pro $n \geqq 1$ celé v intervalu $(-\infty, \infty)$ platí

$$\int x^n \sin x \, dx = -x^n \cos x + n \int x^{n-1} \cos x \, dx,$$
$$\int x^n \cos x \, dx = x^n \sin x - n \int x^{n-1} \sin x \, dx.$$

Odtud odvoďte, že pro $n \geqq 2$ celé v témže intervalu je

$$\int x^n \sin x \, dx = -x^n \cos x + nx^{n-1} \sin x - n(n-1) \int x^{n-2} \sin x \, dx,$$

$$\int x^n \cos x \, dx = x^n \sin x + nx^{n-1} \cos x - n(n-1) \int x^{n-2} \cos x \, dx.$$

55. Methodou integrace po částech dokažte, že pro $n \geqq 2$ celé platí

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^n x \, dx = \frac{n-1}{n} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^{n-2} x \, dx,$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos^n x \, dx = \frac{n-1}{n} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos^{n-2} x \, dx.$$

56. Udejte takovou primitivní funkci k funkci $f(x) = (3x - 2)^2$, která a) pro $x = 0$ nabývá hodnoty 7, b) pro $x = 3$ nabývá hodnoty 7.

57. Jsou-li $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ funkce, k nimž existují v intervalu J_x primitivní funkce, a $k_1, k_2, \ldots, k_n$ konstanty, dokažte, že v intervalu J_x platí: $\int [k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x) + \ldots + k_n f_n(x)] \, dx = k_1 \int f_1(x) \, dx + k_2 \int f_2(x) \, dx + \ldots + k_n \int f_n(x) \, dx$.

58. Užitím výsledku cvič. 36 dokažte, že pro funkci f, která má v (otevřeném) intervalu J_x všude derivaci, platí

$$\int f^n(x) \, . \, f'(x) \, dx = \frac{f^{n+1}(x)}{n+1}$$

pro každé celé $n > 0$ v intervalu J_x a pro každé celé $n < -1$ v těch částech intervalu J_x, v nichž $f(x) \neq 0$.

59. Okamžitá rychlost pohybujícího se tělesa je úměrná času. Stanovte, jak závisí dráha na čase.

60. Rovinná křivka má tu vlastnost, že směrnice její tečny je přímo úměrná souřadnici x dotykového bodu. Určete rovnici této křivky tak, aby křivka procházela a) počátkem a bodem A o souřadnicích 1, 1, b) bodem A o souřadnicích 1, 1 a bodem B o souřadnicích 2, 3.

Mějme dvě funkce f a g. Každému x z jistého oboru nechť odpovídá hodnota $t = g(x)$. Tomuto číslu přiřadíme hodnotu $y = f(t)$, pokud ovšem je $f(t)$ pro toto t definováno. Tím je ke každému x přiřazena určitá hodnota y, takže y je funkcí proměnné x. Píšeme to obyčejně rovnicí

$$y = f[g(x)].$$

Funkce tohoto tvaru nazýváme *funkce složené*. Funkci f jmenujeme někdy **vnější** a funkci g **vnitřní** funkcí složené funkce $f[g(x)]$.

Je-li na příklad vnější funkce $y = \sin t$ a vnitřní funkce $t = x^2 + 1$, pak složená funkce je $y = \sin(x^2 + 1)$ pro každé x. Je-li však vnější funkce $y = t^2 + 1$ a vnitřní funkce $t = \sin x$, je složená funkce $y = \sin^2 x + 1$ opět pro každé x.

Je vidět, že se název složená funkce týká pouze formy, jíž je funkce vyjádřena, a nikoli její podstaty; zavádíme jej pouze proto, že vyjádření pomocí složené funkce je často dosti pohodlné. Na složenou funkci $y = f[g(x)]$ můžeme nahlížet také tak, jako bychom do funkce $y = f(t)$ proměnné t zavedli za t novou proměnnou x rovnicí $t = g(x)$.

Věta **41**. **Je-li funkce f spojitá v bodě b a funkce g spojitá v bodě a, při čemž $g(a) = b$, je funkce $f[g(x)]$ spojitá v bodě a.**

Důkaz. Poněvadž funkce f je spojitá v bodě b, můžeme zvolit libovolné okolí J_y bodu $f(b)$ a k němu dovedeme nalézt takové okolí J_t bodu b, že pro všechna t z J_t hodnota $f(t)$ padne do J_y (viz definici spojitosti na str. 51). Poněvadž je funkce g spojitá v bodě a, dovedeme nalézt k právě nalezenému okolí J_t bodu $b = g(a)$ takové okolí J_x bodu a, že pro všechna x z J_x hodnota $g(x)$ padne do J_t. Tím jsme však k libovolně zvolenému okolí J_y bodu $f(b) = f[g(a)]$ sestrojili takové okolí J_x bodu a, že pro všecka x z J_x hodnota $t = g(x)$

padne do J_t, a tedy hodnota $f(t) = f[g(x)]$ padne do J_y. To však značí, že funkce $f[g(x)]$ je spojitá v bodě a, a to jsme měli dokázat.

Tato věta nám umožní rozhodnout o mnohých funkcích, že jsou spojité. Na příklad funkce $\sin(ax + b)$ je spojitá v každém bodě, neboť funkce $t = ax + b$ je spojitá pro každé x a funkce $\sin t$ je spojitá pro každé t.

Větu 41 můžeme vzhledem k definici spojitosti vyslovit takto:

Je-li $\lim\limits_{x\to a} g(x) = g(a)$ a $\lim\limits_{t\to b} f(t) = f(b)$, při čemž $b = g(a)$, je $\lim\limits_{x\to a} f[g(x)] = f[g(a)]$.

Nyní si všimneme derivace složených funkcí. Nejprve odvodíme důležitou větu, které budeme často používat.

Věta **42**. Má-li funkce g derivaci v bodě x a funkce f derivaci v bodě $t = g(x)$, má funkce $f[g(x)]$ v bodě x derivaci $f'(t) \,.\, g'(x)$.

Důkaz. Předpokládáme, že existují (vlastní) limity

$$\lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = g'(x), \quad \lim_{k\to 0} \frac{f(t+k) - f(t)}{k} = f'(t),$$

a máme dokázat, že

$$\lim_{h\to 0} \frac{f[g(x+h)] - f[g(x)]}{h} = f'(t) \,.\, g'(x),$$

při čemž $t = g(x)$.

Nejprve utvoříme funkci

$$\varphi(k) = \frac{f(t+k) - f(t)}{k} - f'(t)$$

proměnné k. Pro $k = 0$ není $\varphi(k)$ definováno; položme tedy

$$\varphi(0) = 0.$$

Poněvadž $\lim\limits_{k\to 0} \frac{f(t+k)-f(t)}{k} = f'(t)$, je funkce $\varphi(k)$ podle věty 5 nekonečně malá v okolí bodu 0, t. j. $\lim\limits_{k\to 0}\varphi(k) = 0$. Je tedy funkce $\varphi(k)$ spojitá v bodě 0. Pro $k \neq 0$ je $\frac{f(t+k)-f(t)}{k} = f'(t) + \varphi(k)$ čili

$$f(t+k) - f(t) = [f'(t) + \varphi(k)] \,.\, k. \tag{a}$$

Rovnice (a) je však správná i pro $k = 0$, jak se snadno přesvědčíme.

Položme nyní $t = g(x)$, $t + k = g(x+h)$, takže

$$k = g(x+h) - g(x). \tag{b}$$

Přírůstek k je tedy jakousi funkcí přírůstku h. Funkce g je spojitá v bodě x, neboť má v tomto bodě derivaci (věta 23); je tedy také funkce $g(x+h)$ spojitá pro $h = 0$ a k je pak spojitá funkce přírůstku h v bodě $h = 0$. Při tom $\lim\limits_{h\to 0} k = 0$. Pak podle věty 41 je také $\varphi(k)$ spojitá funkce přírůstku h v bodě $h = 0$, při čemž $\lim\limits_{h\to 0}\varphi(k) = 0$.

Dosadíme-li podle (b) do (a), dostaneme

$$f(t+k) - f(t) = [f'(t) + \varphi(k)][g(x+h) - g(x)]$$

a odtud

$$\frac{f[g(x+h)] - f[g(x)]}{h} = [f'(t) + \varphi(k)] \,.\, \frac{g(x+h) - g(x)}{h},$$

takže

$$\lim_{h\to 0} \frac{f[g(x+h)] - f[g(x)]}{h} =$$

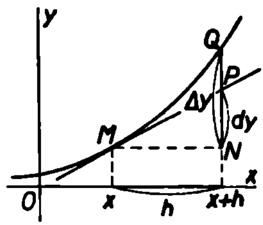
$$= \lim_{h\to 0} [f'(t) + \varphi(k)] \,.\, \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = f'(t) \,.\, g'(x),$$

a to jsme měli dokázat.

Dokázaná věta praví toto: Máme-li stanovit derivaci složené funkce $y = f[g(x)]$ v bodě x, derivujeme nejprve vnější funkci f podle proměnné $t = g(x)$ a tuto derivaci násobíme derivací vnitřní funkce g podle proměnné x.

K snazšímu pochopení dalšího výkladu zavedeme si nyní pojem diferenciálu.

Budiž dána funkce f, která má v bodě x derivaci. Tato funkce je znázorněna jakousi křivkou; derivace funkce f v bodě x vyjadřuje směrnici tečny v bodě M (obr. 55). Zvětší-li se souřadnice x bodu M o h, odpovídá přírůstku h na tečně přírůstek NP druhé souřadnice. Tento přírůstek, který je ovšem funkcí přírůstku h, označujeme znakem $\mathrm{d}y$ nebo $\mathrm{d}f(x)$ a nazýváme jej *diferenciálem* funkce $y = f(x)$ v bodě x. Něco jiného je přírůstek funkce, který je na obr. 55 znázorněn úsečkou NQ a pro nějž užíváme znaku Δy nebo $\Delta f(x)$.



Obr. 55

Vzhledem k definici směrnice tečny (str. 66) možno položit $\frac{\mathrm{d}y}{h} = y'$. Odtud dostáváme $\mathrm{d}y = y' \,.\, h$ čili

$$\mathrm{d}f(x) = f'(x) \,.\, h. \tag{c}$$

Je-li ve zvláštním případě $f(x) = x$, označíme ovšem $\mathrm{d}f(x) = \mathrm{d}x$. Protože však $f'(x) = 1$, vychází ze vzorce (c) $\mathrm{d}x = 1 \,.\, h = h$. Přírůstek h proměnné nazýváme proto zpravidla diferenciálem proměnné a označujeme jej $\mathrm{d}x$. Pak rovnice (c) nabývá tvaru

$$\mathrm{d}f(x) = f'(x) \,.\, \mathrm{d}x. \tag{41}$$

Odtud pak vyplývá

$$f'(x) = \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}.$$

Derivaci $f'(x)$ funkce f v bodě x můžeme tedy považovat za podíl dvou diferenciálů. Proto místo $f'(x)$ nebo y' píšeme často $\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$ nebo $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$. Výhoda tohoto označení tkví v tom, že je z něho jasně vidět, kterého písmene se derivování týká.

Pomocí diferenciálů můžeme větu 42 zapsat jednoduchým vzorcem, který se snadno pamatuje:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}. \tag{42}$$

Uvedeme si příklady, jak se tohoto vzorce používá.

Příklad 44. Hledáme derivaci funkce $y = \sin(ax + b)$. Položíme $ax + b = t$; pak je $y = \sin t$, $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \cos t$, $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = a$, takže podle vzorce (42) máme $[\sin(ax + b)]' = a \cos(ax + b)$ pro každé x.

Příklad 45. $(\sin^5 x)' = 5 \sin^4 x \cos x$ pro každé x. Tu bylo položeno $t = \sin x$, $y = t^5$.

Příklad 46. $\left(\frac{1}{\cos 2x + 1}\right)' = \frac{2 \sin 2x}{(\cos 2x + 1)^2}$, pokud $\cos 2x + 1 \neq 0$, t. j. pokud $x \neq \frac{1}{2}(2k + 1)\pi$, kde k je celé číslo. Danou funkci považujeme za funkci dvojnásobně složenou a položíme $y = t^{-1}$, $t = \cos u + 1$, $u = 2x$. Pak podle dvakrát použitého vzorce (42) je

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u} \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x},$$

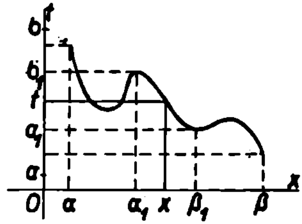
t. j.

$$\left(\frac{1}{\cos 2x + 1}\right)' = [(\cos 2x + 1)^{-1}]' =$$

$$= -(\cos 2x + 1)^{-2}(-\sin 2x) \cdot 2 = \frac{2 \sin 2x}{(\cos 2x + 1)^2}.$$

Z pravidla pro derivování složené funkce odvodíme důležitou methodu pro výpočet některých integrálů.

Nechť k funkci $f(t)$ existuje v intervalu (a, b) primitivní funkce $F(t) = \int f(t)\,\mathrm{d}t$, takže $F'(t) = f(t)$ pro každé t z (a, b). Vezmeme funkci $t = g(x)$, která má derivaci pro každé x z jakéhosi intervalu (α, β) a jejíž hodnota $g(x)$ pro každé x z (α, β) padne do (a, b) (obr. 56). Dosadíme-li do funkce $F(t)$ za t hodnotu $g(x)$, dostaneme složenou funkci $F[g(x)]$. Pak podle vzorce (42) je



Obr. 56

$$\frac{\mathrm{d}F[g(x)]}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}F(t)}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{\mathrm{d}g(x)}{\mathrm{d}x} = f(t) \cdot g'(x) = f[g(x)] \cdot g'(x)$$

pro každé x z (α, β). To však znamená, že $F[g(x)]$ je primitivní funkce k funkci $f[g(x)] \cdot g'(x)$, t. j.

$$\int f[g(x)] \cdot g'(x)\,\mathrm{d}x = F[g(x)]$$

v intervalu (α, β). Avšak na pravé straně není nic jiného než funkce $F(t) = \int f(t)\,\mathrm{d}t$, do níž je dosazeno $t = g(x)$. Nalezenou rovnost píšeme zpravidla ve tvaru

$$\int f[g(x)] \cdot g'(x)\,\mathrm{d}x = \int f(t)\,\mathrm{d}t, \tag{43}$$

při čemž rovnosti jest rozuměti tak, že dostaneme touž funkci, když do primitivní funkce na pravé straně dosadíme $t = g(x)$ (nejvýše až na integrační konstantu).

Rovnice (43) užíváme k výpočtu primitivních funkcí, podaří-li se nám funkci, kterou máme integrovat, rozložit ve dva činitele, z nichž jeden obsahuje proměnnou x jako jakousi funkci jiné funkce $g(x)$ a druhý je derivací funkce g. Pak dosadíme novou proměnnou $g(x) = t$. Z této rovnice podle (41) plyne $g'(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$, takže také za diferenciál funkce g, t. j. za výraz $g'(x)\,\mathrm{d}x$, můžeme formálně dosadit diferenciál $\mathrm{d}t$ nové proměnné t. Postup právě popsaný a vyjádřený rovnicí (43) se nazývá *substituční methoda* pro výpočet integrálů.

Příklad 47. Máme stanovit integrál $\int \sin^2 x \cos x \,\mathrm{d}x$, který je definován v intervalu $(-\infty, \infty)$, neboť $\sin x$ i $\cos x$ jsou spojité pro každé x. Ihned vidíme, že $(\sin x)' = \cos x$; proto dosadíme $\sin x = t$, při čemž hodnota t náleží do intervalu $\langle -1, 1\rangle$. Pak je $\cos x \,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$, takže máme $\int \sin^2 x \cos x \,\mathrm{d}x = \int t^2 \,\mathrm{d}t = \frac{1}{3}t^3 = \frac{1}{3}\sin^3 x + c$, kde c je integrační konstanta. Integrál $\int t^2 \,\mathrm{d}t$ je definován v intervalu $(-\infty, \infty)$, můžeme jej tedy utvořit pro kterékoliv t, jež je vnitřním bodem intervalu $\langle -1, 1\rangle$.

Příklad 48. Chceme určit integrál

$$\int \frac{x^2 \,\mathrm{d}x}{(x^3 + 1)^2},$$

definovaný v intervalech $(-\infty, -1)$, $(-1, \infty)$. Je $(x^3 + 1)' = 3x^2$; je tedy čitatel (až na faktor 3) derivací výrazu $x^3 + 1$, jehož druhá mocnina je ve jmenovateli. Proto dosadíme $x^3 + 1 = t$, $3x^2 \,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$, takže

$$\int \frac{x^2 \,\mathrm{d}x}{(x^3 + 1)^2} = \int \frac{\frac{1}{3}\mathrm{d}t}{t^2} = \frac{1}{3}\int t^{-2} \,\mathrm{d}t = -\frac{1}{3}t^{-1} =$$

$$= \frac{-1}{3(x^3 + 1)} + c.$$

Je-li x v intervalu $(-\infty, -1)$, je t v intervalu $(-\infty, 0)$; je-li x v intervalu $(-1, \infty)$, je t v intervalu $(0, \infty)$. Pro všecka tato t je integrál $\int t^{-2} \,\mathrm{d}t$ definován.

Někdy je možné dosáhnout toho, že rovnice $t = g(x)$, která každému x přiřazuje jediné t, přiřazuje také naopak každému t jediné x, t. j. číslo x můžeme vyjádřit jako funkci proměnné t a psát $x = h(t)$. Pak můžeme rovnici (43) číst i v opačném směru, t. j. integrál $\int f(t)\,dt$ můžeme vyjádřit integrálem $\int f[g(x)]\,.\,g'(x)\,dx$, do něhož je však třeba dosadit $x = h(t)$. Jednoznačného vyjádření dosáhneme často tím, že z původního intervalu (a, b), v němž byla definována funkce $f(t)$, ponecháme jen část (a_1, b_1) a také z intervalu (α, β), v němž byla definována funkce $g(x)$, ponecháme část (α_1, β_1) odpovídající intervalu (a_1, b_1) (viz obr. 56). Pak ovšem primitivní funkce $\int f(t)\,dx$, kterou takto dostaneme, je stanovena pouze v intervalu (a_1, b_1).

Příklad 49. Máme integrovat $\int \sin(at + b)\,dt$, kde $a \neq 0$. Tento integrál je definován v intervalu $(-\infty, \infty)$, neboť $\sin(at + b)$ je spojitá funkce v intervalu $(-\infty, \infty)$. Volíme substituci $at + b = x$, z níž plyne jednoznačně $t = \dfrac{x - b}{a}$ pro každé x. Pak $dt = \dfrac{dx}{a}$, takže

$$\int \sin(at + b)\,dt = \int \sin x \frac{dx}{a} = \frac{1}{a}\int \sin x\,dx = -\frac{1}{a}\cos x =$$

$$= -\frac{1}{a}\cos(at + b) + c \ \text{ v intervalu } (-\infty, \infty).$$

Příklad 50. Abychom stanovili integrál $\int \sin\sqrt{t}\,dt$,*) který je definován v intervalu $(0, \infty)$, dosadíme $t = x^2$. Z této rovnice plyne buď $x = \sqrt{t}$, nebo $x = -\sqrt{t}$; z obou těchto hodnot zvolíme třeba hodnotu $x = \sqrt{t}$, takže x je v intervalu $(0, \infty)$. Dále z rovnice $t = x^2$ plyne $dt = 2x\,dx$. Dostáváme tedy integrál

$$\int \sin\sqrt{t}\,dt = 2\int x \sin x\,dx,$$

který je definován v intervalu $(0, \infty)$. Vzniklý integrál jsme již vypočetli v příkladě 41, takže je celkem

---

*) Znak $\sqrt{t}$ značí nezáporné číslo.

$$\int \sin\sqrt{t}\,\mathrm{d}t = 2\int x\sin x\,\mathrm{d}x = 2(-x\cos x + \sin x) =$$
$$= 2(\sin\sqrt{t} - \sqrt{t}\cos\sqrt{t}) + c$$

v intervalu $(0, \infty)$.

Kdybychom byli volili $x = -\sqrt{t}$, byli bychom dostali $\int \sin\sqrt{t}\,\mathrm{d}t = 2\int x\sin(-x)\,\mathrm{d}x = -2\int x\sin x\,\mathrm{d}x = 2(x\cos x -$ $- \sin x) = 2[-\sqrt{t}\cos(-\sqrt{t}) - \sin(-\sqrt{t})] = 2(\sin\sqrt{t} -$ $- \sqrt{t}\cos\sqrt{t}) + c$ jako dříve.

Ještě se zmíníme o tom, jak se počítají určité integrály substituční methodou. Tu je možný dvojí způsob výpočtu. Jedna cesta spočívá v tom, že určíme příslušnou primitivní funkci tak, jak to bylo právě popsáno, a potom použijeme vzorce (33). Druhá cesta, která bývá zpravidla početně jednodušší, je ta, že počítáme určitý integrál přímo. Máme-li počítat integrál

$$I = \int_c^d f[g(x)]\,.\,g'(x)\,\mathrm{d}x = F[g(d)] - F[g(c)],$$

kde c, d jsou dvě čísla z intervalu $\langle a, b\rangle$, zavedeme substituci $g(x) = t$, $g'(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$. Je-li $g(c) = \gamma$, $g(d) = \delta$, kde γ, δ jsou čísla z intervalu $\langle\alpha, \beta\rangle$, je jasné, že $I = F(\delta) - F(\gamma)$, ale F je primitivní funkce k funkci f, proto $I = \int_\gamma^\delta f(t)\,\mathrm{d}t$. Je tedy celkem

$$\int_c^d f[g(x)]\,.\,g'(x)\,\mathrm{d}x = \int_\gamma^\delta f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Této rovnice možno ovšem používat v obou směrech.

Příklad 51. Jde-li o integrál $\displaystyle\int_0^1 \frac{x\,\mathrm{d}x}{(x^2+1)^2}$, který existuje, neboť funkce integrovaná je spojitá pro každé x, položíme

$x^2 + 1 = t$, $2x\,dx = dt$. Poněvadž $0^2 + 1 = 1$, $1^2 + 1 = 2$, máme

$$\int_0^1 \frac{x\,dx}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{t}\right]_1^2 = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}+1\right) = \frac{1}{4}.$$

Příklad 52. Máme vypočísti $\int_0^1 \sqrt{1-t^2}\,dt$,*) který má smysl, neboť funkce integrovaná je spojitá v intervalu $\langle -1, 1\rangle$. Položíme $t = \cos x$, $dt = -\sin x\,dx$, při čemž je třeba omezit proměnnou x na takový interval, aby bylo možno z rovnice $t = \cos x$ určit číslo x jednoznačně. Poněvadž $\cos\frac{1}{2}\pi = 0$, $\cos 0 = 1$, vezmeme x třeba z intervalu $\langle 0, \frac{1}{2}\pi\rangle$. V tomto intervalu je $\sin x \geqq 0$, $\sqrt{1-\cos^2 x} = \sin x$, takže

$$\int_0^1 \sqrt{1-t^2}\,dt = -\int_{\frac{1}{2}\pi}^{0} \sin^2 x\,dx = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^2 x\,dx =$$
$$= \left[\tfrac{1}{2}(x - \sin x \cos x)\right]_0^{\frac{1}{2}\pi} = \tfrac{1}{4}\pi.$$

K výpočtu posledního integrálu jsme užili výsledku příkladu 42.

Mohli jsme ovšem vzít proměnnou x i z jiného intervalu, třeba z intervalu $\langle -\frac{1}{2}\pi, 0\rangle$, neboť $\cos(-\frac{1}{2}\pi) = 0$, $\cos 0 = 1$. V tomto intervalu je však $\sin x \leqq 0$, takže $\sqrt{1-t^2} = \sqrt{1-\cos^2 x} = -\sin x$. Pak

$$\int_0^1 \sqrt{1-t^2}\,dt = \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{0} \sin^2 x\,dx = \left[\tfrac{1}{2}(x - \sin x\cos x)\right]_{-\frac{1}{2}\pi}^{0} =$$
$$= 0 - (-\tfrac{1}{4}\pi) = \tfrac{1}{4}\pi.$$

Cvičení.

61. Stanovte derivace funkcí: a) $(x^2-1)^5$, b) $\dfrac{1}{(x^2-x-2)^3}$, c) $\cos 3x$, d) $\cos^3 x$, e) $\cos x^3$,**) f) $\sin(a-x)\sin x$, g) $\mathrm{tg}^2 x$, h) $\mathrm{tg}\,2x$.

---

*) $\sqrt{1-t^2}$ a rovněž tak i $\sqrt{1-\cos^2 x}$ značí opět nezáporné číslo.

**) $\cos^3 x$ značí $(\cos x)^3$, $\cos x^3$ značí $\cos(x^3)$.

62. Stanovte derivace funkcí (m, n celá čísla, $a \neq 0$):
a) $(ax + b)^n$, b) $x^m(1 - x)^n$, c) $\dfrac{(1 + x^m)^2}{(1 + x^2)^m}$, d) $\sin^n(ax + b)$.

63. Podle pravidla o derivování funkce složené odvoďte znovu výsledek cvič. 36.

64. Dráha kmitavého pohybu je dána vzorcem $s = a \sin(\omega t + k)$, kde $a > 0$, $\omega > 0$, k jsou konstanty. a) Stanovte okamžitou rychlost pohybu v okamžiku t. b) Kterou polohu má kmitající těleso v těch okamžicích, v nichž je okamžitá rychlost rovna nule?

65. Lze dokázat, že platí

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \ldots + \sin nx = \frac{\sin\frac{1}{2}nx \sin\frac{1}{2}(n+1)\,x}{\sin\frac{1}{2}x},$$

$$\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \ldots + \cos nx = \frac{\sin\frac{1}{2}nx \cos\frac{1}{2}(n+1)\,x}{\sin\frac{1}{2}x}.$$

Derivováním z toho odvoďte

$$\sin x + 2\sin 2x + 3\sin 3x + \ldots + n \sin nx = \frac{(n+1)\sin nx - n\sin(n+1)\,x}{2(1-\cos x)},$$

$$\cos x + 2\cos 2x + 3\cos 3x + \ldots + n\cos nx = \frac{(n+1)\cos nx - n\cos(n+1)\,x - 1}{2(1-\cos x)}.$$

66. Vypočtěte integrály: a) $\displaystyle\int (3 - 2x^3)^4 x^2\,\mathrm{d}x$, b) $\displaystyle\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{(x^2-1)^2}$,

c) $\displaystyle\int \sin^2 x \cos x\,\mathrm{d}x$, d) $\displaystyle\int \sin x \cos^3 x\,\mathrm{d}x$, e) $\displaystyle\int \frac{\sin x\,\mathrm{d}x}{\cos^2 x}$,

f) $\displaystyle\int \sin^3 x\,\mathrm{d}x$, g) $\displaystyle\int \sin^3 x \cos^5 x\,\mathrm{d}x$, h) $\displaystyle\int \frac{\cos^3 x\,\mathrm{d}x}{\sin^4 x}$.

67. Vypočtěte integrály: a) $\int (ax + b)^3 \, dx, \quad a \neq 0$,

b) $\int \frac{dx}{(a - x)^2}$, c) $\int \sin 2x \, dx$, d) $\int \cos(3x - 5) \, dx$,

e) $\int \frac{dx}{\cos^2 3x}$, f) $\int \frac{dx}{\sin^2(4x + 1)}$, g) $\int \frac{dx}{1 + \cos x}$.

68. Vypočtěte integrály: a) $\int_0^1 (x^2 - 1) \, x \, dx$, b) $\int_0^1 \frac{dx}{(3x + 1)^2}$,

c) $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin x \, dx}{(\cos x + 1)^2}$, d) $\int_0^{\pi} \sin 3x \, dx$, e) $\int_{\frac{1}{8}\pi}^{\frac{1}{4}\pi} \frac{dx}{1 - \cos 4x}$.

69. Výsledek cvič. 58 dokažte přímo methodou substituční.

70. Na základě toho, že $\operatorname{tg}^n x = \operatorname{tg}^{n-2} x \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right)$, dokažte, že v intervalech $(\frac{1}{2}(2k - 1)\pi, \frac{1}{2}(2k + 1)\pi)$ (k celé) platí pro $n \neq -1$

$$\int \operatorname{tg}^n x \, dx = \frac{1}{n - 1} \operatorname{tg}^{n-1} x - \int \operatorname{tg}^{n-2} x \, dx.$$

VIII. FUNKCE INVERSNÍ

Již na str. 74 jsme zavedli pojem funkce rostoucí a klesající v intervalu. Tyto funkce nazýváme společným jménem funkce monotonní. Mají některé jednoduché vlastnosti a proto se jimi nyní budeme zabývat soustavněji, ačkoli jsme se s nimi již dříve několikrát při různých příležitostech setkali.

Víme na příklad, že pro n celé kladné z nerovností $0 \leq$

$\leqq x_1 < x_2$ plyne $x_1^n < x_2^n$ (věta 1); je tedy funkce $f(x) = x^n$ pro n celé kladné rostoucí v intervalu $\langle 0, \infty)$. Naproti tomu pro $x_1 < x_2 \leqq 0$ je $x_1^n < x_2^n$ jen při kladném a lichém n; při n kladném a sudém je tomu právě naopak. Proto funkce $f(x) = x^n$, kde n je kladné a liché, je rostoucí v celém intervalu $(-\infty, \infty)$ (pro $n = 3$ viz obr. 18), kdežto funkce $f(x) = x^n$ pro n kladné a sudé je klesající v intervalu $(-\infty, 0\rangle$ a rostoucí v intervalu $\langle 0, \infty)$ (pro $n = 2$ viz obr. 17). Pro n celé záporné z nerovností $0 < x_1 < x_2$ plyne $x_1^n > x_2^n$ (věta 2), takže funkce $f(x) = x^n$ pro n celé záporné je klesající v intervalu $(0, \infty)$. Naproti tomu pro $x_1 < x_2 < 0$ je $x_1^n > x_2^n$ jen při n záporném a lichém, kdežto při záporném a sudém n je tomu právě naopak. Proto funkce $f(x) = x^n$, kde n je záporné a liché, je klesající také v intervalu $(-\infty, 0)$ (pro $n = -1$ viz obr. 19), kdežto funkce $f(x) = x^n$ pro n záporné a sudé je rostoucí v intervalu $(-\infty, 0)$ (pro $n = -2$ viz obr. 20).

Podobně je z obr. 23 vidět, že funkce $\sin x$ je rostoucí v každém intervalu $\langle \frac{1}{2}(4k - 1)\pi, \frac{1}{2}(4k + 1)\pi\rangle$, kde k je celé, a klesající v každém intervalu $\langle \frac{1}{2}(4k + 1)\pi, \frac{1}{2}(4k + 3)\pi\rangle$, kde k je celé. Funkce $\cos x$ je klesající v každém intervalu $\langle 2k\pi, (2k + 1)\pi\rangle$, a rostoucí v každém intervalu $\langle (2k - 1)\pi, 2k\pi\rangle$, kde k je opět celé.

Věta **43**. Je-li funkce f monotonní v intervalu J_x a je-li zároveň v tomto intervalu spojitá, existuje takový interval J_y, že

1. pro každé x z J_x hodnota $y = f(x)$ padne do J_y a
2. ke každému y z J_y existuje jediné x z J_x tak, že $y = f(x)$.

Důkaz. Je-li funkce f monotonní v intervalu J_x a je-li x_1 libovolný bod z J_x, nabývá funkce f hodnoty $f(x_1)$ právě jen v bodě x_1 a v žádném jiném. Kdyby totiž nabývala hodnoty $f(x_1)$ ještě v nějakém jiném bodě $x_2 \neq x_1$ z J_x, bylo by $f(x_1) = f(x_2)$; to ale není možné, neboť vzhledem k definici monotonní funkce pro $x_1 \neq x_2$ musí také $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Dále dokážeme toto tvrzení: Je-li funkce f monotonní a nabývá-li v intervalu J_x největší nebo nejmenší hodnoty v bodě c, je bod c krajním bodem intervalu J_x. Kdyby totiž bod c nebyl krajním bodem intervalu J_x, existovala by v J_x čísla x_1 a x_2 tak, že $x_1 < c < x_2$. Pak by ale podle definice monotonní funkce bylo buď $f(x_1) < f(c) < f(x_2)$, nebo $f(x_1) > > f(c) > f(x_2)$, a hodnota $f(c)$ by nebyla největší ani nejmenší hodnota, jíž funkce f v J_x nabývá.

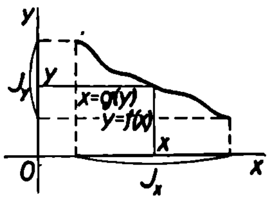
Nyní vezmeme v úvahu množinu F všech hodnot $f(x)$ příslušných ke všem bodům x z J_x. Jsou celkem čtyři možnosti:

a) Množina F je omezená. Pak má určité supremum M a určité infimum m. Je-li x libovolné číslo z J_x, pak $m \leqq \leqq f(x) \leqq M$. Je-li naopak y libovolné číslo takové, že $m < < y < M$, existují vzhledem k vlastnostem suprema a infima (str. 12) takové body a, b z J_x, že $f(a) < y < f(b)$, při čemž $f(a) \geqq m$, $f(b) \leqq M$. Je-li $a < b$, označme J'_x interval $\langle a, b\rangle$; je-li $a > b$, označme J'_x interval $\langle b, a\rangle$. To je uzavřený interval a funkce f je v něm spojitá, neboť je spojitá v celém intervalu J_x, a proto tím spíše v J'_x. Proto podle věty 21 existuje k číslu y takové x v J'_x, a tedy také v J_x, že $f(x) = y$. Toto x je podle toho, co bylo řečeno na počátku důkazu, jediné. Protože to platí pro každé y, které vyhovuje nerovnostem $m < y < M$, je intervalem J_y jeden z intervalů $\langle m, M\rangle$, $\langle m, M)$, $(m, M\rangle$, (m, M) podle toho, je-li funkce f definována v krajních bodech intervalu J_x, či není-li v některém z nich definována.

b) Neexistuje-li supremum množiny F, t. j. je-li možno ke každému číslu y najít takové b z J_x, že $f(b) > y$, a existuje-li naproti tomu infimum m množiny F, pak pro každé x z J_x platí $f(x) \geqq m$. Naopak ke každému číslu $y > m$ lze najít takové a z J_x, že $f(a) < y$. Označme J'_x interval $\langle a, b\rangle$, je-li $a < b$, nebo interval $\langle b, a\rangle$, je-li $a > b$. Poněvadž funkce f je spojitá v J_x, je tím spíše spojitá v J'_x, který je uzavřený; proto k číslu y existuje takové x z J'_x, a tedy také z J_x, že $f(x) = y$. Toto x je jediné. Protože to platí pro každé $y > m$, je intervalem J_y buď interval $\langle m, \infty)$, nebo interval (m, ∞), a to podle toho, je-li funkce f definována v levém krajním bodu intervalu J_x.

c) Neexistuje-li infimum množiny F a existuje-li supremum M této množiny, položme $g(x) = - f(x)$. Pak má množina G hodnot $g(x)$ infimum $- M$, ale nemá supremum; proto je podle odst. b) intervalem J_y pro funkci g buď interval $\langle - M, \infty)$, nebo interval $(- M, \infty)$. Je tedy intervalem J_y pro funkci f buď interval $(-\infty, M\rangle$, nebo interval $(-\infty, M)$.

d) Není-li množina F omezená, pak hodnota $f(x)$ pro každé x z J_x padne do intervalu $(-\infty, \infty)$. Naopak je-li y libovolné číslo, existují čísla a, b z J_x tak, že $f(a) < y < f(b)$. Znak J'_x bude mít týž význam jako v odst. a). Protože funkce f je spojitá v J_x, je tím spíše spojitá v J'_x, který je uzavřený; proto k číslu y existuje takové x z J'_x, a tedy také z J_x, že $f(x) = y$. Toto x je opět jediné. Protože to platí pro každé y, je intervalem J_y interval $(-\infty, \infty)$. Tím je věta dokázána.



Obr. 57

Větu 43 ilustruje obr. 57, který je proveden pro funkci klesající a spojitou v uzavřeném intervalu J_x. Pro každé x z J_x hodnota $f(x)$ padne do J_y a pro každé y z J_y možno najít jediné x z J_x tak, že $f(x) = y$.

Je-li funkce f monotonní a spojitá v intervalu J_x, pak každému x z J_x odpovídá určité a jediné y z J_y. To vyjadřuje vztah

$$y = f(x). \tag{a}$$

Podle věty 43 odpovídá také každému y z J_y určité a jediné x z J_x; můžeme tedy také hodnotu x považovat za funkci některého y z J_y. Označíme-li tuto funkci písmenem g, pak je

$$x = g(y), \tag{b}$$

při čemž se v rovnicích (a) i (b) vyskytují tytéž hodnoty x a y; obě rovnice tedy značí přesně totéž. Z rovnice (a) plyne rovnice (b) a také obráceně z rovnice (b) plyne rovnice (a).

Dosadíme-li za y podle (a) do (b), dostaneme

$$x = g[f(x)],$$

a dosadíme-li za x podle (b) do (a), vyjde

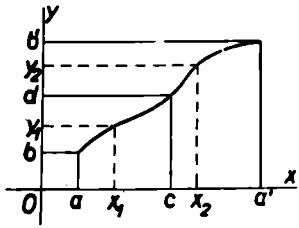
$$y = f[g(y)].$$

Funkce f a g, které mají popsanou vlastnost, nazýváme *navzájem inversními*; funkce g je inversní k funkci f a naopak funkce f je inversní k funkci g.

Věta **44**. Je-li funkce f $\begin{matrix}\text{rostoucí}\\ \text{klesající}\end{matrix}$ a zároveň spojitá v intervalu J_x, je funkce g, která je inversní k funkci f, rovněž $\begin{matrix}\text{rostoucí}\\ \text{klesající}\end{matrix}$ a zároveň spojitá v odpovídajícím intervalu J_y.

Důkaz provedeme nejprve pro případ, že funkce f je rostoucí v J_x.

Jsou-li x_1, x_2 dvě libovolné hodnoty z J_x, které vyhovují nerovnosti $x_1 \geqq x_2$, je $f(x_1) \geqq f(x_2)$. Zvolme dvě hodnoty y_1, y_2 z J_y, pro něž platí $y_1 < y_2$ (obr. 58). K nim podle věty 43 existují dvě hodnoty x_1, x_2 z J_x tak, že $f(x_1) = y_1, f(x_2) = y_2$, při čemž $f(x_1) < f(x_2)$. Pak ale musí také $x_1 < x_2$. Kdyby totiž $x_1 \geqq x_2$, muselo by být $f(x_1) \geqq f(x_2)$, ale to není. Protože $x_1 = g(y_1)$, $x_2 = g(y_2)$, proto z nerovnosti $y_1 < y_2$ plyne $g(y_1) < g(y_2)$. Tím je dokázáno, že funkce g je rostoucí v J_y.



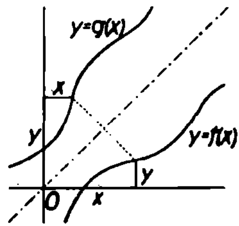
Obr. 58

Ještě je třeba dokázat, že g je spojitá v J_y. Je-li c vnitřním bodem intervalu J_x, nemůže být bod $f(c) = d$ krajním bodem intervalu J_y. Kdyby byl bod d krajním bodem intervalu J_y, musel by být bod c krajním bodem intervalu J_x, jak plyne z druhého odstavce důkazu věty 43. Je tedy bod d vnitřním bodem intervalu J_y. Předpokládáme, že funkce f je spojitá v bodě c, t. j. je-li (y_1, y_2), kde $y_1 < f(c) < y_2$, libovolné okolí bodu $f(c) = d$, pak k němu existuje takové okolí (x_1, x_2) bodu c, že ke každému x z (x_1, x_2) hodnota $f(x)$ padne do (y_1, y_2), při čemž $x_1 = g(y_1)$, $x_2 = g(y_2)$ (viz stále obr. 58). Pak ale také pro každé y z intervalu (y_1, y_2), pro něž platí $y_1 < < y < y_2$, je $g(y_1) < g(y) < g(y_2)$ čili $x_1 < g(y) < x_2$, t. j. hodnota $g(y)$ padne do okolí (x_1, x_2) bodu $c = g(d)$. Je tedy funkce g spojitá v bodě d.

Existuje-li krajní bod a intervalu J_x, je $f(a) = b$ rovněž krajním bodem intervalu J_y, neboť kdyby byl bod b vnitřním bodem intervalu J_y, byl by bod $a = g(b)$ podle předcházejícího rovněž vnitřním bodem intervalu J_x a to není. Je-li bod a levým krajním bodem intervalu J_x, je v něm funkce f spojitá zprava, t. j. je-li $\langle b, y_1)$, kde $y_1 > b$, libovolné pravé okolí bodu $f(a) = b$, pak k němu existuje takové pravé okolí $\langle a, x_1)$ bodu a, že ke každému x z $\langle a, x_1)$ hodnota $f(x)$ padne do $\langle b, y_1)$, při čemž $x_1 = g(y_1)$. Pak ale také pro každé y z intervalu $\langle b, y_1)$, pro něž platí $b \leqq y < y_1$, je $g(b) \leqq g(y) < < g(y_1)$, čili $a \leqq g(y) < x_1$, t. j. hodnota $g(y)$ padne do pravého okolí $\langle a, x_1)$ bodu $a = g(b)$. Je tedy funkce g spojitá zprava v bodě b. Obdobně bychom dokázali toto: Existuje-li pravý krajní bod b' intervalu J_y, je v něm funkce g spojitá zleva.

Kdyby šlo o funkci klesající, nic by se na důkazu nezměnilo až na to, že by se obrátilo znamení některých nerovností.

Dosud jsme důsledně označovali proměnnou u funkce f písmenem x a u funkce g, která je inversní k funkci f, písmenem y. Nebudeme to však již dále dělat, neboť vůbec nezáleží na tom, jak je proměnná označena. Proměnnou budeme označovat, jak je všeobecným zvykem, písmenem x. V našem dřívějším označení rovnice $y = f(x)$ a $x = g(y)$ značí týž vztah, jímž jsou vázány hodnoty x a y. Obě rovnice jsou znázorněny touž křivkou. Vyměníme-li však ve druhé rovnici písmena x a y mezi sebou, dostaneme inversní funkci ve tvaru $y = g(x)$. Jsou-li x a y souřadnice některého bodu na křivce $y = f(x)$, pak bude na křivce $y = g(x)$ ležet bod o souřadnicích y, x, které jsou stejné až na pořádek. Je však známo, že body o souřadnicích x, y a y, x jsou souměrně položeny vzhledem k přímce půlící úhel kladně orientovaných souřadnicových os. Proto je-li funkce $y = f(x)$ znázorněna jakousi křivkou, je inversní funkce $y = g(x)$ znázorněna křivkou souměrně položenou vzhledem k předešlé křivce podle přímky půlící úhel kladně orientovaných souřadnicových os (obr. 59).



Obr. 59

Než postoupíme dále, probereme si podrobněji některé inversní funkce. Nejprve prozkoumáme funkci inversní k funkci

$$y = f(x) = x^n, \quad n \text{ celé kladné.}$$

Protože je třeba, aby funkce f, k níž chceme konstruovat funkci inversní, byla monotonní, omezíme se jen na takový interval, v němž je funkce f rostoucí při každém celém kladném n, t. j. na interval $\langle 0, \infty)$. Funkce f je spojitá ve všech bodech tohoto intervalu (věta 16); proto k ní existuje inversní funkce g, jejímž oborem je interval $\langle 0, \infty)$ a jež je rovněž spojitá v každém bodě tohoto intervalu. Inversní funkci g nazýváme *n-tá odmocnina* a značíme ji

$$y = \sqrt[n]{x}, \quad n \text{ celé kladné}, \quad x \geqq 0; \tag{c}$$

při tom vyjde také $y \geqq 0$. Rovnice (c) značí ovšem totéž jako rovnice

$$x = y^n, \quad n \text{ celé kladné}, \quad y \geqq 0. \tag{d}$$

Dosadíme-li z rovnice (c) za y do (d), dostaneme

$$x = (\sqrt[n]{x})^n, \quad x \geqq 0;$$

dosadíme-li naopak z rovnice (d) za x do (c), dostaneme

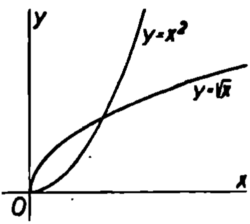
$$y = \sqrt[n]{y^n}, \quad y \geqq 0.$$

Poněvadž funkce f je rostoucí a spojitá v intervalu $\langle 0, \infty)$, je také funkce g rostoucí a spojitá v intervalu $\langle 0, \infty)$.

Pro $n = 1$ je $y = \sqrt[1]{x}$, což je totéž jako $x = y^1 = y$. Je tedy $\sqrt[1]{x} = x$. Pro $n = 2$ píšeme zpravidla pouze $\sqrt{x}$ místo $\sqrt[2]{x}$.

Při lichém kladném n můžeme rozšířit definici n-té odmocniny i na záporné x vzhledem k tomu, že funkce f je pro liché n rostoucí a spojitá v celém intervalu $(-\infty, \infty)$. Naproti tomu při sudém n n-tou odmocninu záporného čísla nezavádíme.

Z předcházejícího plyne, že n-tá odmocnina (pokud je vůbec definována) je vždy definována jednoznačně. Zejména druhá odmocnina je vždy číslo nezáporné; proto je třeba dávat pozor: platí vzorce



Obr. 60

$$\sqrt{x^2} = |x| \text{ pro každé } x, \tag{44}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{1 - \sin^2 x} &= |\cos x|, \\ \sqrt{1 - \cos^2 x} &= |\sin x| \end{aligned} \tag{45}$$

rovněž pro každé x. V těchto dvou vzorcích se často chybuje tím, že se značka absolutní hodnoty vynechává.

Průběh funkce $y = \sqrt{x}$ spolu s inversní funkcí $y = x^2$ (pro $x \geqq 0, y \geqq 0$) je znázorněn na obr. 60. Podobný průběh mají křivky i pro jiná n.

Pomocí odmocnin definujeme mocninu, jejímž mocnitelem je libovolné racionální číslo:*) Je-li $x > 0$ a $n = \frac{p}{q}$, kde p, q jsou čísla celá a $q > 0$, rozumíme znakem x^n číslo $x^n = \sqrt[q]{x^p}$.

Lze ukázat, že pro počítání s mocninami, jejichž mocnitelé jsou čísla racionální a jejichž základy jsou kladná čísla, platí přesně táž pravidla jako pro počítání s mocninami, jejichž mocnitelé jsou čísla celá.

Dále si probereme funkci inversní k funkci $y = \sin x$. Ta je spojitá pro každé x (věta 18), ale monotonní je jen v určitých intervalech; proto se při konstrukci inversní funkce omezíme na interval $\langle -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi \rangle$, v němž je funkce $\sin x$ rostoucí. Je-li $-\frac{1}{2}\pi \leqq x \leqq \frac{1}{2}\pi$, je $-1 \leqq \sin x \leqq 1$, a proto je intervalem, v němž je definována funkce inversní, interval $\langle -1, 1 \rangle$. Inversní funkci označujeme názvem *arkussinus* a zapisujeme ji $x = \arcsin y$, při čemž $-1 \leqq y \leqq 1$. Volíme-li za proměnnou písmeno x, jde o funkci

$$y = \arcsin x, \text{ kde } -1 \leqq x \leqq 1$$

(čteme arkussinus x), což znamená totéž jako

$$x = \sin y, \text{ kde } -\tfrac{1}{2}\pi \leqq y \leqq \tfrac{1}{2}\pi.$$

Z těchto rovnic opět dostáváme

$$x = \sin(\arcsin x), \quad -1 \leqq x \leqq 1,$$
$$y = \arcsin(\sin y), \quad -\tfrac{1}{2}\pi \leqq y \leqq \tfrac{1}{2}\pi.$$

Vzhledem k tomu, že funkce $\sin x$ je v intervalu $\langle -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi \rangle$ rostoucí, je i funkce $\arcsin x$ funkce rostoucí v intervalu $\langle -1, 1 \rangle$. Průběh funkce $\arcsin x$ je znázorněn na obr. 61.

Obdobně funkce $y = \cos x$ je spojitá pro každé x, ale monotonní je opět jen v určitých intervalech. Je třeba se omezit

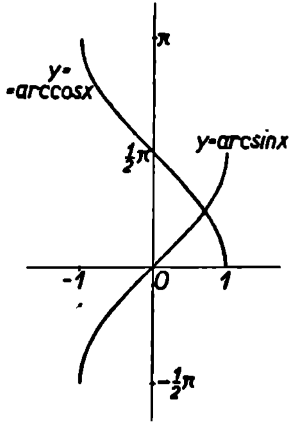
*) Názvem *racionální číslo* označujeme každé číslo, které se dá vyjádřit ve tvaru zlomku, jehož čitatel i jmenovatel jsou čísla celá.

opět jen na takový interval, v němž je funkce $\cos x$ monotonní; zpravidla to bývá interval $\langle 0, \pi \rangle$, v němž je $\cos x$ funkcí klesající. Je-li $0 \leqq x \leqq \pi$, je $1 \geqq \cos x \geqq -1$, a proto je oborem funkce inversní v tomto případě interval $\langle -1, 1 \rangle$. Inversní funkci nazýváme *arkuskosinus* a značíme $x = \arccos y$, kde $-1 \leqq y \leqq 1$. Označíme-li proměnnou písmenem x, máme

$$y = \arccos x, \text{ kde } -1 \leqq x \leqq 1$$

(čteme arkuskosinus x), což znamená totéž jako

$$x = \cos y, \text{ kde } 0 \leqq y \leqq \pi.$$



Obr. 61

Funkce $\cos x$ je v intervalu $\langle 0, \pi \rangle$ klesající a spojitá, proto i funkce $\arccos x$ je v intervalu $\langle -1, 1 \rangle$ klesající a spojitá (obr. 61).

Funkce $y = \operatorname{tg} x$ je rostoucí a spojitá v každém intervalu $(\frac{1}{2}(2k - 1)\pi, \frac{1}{2}(2k + 1)\pi)$, kde k je celé. Abychom k ní mohli sestrojit funkci inversní, musíme si vybrat jeden z těchto intervalů. Zpravidla bereme interval $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$. Je-li $-\frac{1}{2}\pi < x < \frac{1}{2}\pi$, je $\operatorname{tg} x$ v intervalu $(-\infty, \infty)$. Oborem inversní funkce je tedy interval $(-\infty, \infty)$. Inversní funkci nazýváme v tomto případě *arkustangens* a zapisujeme $x = \operatorname{arctg} y$. Označíme-li proměnnou zase písmenem x jako obvykle, máme

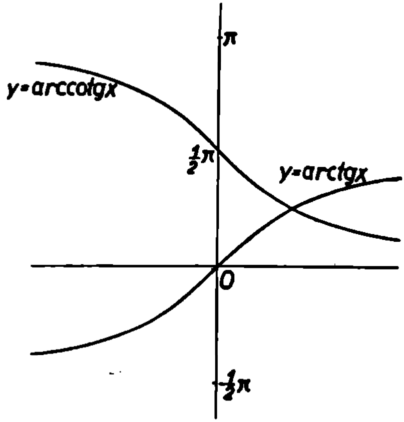
$$y = \operatorname{arctg} x \text{ pro každé } x$$

(čteme arkustangens x), což znamená totéž jako

$$x = \operatorname{tg} y, \text{ kde } -\tfrac{1}{2}\pi < y < \tfrac{1}{2}\pi.$$

Funkce $\operatorname{tg} x$ je v intervalu $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$ rostoucí a spojitá, proto je i funkce arctg$x$ v intervalu $(-\infty, \infty)$ rostoucí a spojitá. Průběh této funkce je znázorněn na obr. 62.

Konečně funkce $y = \text{cotg}x$ je klesající a spojitá v každém intervalu $(k\pi, (k+1)\pi)$, kde k je celé. K sestrojení inversní



Obr. 62

funkce bereme zpravidla interval $(0, \pi)$. Je-li $0 < x < \pi$, je cotg$x$ v intervalu $(-\infty, \infty)$. Oborem inversní funkce je tedy interval $(-\infty, \infty)$. Nazýváme ji *arkuskotangens* a zapisujeme $x = \text{arccotg}y$. Rovnice

$$y = \text{arccotg}x \text{ pro každé } x$$

(čteme arkuskotangens x) značí přesně totéž jako rovnice

$$x = \text{cotg}y \text{ pro } 0 < y < \pi.$$

Funkce cotg$x$ je v intervalu $(0, \pi)$ klesající a spojitá, proto je i funkce arccotg$x$ v intervalu $(-\infty, \infty)$ klesající a spojitá. Její průběh je znázorněn na obr. 62.

Funkce arcsin$x$, arccos$x$, arctg$x$, arccotg$x$ se často nazývají společným jménem *funkce cyklometrické*. Jejich užití si ukážeme na příkladech.

Příklad 53. Která x vyhovují rovnici $\sin x = a$, kde $-1 \leqq a \leqq 1$?

Pokud $-\frac{1}{2}\pi \leqq x \leqq \frac{1}{2}\pi$, lze tuto rovnici přepsat podle definice funkce arcsin ve tvaru $x = \arcsin a$, což je jediné řešení dané rovnice v intervalu $\langle -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi \rangle$. Víme však, že podle vzorce (6) pro každé x je $\sin(x - 2k\pi) = \sin x$, kde k je celé; proto dané rovnici vyhovuje také každé x, které vyhovuje rovnici $\sin(x - 2k\pi) = a$, t. j. každé x, pro něž $x - 2k\pi = \arcsin a$, čili

$$x = 2k\pi + \arcsin a.$$

Pro každé toto řešení platí $-\frac{1}{2}\pi \leqq x - 2k\pi \leqq \frac{1}{2}\pi$ čili $\frac{1}{2}(4k - 1)\pi \leqq x \leqq \frac{1}{2}(4k + 1)\pi$.

Dále podle vzorce (16) pro každé x je $\sin(\pi - x) = \sin x$, a tedy také $\sin(2k\pi + \pi - x) = \sin x$, kde k je celé. Proto dané rovnici vyhovují také taková x, která vyhovují rovnici $\sin[(2k + 1)\pi - x] = a$, t. j. $(2k + 1)\pi - x = \arcsin a$. Odtud dostáváme

$$x = (2k + 1)\pi - \arcsin a.$$

Každé z těchto řešení spadá do intervalu, pro nějž $-\frac{1}{2}\pi \leqq (2k + 1)\pi - x \leqq \frac{1}{2}\pi$, t. j. $\frac{1}{2}(4k + 1)\pi \leqq x \leqq \frac{1}{2}(4k + 3)\pi$. Tím jsou všecky intervaly, a tedy také všecka řešení, vyčerpány.

Příklad 54. Dokážeme, že pro každé x je

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arccotg} x = \tfrac{1}{2}\pi.$$

Položíme $y = \operatorname{arctg} x$, čili $x = \operatorname{tg} y$, kde $-\frac{1}{2}\pi < y < \frac{1}{2}\pi$. Vedle toho platí $\operatorname{cotg}(\frac{1}{2}\pi - y) = \operatorname{tg} y$, takže $\operatorname{cotg}(\frac{1}{2}\pi - y) = x$. Avšak $0 < \frac{1}{2}\pi - y < \pi$, takže $\frac{1}{2}\pi - y = \operatorname{arccotg} x$, při čemž $y = \operatorname{arctg} x$. Je tedy vskutku $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arccotg} x = \frac{1}{2}\pi$.

Podobně lze dokázat, že pro $-1 \leqq x \leqq 1$ je

$$\arcsin x + \arccos x = \tfrac{1}{2}\pi.$$

Obrátíme se nyní k derivacím inversních funkcí. Platí věta:

Věta **45**. Je-li funkce g monotonní v intervalu J_y a má-li ve vnitřním bodě y tohoto intervalu derivaci $g'(y) \neq 0$, má funkce f inversní k funkci g v bodě $x = g(y)$ derivaci $f'(x) = 1 : g'(y)$.

Důkaz. Předpokládáme, že funkce g má v bodě y derivaci, t. j. předpokládáme, že existuje limita

$$g'(y) = \lim_{h\to 0} \frac{g(y+h) - g(y)}{h} \neq 0.$$

To znamená, že $\dfrac{g(y+h) - g(y)}{h} = g'(y) + \varphi(h)$, kde φ je funkce proměnné h, jež je nekonečně malá v okolí bodu $h = 0$, t. j. $\lim\limits_{h\to 0}\varphi(h) = 0$. Pro $h = 0$ není hodnota funkce φ definována; položíme-li $\varphi(0) = 0$, je funkce φ spojitá v bodě $h = 0$. Označme $g(y) = x$, $g(y+h) = x + k$. Odtud plyne $y = f(x)$, $y + h = f(x+k)$. Potom pro $k \neq 0$ je

$$\frac{f(x+k) - f(x)}{k} = \frac{h}{g(y+h) - g(y)} = \frac{1}{g'(y) + \varphi(h)}.$$

Funkce g má v bodě y derivaci, proto je v něm spojitá, a proto je také funkce f spojitá v bodě x. Protože $h = f(x+k) - f(x)$, je také h spojitá funkce proměnné k v bodě $k = 0$, při čemž $\lim\limits_{k\to 0} h = 0$. Protože $\varphi(h)$ je spojitá funkce proměnné h v bodě $h = 0$, je to také spojitá funkce proměnné k v bodě $k = 0$ (věta 41), takže $\lim\limits_{k\to 0}\varphi(h) = 0$. Proto také existuje derivace funkce f v bodě x a je rovna

$$f'(x) = \lim_{k\to 0} \frac{f(x+k) - f(x)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{1}{g'(y) + \varphi(h)} = \frac{1}{g'(y)}.$$

Dokázané věty užijeme ke stanovení derivace inversních funkcí. Nejprve vezmeme funkci $y = \sqrt[q]{x} = x^{\frac{1}{q}}$. Ta je definována v intervalu $\langle 0, \infty)$. Funkce k ní inversní je $x = y^q$, kde y je v intervalu $\langle 0, \infty)$ a q je celé kladné. Tato funkce má v každém bodě $y > 0$ derivaci $qy^{q-1} \neq 0$. Proto podle věty 45 má derivaci i funkce $\sqrt[q]{x}$ a tato derivace je rovna

$$\frac{1}{qy^{q-1}} = \frac{1}{q} y^{1-q} = \frac{1}{q}\, x^{\frac{1-q}{q}} = \frac{1}{q}\, x^{\frac{1}{q}-1}.$$

Z tohoto výsledku nyní odvodíme derivaci mocniny x^n s racionálním mocnitelem $n = \frac{p}{q}$, kde p, q jsou čísla celá a $q > 0$, v bodě $x > 0$. Je totiž $x^n = x^{\frac{p}{q}} = (x^{\frac{1}{q}})^p$. Pak podle pravidla o derivaci složených funkcí

$$(x^n)' = p(x^{\frac{1}{q}})^{p-1} \,.\, (x^{\frac{1}{q}})' = px^{\frac{p-1}{q}} \,.\, \frac{1}{q} x^{\frac{1}{q}-1} =$$

$$= \frac{p}{q} x^{\frac{p-1}{q}+\frac{1}{q}-1} = \frac{p}{q} x^{\frac{p}{q}-1}.$$

Dostáváme tedy vzorec

$$(x^n)' = nx^{n-1}, \tag{46}$$

platný pro libovolné racionální n a pro $x > 0$. Porovnáme-li jej se vzorcem (27) na str. 71, shledáváme, že je s ním totožný; vzorec (46) však pro n žádá méně, pro x zato více.

Dále dokážeme

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\quad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \tag{47}$$

$$\text{kde } -1 < x < 1.$$

Je-li $y = \arcsin x$, kde $-1 \leqq x \leqq 1$, je $x = \sin y$, kde $-\frac{1}{2}\pi \leqq y \leqq \frac{1}{2}\pi$. V každém vnitřním bodě y intervalu

$\langle -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi\rangle$ je $(\sin y)' = \cos y > 0$; proto v každém vnitřním bodě x intervalu $\langle -1, 1\rangle$ existuje derivace funkce $\arcsin x$. Avšak $(\sin y)' = \cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - x^2}$ ($\cos y > 0$, a proto není třeba psát absolutní hodnotu). Je tedy

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Poněvadž dále $\arccos x = \frac{1}{2}\pi - \arcsin x$ (příklad 54 konec), proto je $(\arccos x)' = -(\arcsin x)'$, což platí opět pro $-1 < < x < 1$.

Obdobně dostaneme

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1 + x^2}, \quad (\operatorname{arccotg} x)' = -\frac{1}{1 + x^2} \tag{48}$$

pro každé x.

Je-li $y = \operatorname{arctg} x$, je $x = \operatorname{tg} y$ pro $-\frac{1}{2}\pi < y < \frac{1}{2}\pi$. Pak pro každé y z intervalu $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$ je $(\operatorname{tg} y)' = \dfrac{1}{\cos^2 y} \neq 0$, a proto pro každé x existuje derivace

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{(\operatorname{tg} y)'} = \cos^2 y = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Poněvadž $\operatorname{arccotg} x = \frac{1}{2}\pi - \operatorname{arctg} x$ (příklad 54), proto $(\operatorname{arccotg} x)' = -(\operatorname{arctg} x)'$ pro každé x.

Píšeme-li nalezené vzorce ve tvaru integrálů, dostáváme

$$\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n + 1} \tag{49}$$

pro každé racionální $n \neq -1$ v intervalu $(0, \infty)$,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \arcsin x \text{ v intervalu } (-1, 1), \tag{50}$$

$$\int \frac{dx}{1 + x^2} = \operatorname{arctg} x \text{ v intervalu } (-\infty, \infty). \tag{51}$$

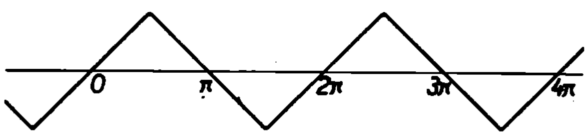
Příklad 55. $(\sqrt{1+x^2})' = [(1+x^2)^{\frac{1}{2}}]' = \frac{1}{2}(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}\, 2x =$ $= \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ pro každé x podle pravidel o derivování složené funkce.

Příklad 56. Máme stanovit derivaci funkce $y =$ $= \arcsin(\sin x)$. Tato funkce je definována pro každé x, neboť $\sin x$ je definován pro každé x a jeho hodnota je v intervalu $\langle -1, 1\rangle$; k této hodnotě lze vždy najít příslušný arkussinus. Derivaci počítáme podle pravidla o derivování složené funkce:

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}} \cdot \cos x = \frac{\cos x}{|\cos x|},$$

neboť $\sqrt{1-\sin^2 x} = |\cos x|$ podle vzorce (45). Třeba rozlišovat tři případy: (1) Je-li $\cos x > 0$, t. j. pro $\frac{1}{2}(4k-1)\pi <$ $< x < \frac{1}{2}(4k+1)\pi$, kde k je celé, je $|\cos x| = \cos x \neq 0$, a pak $y' = 1$. (2) Je-li $\cos x < 0$, t. j. pro $\frac{1}{2}(4k+1)\pi < x <$ $< \frac{1}{2}(4k+3)\pi$ je $|\cos x| = -\cos x \neq 0$, a pak $y' = -1$. (3) Konečně pro $x = \frac{1}{2}(2k+1)\pi$ je $\cos x = 0$ a derivace neexistuje.

Zajímavý je průběh křivky $y = \arcsin(\sin x)$ (obr. 63). Nejprve vidíme, že $\arcsin[\sin(x + 2k\pi)] = \arcsin(\sin x)$; je tedy



Obr. 63

studovaná funkce periodická s periodou 2π. Vedle toho pro $-\frac{1}{2}\pi \leq x \leq \frac{1}{2}\pi$ je $\arcsin(\sin x) = x$ (str. 139); je tedy naše funkce v intervalu $\langle -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi\rangle$ zobrazena částí přímky $y =$ $= x$. Pro $\frac{1}{2}\pi \leq x \leq \frac{3}{2}\pi$ je $-\frac{1}{2}\pi \leq \pi - x \leq \frac{1}{2}\pi$, takže

$\arcsin(\sin x) = \arcsin[\sin(\pi - x)] = \pi - x$; funkce je tedy v intervalu $\langle \frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi \rangle$ zobrazena částí přímky $y = \pi - x$. V bodech $\frac{1}{2}(2k + 1)\,\pi$ derivace neexistuje a funkce tam nabývá krajních hodnot.

Příklad 57. Integrál $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{ax + b}}$, kde $a \neq 0$, počítáme substitucí $ax + b = t$; pak $a\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$, takže

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{ax + b}} = \frac{1}{a} \int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} = \frac{1}{a} \int t^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{a} \cdot \frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} =$$
$$= \frac{2}{a} \sqrt{ax + b} + c$$

v intervalu $\left(-\frac{b}{a}, \infty\right)$, je-li $a > 0$, a v intervalu $\left(-\infty, -\frac{b}{a}\right)$, je-li $a < 0$; musí totiž vždy $ax + b > 0$.

Příklad 58. Integrál $\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2 + x^2}$, kde $a \neq 0$, počítáme substitucí $x = at$, $\mathrm{d}x = a\,\mathrm{d}t$. Dostaneme

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2 + x^2} = \int \frac{a\,\mathrm{d}t}{a^2 + a^2t^2} = \frac{1}{a} \int \frac{\mathrm{d}t}{1 + t^2} =$$
$$= \frac{1}{a} \operatorname{arctg} t = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + c$$

v intervalu $(-\infty, \infty)$.

Příklad 59. Integrál $\int \sqrt{1 - x^2}\,\mathrm{d}x$ v intervalu $(-1, 1)$ počítáme po částech. Položíme $u = \sqrt{1 - x^2}$, $v' = 1$; pak je $u' = \frac{-x}{\sqrt{1 - x^2}}$, $v = x$, takže

$$\int \sqrt{1 - x^2}\,\mathrm{d}x = x\sqrt{1 - x^2} + \int \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Zlomek v posledním integrálu upravíme takto:

$$\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1-(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \sqrt{1-x^2},$$

neboť $1 > x^2$. Pak

$$\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = x\sqrt{1-x^2} + \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} - \int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x,$$

takže

$$\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + \tfrac{1}{2}\arcsin x + c.$$

Můžeme však počítat také substitucí $x = \sin t$, $\mathrm{d}x = \cos t\,\mathrm{d}t$. Aby byl i obrácený přechod od t k x jednoznačný, omezíme se na t z intervalu $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$, takže $t = \arcsin x$. Po dosazení máme

$$\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \int \sqrt{1-\sin^2 t}\,.\,\cos t\,\mathrm{d}t = \int \cos^2 t\,\mathrm{d}t,$$

neboť $\cos t > 0$, takže $\sqrt{1-\sin^2 t} = \cos t$. Poněvadž $\cos^2 t = 1 - \sin^2 t$, je

$$\int \cos^2 t\,\mathrm{d}t = \int (1-\sin^2 t)\,\mathrm{d}t = \int \mathrm{d}t - \int \sin^2 t\,\mathrm{d}t = t - \tfrac{1}{2}(t - \sin t \cos t)$$

podle příkladu 42. Zavedeme-li sem opět původní proměnnou x, dostaneme

$$\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}(\arcsin x + x\sqrt{1-x^2}) + c.$$

Příklad 60. Integrál $\int_0^1 \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{1+x^2}$ budeme počítat substitucí

$x = \mathrm{tg}\, t$, $\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{\cos^2 t}$, při čemž proměnnou t omezíme opět na interval $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$. Pak je $t = \mathrm{arctg}\, x$, takže dolní mez po tomto dosazení bude $\mathrm{arctg}\, 0 = 0$ a horní mez $\mathrm{arctg}\, 1 = \frac{1}{4}\pi$.

Dostáváme tedy

$$\int\limits_0^1 \frac{x^2\,dx}{1+x^2} = \int\limits_0^{\frac{1}{4}\pi} \frac{\mathrm{tg}^2 t}{1+\mathrm{tg}^2 t} \cdot \frac{dt}{\cos^2 t} = \int\limits_0^{\frac{1}{4}\pi} \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}\,dt =$$

$$= [\mathrm{tg}t - t]_0^{\frac{1}{4}\pi} = 1 - \tfrac{1}{4}\pi$$

podle příkladu 40.

Cvičení.

71. Stanovte funkci inversní k funkci: a) $\frac{1}{x}$, b) $\frac{1}{x^2}$,

$$\text{c) } \sqrt{1-x^2},\ \text{d) } \frac{1}{\sqrt{1+x^2}},\ \text{e) } \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

72. Jaký tvar musí mít graf funkce $f(x)$, aby byla funkce inversní totožná s funkcí původní?

73. Nalezněte všecka řešení rovnice a) $\mathrm{tg}x = a$, b) $\cos x = a$, kde $-1 \leqq a \leqq 1$, c) $\mathrm{cotg}x = a$.

74. Dokažte, že a) $\arcsin x = \arccos\sqrt{1-x^2}$ pro $0 \leqq x \leqq 1$, $\arcsin x = -\arccos\sqrt{1-x^2}$ pro $-1 \leqq x \leqq 0$, b) $\arcsin x = \mathrm{arctg}\,\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ pro $-1 < x < 1$, c) $\mathrm{arctg}x = \arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, d) $\arcsin(-x) = -\arcsin x$ pro $-1 \leqq x \leqq 1$, e) $\mathrm{arctg}(-x) = -\mathrm{arctg}x$, f) $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$ pro $-1 \leqq x \leqq 1$, g) $\mathrm{arccotg}(-x) = \pi - \mathrm{arccotg}x$.

75. a) Je-li $x_1x_2 \leqq 0$ nebo $x_1^2 + x_2^2 \leqq 1$, je $\arcsin x_1 + \arcsin x_2 = \arcsin(x_1\sqrt{1-x_2^2} + x_2\sqrt{1-x_1^2})$; je-li $x_1^2 + x_2^2 > 1$ a jsou-li čísla x_1, x_2 kladná, je $\arcsin x_1 + \arcsin x_2 =$

$= \pi - \arcsin(x_1\sqrt{1-x_2^2} + x_2\sqrt{1-x_1^2})$; je-li $x_1^2 + x_2^2 > 1$ a jsou-li čísla x_1, x_2 záporná, je $\arcsin x_1 + \arcsin x_2 = -\pi - \arcsin(x_1\sqrt{1-x_2^2} + x_2\sqrt{1-x_1^2})$. b) Je-li $x_1x_2 < 1$, je $\operatorname{arctg} x_1 + \operatorname{arctg} x_2 = \operatorname{arctg} \dfrac{x_1 + x_2}{1 - x_1x_2}$; je-li $x_1x_2 > 1$ a jsou-li čísla x_1, x_2 kladná, je $\operatorname{arctg} x_1 + \operatorname{arctg} x_2 = \operatorname{arctg} \dfrac{x_1 + x_2}{1 - x_1x_2} + \pi$; je-li $x_1x_2 > 1$ a jsou-li čísla x_1, x_2 záporná, je $\operatorname{arctg} x_1 + \operatorname{arctg} x_2 = \operatorname{arctg} \dfrac{x_1 + x_2}{1 - x_1x_2} - \pi$. Dokažte.

76. Stanovte derivaci funkcí: a) $\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}$, b) $\sqrt{3x+5}$, c) $\sqrt{1-x^2}$, d) $x\sqrt{x^2+1}$, e) $\sqrt{x+\sqrt{x}}$, f) $\dfrac{1}{a} \operatorname{arctg} \dfrac{x}{a}$, $a \neq 0$, g) $\arcsin \dfrac{x}{a}$, $a \neq 0$, h) $(\arcsin x)^2$, i) $\arcsin\sqrt{1-x^2}$, j) $\operatorname{arctg} \dfrac{x+1}{x-1}$, k) $\arcsin \dfrac{2x}{1+x^2}$, l) $\arccos \dfrac{x+1}{x-1}$.

77. Vyšetřte průběh funkcí: a) $\arcsin \dfrac{1}{x}$, b) $\arccos \dfrac{1}{x}$, c) $\operatorname{arctg} \dfrac{1}{x}$, d) $\operatorname{arccotg} \dfrac{1}{x}$, e) $\arccos(\cos x)$, f) $\arcsin(\cos x)$, g) $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)$, h) $\operatorname{arctg}(\operatorname{cotg} x)$.

78. Určete primitivní funkce k daným funkcím: a) $\sqrt{x\sqrt{x}}$, b) $\sqrt{3x+2}$, c) $\dfrac{x}{\sqrt{5-x^2}}$, d) $\dfrac{1}{\sqrt{5-x^2}}$, e) $x^2\sqrt{x^3+1}$, f) $\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$, g) $\dfrac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}$, h) $\dfrac{1}{\sin^2 x + 2\cos^2 x}$, i) $\dfrac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}$, $a > 0$, j) $\dfrac{1}{\sqrt{x(2-x)}}$.

79. Integrací po částech vypočtěte: a) $\int x \operatorname{arctg} x \, dx$, b) $\int \arcsin x \, dx$, c) $\int x \arcsin x \, dx$, d) $\int \sqrt{3 - 2x^2} \, dx$,

e) $\int \sqrt{6 - 5x - x^2} \, dx$.

80. Vypočtěte integrály: a) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt[m]{x^n} \, dx$, m, n celá čísla, $m > 0$, $m > -n$, b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^2 + 3}$, c) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}a} \frac{x \, dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$, $a \neq 0$,

d) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}a} \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$, $a > 0$, e) $\displaystyle\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} \, dx$, $a > 0$.

IX. LOGARITMUS A OBECNÁ MOCNINA

Dovedeme již integrovat funkci x^n v intervalu $(0, \infty)$ pro každé racionální číslo $n \neq -1$ podle vzorce (46). Zbývá nám ještě výjimka pro $x = -1$. Této výjimky si v této kapitole všimneme blíže. Je-li tedy $n = -1$, jde o funkci $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Tato funkce je, jak víme, spojitá v intervalech $(-\infty, 0)$, $(0, \infty)$ (věta 16). Vezmeme si jeden z nich. Bude to interval $(0, \infty)$. Jsou-li a, x dvě čísla z tohoto intervalu, existuje podle věty 33 integrál

$$F(x) = \int_a^x \frac{dt}{t}.$$

Věta 33 sice předpokládá, že je $a < x$, ale tento předpoklad není podstatný vzhledem k definicím (31) a (32). Považujeme-li x za proměnnou, je $F(x)$ funkce této proměnné spojitá v každém bodě intervalu $(0, \infty)$ (věta 37). Poněvadž dále funkce $f(x) = \frac{1}{x}$ je spojitá v každém bodě x intervalu $(0, \infty)$, funkce F má v každém tomto bodě derivaci, při čemž je $F'(x) = f(x)$ (věta 38), a funkce $F(x)$ je tedy primitivní funkce k funkci $f(x) = \frac{1}{x}$. Tím je dokázáno, že v intervalu $(0, \infty)$ existuje primitivní funkce k funkci $f(x) = \frac{1}{x}$. Potom podle věty 39 existuje primitivních funkcí nekonečně mnoho a všecky tyto funkce se navzájem liší o integrační konstantu. Vezmeme si jednu určitou z nich a integrační konstantu budeme fixovat tak, že budeme žádat, aby pro $x = 1$ byla hodnota této funkce rovna nule. Takto definovaná funkce je velmi důležitá v diferenciálním a integrálním počtu a nazývá se *přirozený logaritmus* čísla x (značka $\lg x$); při tom je x libovolné číslo z intervalu $(0, \infty)$. Tak dospíváme ke vzorcům

$$(\lg x)' = \frac{1}{x} \text{ pro } x > 0, \ \lg 1 = 0, \tag{52}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \lg x \text{ v intervalu } (0, \infty), \ \lg 1 = 0.$$

Oba poslední řádky vyjadřují jedno a totéž. Vedle toho je podle (33)

$$\int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t} = \lg x - \lg 1 = \lg x$$

čili

$$\lg x = \int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t}, \text{ kde } x > 0. \tag{53}$$

Tím je pro každé $x > 0$ definováno určité číslo $\lg x$; pro $x \leqq 0$ hodnota $\lg x$ definována není.

Funkce $f(x) = \dfrac{1}{x}$ je však také spojitá v intervalu $(-\infty, 0)$; proto také v tomto intervalu k ní existuje primitivní funkce. Je-li $x < 0$, je $-x > 0$, a pak je definována hodnota $\lg(-x)$. Pak podle (42) je

$$[\lg(-x)]' = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}.$$

To však znamená, že primitivní funkcí k funkci $f(x) = \dfrac{1}{x}$ v intervalu $(-\infty, 0)$ je funkce $\lg(-x)$. Pro $x < 0$ však je $-x = |x|$; pro $x > 0$ je $|x| = x$. Proto funkce $f(x) = \dfrac{1}{x}$ má za primitivní funkci funkci $\lg|x|$ v každém z obou intervalů, v němž je funkce $f(x)$ spojitá, t. j. platí

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \lg|x| \text{ v intervalech } (-\infty, 0), (0, \infty). \qquad (54)$$

Nyní si odvodíme některé vlastnosti funkce $\lg x$.

Je-li $a > 0$, $b > 0$, je také $ab > 0$. Potom existují integrály $\displaystyle\int_1^a \frac{\mathrm{d}t}{t}$ a $\displaystyle\int_a^{ab} \frac{\mathrm{d}t}{t}$, a proto podle (53) a podle věty 36 je

$$\lg ab = \int_1^{ab} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \int_1^a \frac{\mathrm{d}t}{t} + \int_a^{ab} \frac{\mathrm{d}t}{t}.$$

První integrál vpravo je $\lg a$. Druhý integrál upravíme substitucí $t = au$, $\mathrm{d}t = a\,\mathrm{d}u$. Odtud $u = t : a$, takže pro $t = a$ je $u = 1$ a pro $t = ab$ je $u = b$. Máme tedy

$$\int_a^{ab} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \int_1^b \frac{a\,\mathrm{d}u}{au} = \int_1^b \frac{\mathrm{d}u}{u} = \lg b.$$

Tím dostáváme vzorec

$$\lg ab = \lg a + \lg b, \tag{55}$$

platný pro každé $a > 0$, $b > 0$.

Dosadíme-li do vzorce (55) $ab = a_1$, je $a = a_1 : b$, neboť $b > 0$ podle předpokladu učiněného na počátku. Dostáváme tak

$$\lg a_1 = \lg \frac{a_1}{b} + \lg b$$

a odtud opět pro každé $a > 0$, $b > 0$

$$\lg \frac{a}{b} = \lg a - \lg b \tag{56}$$

(v posledním vzorci je psáno a místo a_1).

Je-li dále b libovolné racionální číslo a $a > 0$, je

$$\lg a^b = \int_1^{a^b} \frac{dt}{t}.$$

Zavedeme substituci $t = u^b$; pak podle (46) je $dt = bu^{b-1}\, du$. Potom $u = t^{\frac{1}{b}}$, takže pro $t = 1$ je $u = 1$ a pro $t = a^b$ je $u = a$. Máme tedy

$$\lg a^b = \int_1^a \frac{bu^{b-1} du}{u^b} = b \int_1^a \frac{du}{u} = b \,.\, \lg a,$$

t. j.

$$\lg a^b = b \,.\, \lg a, \tag{57}$$

pro každé racionální číslo b a pro $a > 0$.

Věta **46**. Funkce $\lg x$ je spojitá a rostoucí v intervalu $(0, \infty)$; je-li $x > 1$, je $\lg x > 0$, je-li $0 < x < 1$, je $\lg x < 0$; vedle toho je $\lim\limits_{x \to \infty} \lg x = \infty$, $\lim\limits_{x \to 0+} \lg x = -\infty$.

Důkaz. To, že funkce $\lg x$ je spojitá v intervalu $(0, \infty)$, bylo dokázáno již na str. 151. Je třeba dále dokázat, že je rostoucí. Zvolme dvě čísla $x_1 > 0$, $x_2 > 0$. Platí

$$\lg x_2 = \int_1^{x_2} \frac{dt}{t} = \int_1^{x_1} \frac{dt}{t} + \int_{x_1}^{x_2} \frac{dt}{t} = \lg x_1 + \int_{x_1}^{x_2} \frac{dt}{t} \qquad \text{(a)}$$

podle věty 36. Je-li $x_1 < x_2$ a je-li t libovolný bod z intervalu $\langle x_1, x_2 \rangle$, pak pro každé toto t platí $t \leqq x_2$, $\frac{1}{t} \geqq \frac{1}{x_2}$. Potom podle věty 34

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{dt}{t} \geqq \int_{x_1}^{x_2} \frac{dt}{x_2} \quad \text{čili} \quad \int_{x_1}^{x_2} \frac{dt}{t} \geqq \frac{x_2 - x_1}{x_2}.$$

Avšak $x_2 - x_1 > 0$, proto $\int_{x_1}^{x_2} \frac{dt}{t} > 0$. Plyne tedy z podmínky (a)

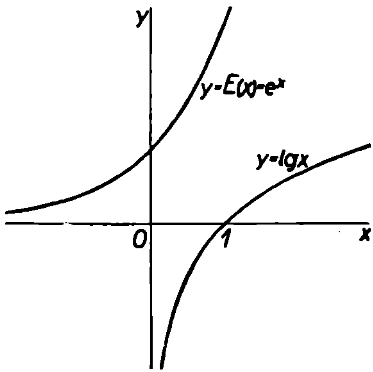
$$\lg x_2 = \lg x_1 + \int_{x_1}^{x_2} \frac{dt}{t} > \lg x_1.$$

To však značí, že funkce $\lg x$ je rostoucí v intervalu $(0, \infty)$. Je-li $x > 1$, je tedy $\lg x > \lg 1 = 0$, je-li $0 < x < 1$, je $\lg x < \lg 1 = 0$.

Ještě zbývá dokázat, že $\lim_{x \to \infty} \lg x = \infty$, t. j. že ke každému číslu $k > 0$ dovedeme nalézt takové číslo $a > 0$, že pro všechna $x > a$ je $\lg x > k$ (viz str. 36). Abychom to dokázali, všimněme si, že $2 > 1$, a proto $\lg 2 > 0$. Je-li dáno libovolné číslo $k > 0$, existuje takové celé a kladné číslo n, že $n \lg 2 > k$ čili $\lg 2^n > k$. Pak pro každé $x > 2^n$ je $\lg x > \lg 2^n > k$. Je tedy $a = 2^n$ a tvrzení je dokázáno. Vedle toho podle (56)

je $\lg \frac{1}{x} = -\lg x$, neboť $\lg 1 = 0$. Podle toho $\lim\limits_{x \to 0+} \lg x =$
$= -\lim\limits_{\frac{1}{x} \to \infty} \lg \frac{1}{x} = -\infty$. Tím je dokázána celá věta 46.

Poslední tvrzení této věty znamená toto: Roste-li x nade všecky meze, roste také $\lg x$ nade všecky meze; blíží-li se x



Obr. 64

k nule (ovšem zprava), klesá $\lg x$ pod jakoukoli hodnotu. Průběh funkce $y = \lg x$ (spolu s funkcí k ní inversní) je znázorněn na obr. 64.

Příklad 61. Stanovit derivaci funkce $f(x) = \lg(x^2 + 1)$.

Pro každé x je $x^2 + 1 > 0$, a proto je funkce $f(x)$ definována pro každé x. Podle (42) a (52) je

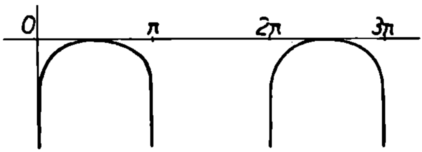
$$f'(x) = \frac{1}{x^2 + 1} \cdot 2x = \frac{2x}{x^2 + 1} \text{ pro každé } x.$$

Příklad 62. Vyšetřit průběh funkce $f(x) = \lg \sin x$.

Poněvadž $\sin x > 0$, pokud x vyhovuje nerovnostem $2k\pi < x < (2k + 1)\pi$, kde k je celé, je funkce $f(x) = \lg\sin x$ definována jen pro tato x. Pro tato x je podle (52) a (42)

$$f'(x) = \frac{1}{\sin x} \,.\, \cos x = \operatorname{cotg} x.$$

Pro $x = 2k\pi + \frac{1}{2}\pi = \frac{1}{2}(4k + 1)\pi$ je $f'(x) = \operatorname{cotg} x = 0$, kdežto pro každé x z intervalu $(2k\pi, \frac{1}{2}(4k + 1)\pi)$ je $f'(x) =$



Obr. 65

$= \operatorname{cotg} x > 0$ a pro každé x z intervalu $(\frac{1}{2}(4k + 1)\pi, (2k + 1)\pi)$ je $f'(x) = \operatorname{cotg} x < 0$. Proto funkce $f(x) = \lg\sin x$ nabývá maxima pro $x = \frac{1}{2}(4k + 1)\pi$. Toto maximum je rovno nule. Průběh dané funkce je znázorněn na obr. 65.

Příklad 63. Abychom určili integrál $\int \lg x \, dx$, který je definován v intervalu $(0, \infty)$, neboť v tomto intervalu je funkce $\lg x$ spojitá, užijeme methody integrace po částech. Položíme $u = \lg x$, $v' = 1$; pak je $u' = \frac{1}{x}$, $v = x$, takže $\int \lg x \, dx =$

$$= x \lg x - \int \frac{1}{x} \,.\, x \, dx = x \lg x - x + c \text{ v intervalu } (0, \infty).$$

Příklad 64. Integrál $\int \frac{dx}{\sin x}$, který má smysl v těch intervalech, v nichž je $\sin x \neq 0$, t. j. v intervalech $(k\pi, (k + 1)\pi)$, kde k je číslo celé, určíme takto:

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{\sin^2 \frac{1}{2}x + \cos^2 \frac{1}{2}x}{2 \sin\frac{1}{2}x \cos\frac{1}{2}x}\, dx = \frac{1}{2}\int \frac{\sin\frac{1}{2}x}{\cos\frac{1}{2}x}\, dx + \\ + \frac{1}{2}\int \frac{\cos\frac{1}{2}x}{\sin\frac{1}{2}x}\, dx,$$

neboť $\sin x = 2 \sin\frac{1}{2}x \cos\frac{1}{2}x$ podle (10) a $1 = \sin^2\frac{1}{2}x + \cos^2\frac{1}{2}x$ podle (12). Abychom ustanovili první integrál, položíme $\cos\frac{1}{2}x = t$; pak je $dt = -\frac{1}{2}\sin\frac{1}{2}x\, dx$. Proto

$$\frac{1}{2}\int \frac{\sin\frac{1}{2}x}{\cos\frac{1}{2}x}\, dx = -\int \frac{dt}{t} = -\lg|t| = -\lg|\cos\tfrac{1}{2}x|$$

podle (54). Druhý integrál určíme substitucí $\sin\frac{1}{2}x = u$, $du = \frac{1}{2}\cos\frac{1}{2}x\, dx$, takže

$$\frac{1}{2}\int \frac{\cos\frac{1}{2}x}{\sin\frac{1}{2}x}\, dx = \int \frac{du}{u} = \lg|u| = \lg|\sin\tfrac{1}{2}x|.$$

Je tedy celkem

$$\int \frac{dx}{\sin x} = -\lg|\cos\tfrac{1}{2}x| + \lg|\sin\tfrac{1}{2}x| = \lg|\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}x| + c$$

podle (56).

Kontrola: Je-li x v intervalu $(k\pi, (k+1)\pi)$, kde k je celé, je $\frac{1}{2}k\pi < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}(k+1)\pi$. Jsou dvě možnosti: (1) Je-li k sudé, t. j. je-li $k = 2h$, kde h je opět celé, je $h\pi < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}(2h+1)\pi$. Pak je $\operatorname{tg}\frac{1}{2}x > 0$ a $|\operatorname{tg}\frac{1}{2}x| = \operatorname{tg}\frac{1}{2}x$, takže

$$(\lg|\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}x|)' = (\lg\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}x)' = \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}x} \cdot \frac{1}{\cos^2\frac{1}{2}x} \cdot \frac{1}{2} = \\ = \frac{1}{2 \sin\frac{1}{2}x \cos\frac{1}{2}x} = \frac{1}{\sin x}.$$

(2) Je-li k liché, t. j. je-li $k = 2h - 1$, kde h je celé, je $\frac{1}{2}(2h - 1)\pi < \frac{1}{2}x < h\pi$. Pak je $\operatorname{tg}\frac{1}{2}x < 0$ a $|\operatorname{tg}\frac{1}{2}x| = -\operatorname{tg}\frac{1}{2}x$, takže

$$(\lg|\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}x|)' = [\lg(-\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}x)]' =$$

$$= \frac{1}{-\operatorname{tg}\frac{1}{2}x} \cdot \frac{-1}{\cos^2\frac{1}{2}x} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2\sin\frac{1}{2}x\cos\frac{1}{2}x} = \frac{1}{\sin x}.$$

Bylo tedy počítáno správně.

Příklad 65. Integrál $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}}$, kde $a \neq 0$ je konstanta, existuje, pokud $x^2 > -a$, t. j. pro $a > 0$ v intervalu $(-\infty, \infty)$ a pro $a < 0$ v intervalech $(-\infty, -\sqrt{-a})$ a $(\sqrt{-a}, \infty)$. Pro výpočet daného integrálu je vhodná substituce

$$\sqrt{x^2 + a} = t - x \tag{b}$$

čili

$$t = x + \sqrt{x^2 + a}. \tag{c}$$

Tím je ke každému x jednoznačně přiřazeno určité t. Pokud $a \neq 0$, je také $t \neq 0$, neboť pro $t = 0$ bychom dostali $\sqrt{x^2 + a} = -x$; tento vztah může být splněn jen tehdy, když je $x^2 + a = x^2$ čili když $a = 0$, ale to podle našeho předpokladu není. Z rovnice (b) plyne

$$x^2 + a = t^2 - 2tx + x^2$$

a odtud

$$x = \frac{t^2 - a}{2t}, \text{ neboť } t \neq 0.$$

Tím je ke každému t jednoznačně přiřazeno určité x. Odtud vyplývá

$$\sqrt{x^2 + a} = t - x = t - \frac{t^2 - a}{2t} = \frac{t^2 + a}{2t}$$

a vedle toho

$$dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{2t \cdot t - (t^2 - a) \cdot 1}{t^2} dt = \frac{t^2 + a}{2t^2} dt.$$

Číslo $t^2 + a = 2t\sqrt{x^2 + a}$ je vždy různé od nuly. Kdyby totiž $t^2 + a = 0$, bylo by $\sqrt{x^2 + a} = 0$, a to není, neboť $x^2 > -a$. Je tedy

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \int \frac{\frac{t^2 + a}{2t^2}}{\frac{t^2 + a}{2t}} dt = \int \frac{dt}{t} = \lg|t| = \lg|x + \sqrt{x^2 + a}|.$$

Nalezli jsme tedy výsledek

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \lg|x + \sqrt{x^2 + a}| \tag{58}$$

v intervalu $(-\infty, \infty)$ pro $a > 0$ a

v intervalech $(-\infty, -\sqrt{-a})$, $(\sqrt{-a}, \infty)$ pro $a < 0$.

Podle věty 46 je funkce $\lg x$ rostoucí a spojitá v intervalu $(0, \infty)$. Poněvadž $\lim\limits_{x \to \infty} \lg x = \infty$, $\lim\limits_{x \to 0+} \lg x = -\infty$, vyplňují všecky hodnoty $\lg x$ interval $(-\infty, \infty)$, a proto také ke každému číslu y existuje jediné číslo x tak, že $\lg x = y$ (viz větu 43). To znamená, že k funkci $\lg x$ existuje funkce inversní. Tuto inversní funkci označíme (prozatím) $E(x)$; jejím oborem je interval $(-\infty, \infty)$ a v tomto intervalu je to podle věty 44 funkce rostoucí a spojitá. Pro $y > 1$ je $x = \lg y > 0$, pro $0 < y < 1$ je $x = \lg y < 0$, $\lg 1 = 0$; proto pro $x > 0$ je $y = E(x) > 1$, pro $x < 0$ je $0 < y = E(x) < 1$, $E(0) = 1$. Vedle toho je $\lim\limits_{x \to \infty} E(x) = \infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} E(x) = 0$. Průběh funkce $y = E(x)$ je vedle funkce $y = \lg x$ znázorněn na obr. 64.

Rovnice $y = E(x)$ je tedy totožná s rovnicí $x = \lg y$, kde $y > 0$. Přepišme nyní rovnice (55) až (57) tak, abychom tam místo funkce $\lg x$ měli funkci inversní $E(x)$. Položme

$$\lg a = r,\ \lg b = s \quad \text{čili} \quad a = E(r),\ b = E(s).$$

Pak je $ab = E(r) \,.\, E(s)$. Podle (55) je $\lg ab = \lg a + \lg b = r + s$, takže $ab = E(r + s)$, čili

$$E(r) \,.\, E(s) = E(r + s) \text{ pro každé } r \text{ a } s, \tag{d}$$

což je rovnice ekvivalentní s rovnicí (55).

Podobně přepíšeme rovnici (56). Je $\frac{a}{b} = \frac{E(r)}{E(s)}$. Podle (56) je $\lg \frac{a}{b} = \lg a - \lg b = r - s$, takže $\frac{a}{b} = E(r - s)$, čili

$$\frac{E(r)}{E(s)} = E(r - s) \text{ pro každé } r \text{ a } s. \tag{e}$$

Přepišme ještě rovnici (57). Poněvadž $a = E(r)$, proto $a^b = E^b(r)$, kde b je racionální; při tom $E^b(r)$ značí totéž jako $[E(r)]^b$. Podle (57) je $\lg a^b = b \lg a = br$. Proto $a^b = E(br)$, takže

$$E^b(r) = E(br) \text{ pro racionální } b \text{ a pro každé } r. \tag{f}$$

Tato rovnice však má důležitý význam. Hodnota $E(x)$ je definována pro každé x, proto má také pravá strana rovnice (f) smysl pro každé b (a ovšem také pro každé r), a proto má smysl také levá strana. Je-li b racionální, značí levá strana rovnice (f) b-tou mocninu čísla $E(r) = a$, je-li b iracionální, bude nám rovnice (f) sloužit za definici mocniny čísla $E(r) = a$ s iracionálním mocnitelem b.*) Podle toho je tedy

$$a^b = E(br), \text{ kde } r = \lg a,\ b \text{ libovolné.} \tag{g}$$

Avšak rovnici (g) můžeme přepsat ve tvaru $\lg a^b = br = b \lg a$; proto vzorec (57) platí pro každé $a > 0$ a pro každé b (a ne jen pro b racionální, jak bylo uvedeno na str. 154).

Protože hodnota $E(x)$ je definována pro každé x, je definována i pro $x = 1$. Hodnotu $E(1)$ budeme označovat písme-

*) Iracionální jsou všecka čísla, která nejsou racionální, t. j. všecka čísla, která se nedají vyjádřit ve tvaru zlomku, jehož čitatelem a jmenovatelem jsou čísla celá (viz str. 9).

nem e. Je tedy e takové číslo, že $\lg e = 1$. Číslo e se jmenuje *základ přirozených logaritmů*. Je to číslo irracionální a lze vypočítat, že $e = 2{,}718281828\ldots$ (tečky značí, že v uvedeném čísle jsou další desetinná místa vynechána). Jestliže tedy v rovnici (g) položíme $r = 1$, je $a = e$, takže

$$E(b) = e^b \text{ pro každé } b.$$

Přepíšeme-li podle toho rovnice (d) až (f), máme

$$e^r \cdot e^s = e^{r+s}, \tag{59}$$
$$e^r : e^s = e^{r-s}, \tag{60}$$
$$(e^r)^s = e^{rs} \tag{61}$$

pro každé r, s. Funkci $e^x = E(x)$ právě definovanou označujeme názvem *exponenciální funkce*. Výsledky našich úvah můžeme tedy vyslovit větou:

Věta **47**. Exponenciální funkce e^x je spojitá a rostoucí v intervalu $(-\infty\ \infty)$; je-li $x > 0$, je $e^x > 1$, je-li $x < 0$, je $0 < e^x < 1$; vedle toho je $\lim\limits_{x\to\infty} e^x = \infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$.

Stanovme nyní derivaci funkce e^x v bodě x. Je-li $y = e^x$, značí to totéž jako $x = \lg y$, kde $y > 0$ Protože inversní funkce $\lg y$ má derivaci v bodě y, která je rovna $1 : y$, je podle věty 45

$$(e^x)' = \frac{1}{(\lg y)'} = \frac{1}{1 : y} = y = e^x.$$

Platí tedy vzorec

$$(e^x)' = e^x \text{ pro každé } x. \tag{62}$$

Proto také

$$\int e^x\, dx = e^x \text{ v intervalu } (-\infty, \infty). \tag{63}$$

Obraťme se k mocninám o libovolném základu a o libovolném mocniteli. Podle rovnice (g) je

$$a^b = e^{b \lg a} \text{ pro každé } a > 0 \text{ a pro každé } b. \tag{64}$$

Proto podle (59) až (61) je

$$a^r \,.\, a^s = \mathrm{e}^{r\,\lg a} \,.\, \mathrm{e}^{s\,\lg a} = \mathrm{e}^{(r+s)\lg a} = a^{r+s},$$

$$a^r : b^s = \mathrm{e}^{r\,\lg a} : \mathrm{e}^{s\,\lg a} = \mathrm{e}^{(r-s)\lg a} = a^{r-s},$$

$$(a^r)^s = (\mathrm{e}^{r\,\lg a})^s = \mathrm{e}^{rs\,\lg a} = a^{rs}.$$

Vedle toho je ještě $1^r = \mathrm{e}^{r\lg 1} = \mathrm{e}^0 = 1$ a dále

$$a^r \,.\, b^r = \mathrm{e}^{r\,\lg a} \,.\, \mathrm{e}^{r\,\lg b} = \mathrm{e}^{r\,(\lg a + \lg b)} = \mathrm{e}^{r\,\lg ab} = (ab)^r.$$

Pro mocniny definované rovnicí (64) platí tedy beze změny všecka pravidla, která platí pro počítání s mocninami, jejichž mocnitelé jsou čísla racionální. Můžeme tedy všech známých pravidel o počítání s mocninami beze změny užívat i pro mocniny s mocniteli iracionálními.

Jestliže $a^y = x$, kde $a > 0$, $a \neq 1$, y je libovolné a $x > 0$, nazýváme číslo y *logaritmem čísla x o základu a*. Zapisujeme to

$$y = \log_a x. \tag{h}$$

Rovnice (h) značí tedy přesně totéž jako rovnice

$$x = a^y, \text{ kde } a > 0,\ a \neq 1. \tag{i}$$

Utvoříme-li přirozené logaritmy na obou stranách rovnice (i), vychází

$$\lg x = y \lg a.$$

Poněvadž je $a \neq 1$, je $\lg a \neq 0$, proto $y = \lg x : \lg a$, takže

$$\log_a x = \frac{\lg x}{\lg a}. \tag{65}$$

Tím je dán přechod mezi logaritmy o základu a a logaritmy přirozenými. Dosadíme-li do rovnice (65) $x = a$, máme

$$\log_a a = \frac{\lg a}{\lg a} = 1.$$

Je tedy logaritmus základu vždy roven jedné; to byl důvod, proč jsme číslo e, které má tu vlastnost, že $\lg \mathrm{e} = 1$, nazvali základem přirozených logaritmů. Pro praktické počítání se užívá nejčastěji logaritmů o základu 10, které se nazývají dekadické. Dekadický logaritmus čísla a označujeme zpravidla znakem $\log a$. Pro diferenciální a integrální počet však vyhovují lépe logaritmy přirozené, neboť, jak ještě uvidíme, mnohé vzorce pro logaritmy přirozené jsou jednodušší než pro logaritmy o jiném základu.

Odvodíme si ještě derivace některých dalších funkcí. Je-li $f(x) = x^n$, kde n je libovolné číslo a $x > 0$, pak $f(x) = e^{n \lg x}$; proto

$$f'(x) = e^{n \lg x} \cdot n \cdot \frac{1}{x} = n \cdot \frac{x^n}{x} = nx^{n-1},$$

takže vzorec

$$(x^n)' = nx^{n-1}, \; x > 0, \tag{66}$$

který jsme zprvu odvodili jen pro celé n a později jsme jej rozšířili i na n racionální, platí nyní pro libovolné n. Proto také vzorec

$$\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}, \; n \neq -1 \text{ v intervalu } (0, \infty) \tag{67}$$

platí i pro každé iracionální číslo $n \neq -1$.

Je-li $f(x) = a^x = e^{x \lg a}$, kde $a > 0$ je konstanta různá od 1 a x libovolné, je $f'(x) = e^{x \lg a} \cdot \lg a = a^x \cdot \lg a$, takže platí

$$(a^x)' = a^x \cdot \lg a \text{ pro každé } x \text{ a } 1 \neq a > 0. \tag{68}$$

Odtud lehko vyplývá

$$\int a^x \, dx = \frac{1}{\lg a} \cdot a^x \text{ pro } 1 \neq a > 0 \text{ v intervalu } (-\infty, \infty). \tag{69}$$

Je-li $f(x) = \log_a x = \dfrac{\lg x}{\lg a}$, je $f'(x) = \dfrac{1}{\lg a} \cdot \dfrac{1}{x}$, takže

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \lg a}, \; x > 0, \; 1 \neq a > 0. \tag{70}$$

Naše dosavadní úvahy nám ovšem nic neříkají o tom, jak se vypočtou hodnoty funkcí $\lg x$ a e^x, obecněji $\log_a x$ a a^x. Tyto hodnoty bývají sestaveny v různých tabulkách a k jejich výpočtu se užívá prostředku, o němž se v této knížce nezmiňujeme. Jsou to t. zv. nekonečné řady. O nich se lze blíže poučit třeba v knížce J. Vyšína „O nekonečných řadách", která vyšla jako 45. svazek sbírky Cesta k vědění, nebo v každé učebnici diferenciálního počtu.

Příklad 66. Stanovit derivaci funkce $f(x) = x^x$.

Tato funkce je definována pro každé $x > 0$. Je $f(x) = e^{x \lg x}$, a proto podle pravidla pro derivování funkcí složených

$$f'(x) = e^{x \lg x}\left(1 \,.\, \lg x + x \,.\, \frac{1}{x}\right) = x^x(\lg x + 1).$$

Příklad 67. Vypočísti $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\,dx.$

Vypočteme nejprve příslušnou primitivní funkci. Funkce $\dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ je spojitá pro každé x, proto daný integrál existuje. Pro každé x je $e^x > 0$. Zavedeme substituci $e^x = t$, při čemž $t > 0$. Odtud $e^x dx = dt$, takže $\displaystyle\int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\,dx = \int \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1} \,.\, \frac{dt}{t}$.

Avšak $\dfrac{t^2 - 1}{(t^2 + 1)\,t} = \dfrac{2t}{t^2 + 1} - \dfrac{1}{t}$, proto $\displaystyle\int \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1} \,.\, \frac{dt}{t} =$

$$= \int \frac{2t\,dt}{t^2 + 1} - \int \frac{dt}{t} = \lg(t^2 + 1) - \lg t = \lg \frac{t^2 + 1}{t} =$$

$= \lg(e^x + e^{-x}) + c$. Absolutní hodnoty nepíšeme, neboť $t > 0$ a také $t^2 + 1 > 0$. Je tedy celkem $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\,dx =$

$= [\lg(e^x + e^{-x})]_0^1 = \lg(e + e^{-1}) - \lg(e^0 + e^{-0}) = \lg(e + e^{-1}) - \lg 2 = \lg \dfrac{e^2 + 1}{2e}.$

Cvičení.

81. Pro čísla a, b, c platí: $1 \neq a > 0$, $1 \neq b > 0$, $1 \neq c > 0$. Dokažte: a) $\log_a b \,.\, \log_b a = 1$, b) $\log_a b \,.\, \log_b c \,.\, \log_c a = 1$, c) $\log_a c = \log_a b \,.\, \log_b c$, d) $\log_{ab} c = \dfrac{\log_a c \,.\, \log_b c}{\log_a c + \log_b c}$.

82. Dokažte: a) Je-li $0 < x_1 < x_2$ a $a > 1$, je $\log_a x_1 < \log_a x_2$ a $a^{x_1} < a^{x_2}$; b) je-li $0 < x_1 < x_2$ a $0 < a < 1$, je $\log_a x_1 > \log_a x_2$ a $a^{x_1} > a^{x_2}$.

83. a) Dokažte, že $\lg\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n \leqq 1$, $\lg\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n+1} \geqq 1$, n celé kladné. b) Odtud odvoďte, že $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n \leqq e \leqq \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$ a $e = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$. c) Dokažte, že odtud dále plyne $e^x = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n$.

84. Dokažte: a) Je-li $f(x) = \lg g(x)$, je $f'(x) = \dfrac{g'(x)}{g(x)}$ pro každé x, pro něž $g(x) > 0$. b) $\displaystyle\int \frac{g'(x)\,dx}{g(x)} = \lg|g(x)|$ ve všech intervalech, v nichž je buď $g(x) > 0$, nebo $g(x) < 0$.

85. Nalezněte derivace funkcí: a) $x \lg x - x$, b) $\lg \operatorname{tg} x$, c) $\lg x(x + 1)$, d) $\lg(x + \sqrt{x^2 + a})$, $a \neq 0$, e) $\lg \sqrt{\dfrac{1 - x}{1 + x}}$, f) $\lg \lg x$, g) $\dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$, h) $e^x(\sin x - \cos x)$, i) $x^{\sin x}$, j) $\left(\dfrac{1 + x}{1 - x}\right)^{\frac{1-x}{1+x}}$.

86. Určete primitivní funkce k funkcím: a) $\dfrac{1}{x+1}$, b) $\dfrac{x+1}{x-1}$, c) $\dfrac{1}{3x+2}$, d) $\dfrac{x^2}{x-2}$, e) $\dfrac{2x}{x^2+1}$, f) $\operatorname{tg} x$, g) $\dfrac{1}{x \lg x}$, h) $\dfrac{\lg x}{x}$, i) e^{-x}, j) $\dfrac{1}{e^x + e^{-x} + 2}$, k) $x \lg x$, l) $x^2 e^x$, m) $e^x \sin x$, n) $e^x \cos x$.

87. Racionální lomenou funkci, jejíž jmenovatel je mnohočlen prvého stupně a čitatel není konstanta, integrujeme tak, že nejprve dělíme čitatele jmenovatelem, čímž dostaneme jednak integrál mnohočlenu, jednak integrál tvaru

$\displaystyle\int \frac{k}{ax+b}\, dx$, kde a, b, k jsou konstanty, při čemž $a \neq 0$.

Určete podle toho: a) $\displaystyle\int \frac{x^3 - 3x + 4}{x}\, dx$, b) $\displaystyle\int \frac{x^2 - x + 1}{x-2}\, dx$, c) $\displaystyle\int \frac{x^4}{x-1}\, dx$, d) $\displaystyle\int \frac{x^3+2}{2x-3}\, dx$.

88. Integrál tvaru $\displaystyle\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}$, kde a, b, c jsou konstanty, při čemž $a \neq 0$, může být trojího typu:

I. Lze-li jmenovatele rozložit v součin dvou různých mnohočlenů prvního stupně (to nastane tehdy, když má rovnice $ax^2 + bx + c = 0$ dva různé kořeny r a s čili když $b^2 - 4ac > 0$), je

$$\frac{1}{ax^2 + bx + c} = \frac{1}{a(r-s)} \cdot \left(\frac{1}{x-r} - \frac{1}{x-s}\right).$$

Tím převedeme daný integrál v rozdíl dvou integrálů jednodušších.

II. Nelze-li jmenovatele rozložit v součin (to nastane tehdy, když rovnice $ax^2 + bx + c = 0$ nemá reálné kořeny čili když $b^2 - 4ac < 0$), je $ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$ a integrál převedeme substitucí $x + \frac{b}{2a} = \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a} \cdot t$ na integrál tvaru (51).

III. Je-li jmenovatel (nejvýše až na multiplikativní konstantu) druhou mocninou mnohočlenu prvního stupně (to nastane, když rovnice $ax^2 + bx + c = 0$ má dvojnásobný kořen čili když $b^2 - 4ac = 0$), je $ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ a integrál počítáme substitucí $x + \frac{b}{2a} = t$.

Jsou-li k, h konstanty, pak integrál

$$\int \frac{kx + h}{ax^2 + bx + c}\,\mathrm{d}x = \frac{k}{2a} \lg|ax^2 + bx + c| + \left(h - \frac{bk}{2a}\right) \int \frac{\mathrm{d}x}{ax^2 + bx + c}.$$

Dokažte.

Je-li čitatel vyššího stupně než prvního, dělíme nejprve čitatele jmenovatelem jako ve cvič. 87.

Podle tohoto návodu lze počítat každý integrál z racionální funkce lomené, jejímž jmenovatelem je mnohočlen druhého stupně. Vypočtěte podle toho integrály:

a) $\int \frac{5x - 4}{x^2 - 8x + 12}\,\mathrm{d}x$, b) $\int \frac{x^4\,\mathrm{d}x}{4x^2 - 1}$,

c) $\int \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{x^2 - 5x + 4}$, d) $\int \frac{(x + 1)\,\mathrm{d}x}{3x^2 - x - 2}$,

e) $\int \frac{x^2 + 1}{5x - 2x^2}\,\mathrm{d}x$, f) $\int \frac{\mathrm{d}x}{3x^2 - 4x + 7}$, g) $\int \frac{x^3 + 1}{x^2 + 4}\,\mathrm{d}x$,

h) $\displaystyle\int \frac{(x+5)\,\mathrm{d}x}{x^2+2x+7}$, i) $\displaystyle\int \frac{(4x+3)\,\mathrm{d}x}{(x-3)^2}$,

j) $\displaystyle\int \left(\frac{x-2}{x+1}\right)^2 \mathrm{d}x.$

89. Integrály tvaru $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$, kde a, b, c jsou konstanty, při čemž $a \neq 0$ a $b^2 - 4ac \neq 0$, jsou dvojího typu. Platí

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

I. Je-li $a > 0$, převádíme je na tvar udaný vzorcem (58) substitucí $x + \dfrac{b}{2a} = t$.

II. Je-li $a < 0$, převádíme je na tvar (50) substitucí $x + \dfrac{b}{2a} = \dfrac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{-2a} \cdot t$. Při tom je vždy $b^2 > 4ac$; proč?

Jsou-li k, h konstanty, pak

$$\int \frac{kx+h}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,\mathrm{d}x = \frac{k}{a}\sqrt{ax^2+bx+c} + \left(h - \frac{bk}{2a}\right)\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

Dokažte a počítejte podle toho integrály:

a) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+4x+13}}$, b) $\displaystyle\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2-2x}}\,\mathrm{d}x$,

c) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2x^2+3x-5}}$, d) $\displaystyle\int \sqrt{\frac{x-1}{2x-3}}\,\mathrm{d}x$,

e) $\displaystyle\int \frac{x+1}{\sqrt{2x^2+x-3}}\,dx$, f) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{8-5x-3x^2}}$,

g) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x(4-x)}}$, h) $\displaystyle\int \frac{2x-1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$, i) $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{4-3x-x^2}}$.

j) $\displaystyle\int \sqrt{\frac{3-x}{2+x}}\,dx$.

90. Methodou částečné in tegrace dokažte, že

$$\int \sqrt{ax^2+bx+c}\,dx = \frac{1}{4a}(2ax+b)\sqrt{ax^2+bx+c} - \\ - \frac{b^2-4ac}{8a}\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

Počítejte podle toho a) $\int \sqrt{x^2+3x-4}\,dx$,
b) $\int \sqrt{x^2+x+1}\,dx$, c) $\int \sqrt{x(1-x)}\,dx$.

X. UŽITÍ INTEGRÁLŮ

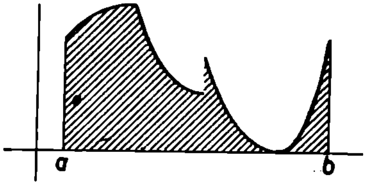
Integrální počet má velmi četné použití v praxi; na tomto místě si však všimneme pouze dvou jeho aplikací důležitých v geometrii, a to obsahu rovinných oborů a délky rovinné čáry.

Budiž dána funkce $f(x)$, definovaná v jistém uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$, která má tu vlastnost, že v celém intervalu $\langle a, b\rangle$ je $f(x) \geqq 0$. Vezměme v úvahu množinu všech bodů v rovině, jejichž souřadnice x, y vyhovují nerovnostem $a \leqq x \leqq b$, $0 \leqq y \leqq f(x)$ (obr. 66, v němž je tato množina naznačena šrafováním). Tuto množinu budeme nazývat *plocha* a přiřadíme jí určité číslo P, které budeme nazývat *obsah plochy*. Z důvodů, které za chvíli vyložíme, budeme definovat

$$P = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x, \tag{71}$$

pokud ovšem tento integrál existuje.

V elementární geometrii se hovoří o obsazích některých ploch, na př. obdélníka, trojúhelníka atd. Nyní jsme obsah



Obr. 66

plochy definovali novým způsobem; je ovšem třeba ukázat, že tato nová definice je ve shodě s definicí plochy zavedené v elementární geometrii. V elementární geometrii vycházíme z těchto jednoduchých zákonů:

1. Obsah plochy není nikdy záporný.

2. Plocha, která vznikne složením dvou ploch s obsahy P_1 a P_2, má obsah $P_1 + P_2$.

3. Leží-li celá plocha obsahu P_1 uvnitř plochy obsahu P_2, je $P_1 \leqq P_2$.

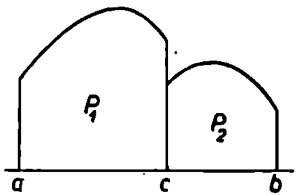
4. Obsah obdélníka o rozměrech z, v je zv.

Naše definice (71) těmto požadavkům vyhovuje:

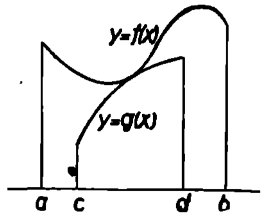
1. $f(x) \geqq 0$ pro každé x z $\langle a, b\rangle$; proto podle věty 34 je $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqq \int_a^b 0\,\mathrm{d}x = 0$.

2. Podle důsledku 1 věty 35 je $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$, kde $a < c < b$. Je tedy obsah plochy, která

vznikla složením dvou ploch o obsazích $P_1 = \int_a^c f(x)\,dx$ a $P_2 = \int_c^b f(x)\,dx$, vskutku roven součtu $P_1 + P_2$ (obr. 67).



Obr. 67



Obr. 68

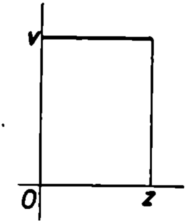
3. Jestliže plocha o obsahu $P_1 = \int_c^d g(x)\,dx$ leží celá uvnitř plochy o obsahu $P_2 = \int_a^b f(x)\,dx$ (obr. 68), je jednak $a \leqq c < < d \leqq b$ a jednak $f(x) \geqq g(x)$ pro každé x z $\langle c, d\rangle$. Je-li $a < c$ nebo $d < b$, položíme ještě $g(x) = 0$ pro každé x z intervalu $\langle a, c)$ a z intervalu $(d, b\rangle$; pak je $f(x) \geqq g(x)$ pro každé x z $\langle a, b\rangle$. Podle důsledku 1 věty 35 platí

$$\int_a^b f(x)\,dx \geqq \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^c g(x)\,dx + \int_c^d g(x)\,dx +$$
$$+ \int_d^b g(x)\,dx = \int_c^d g(x)\,dx,$$

neboť $\int_a^c g(x)\,dx = 0$, $\int_d^b g(x)\,dx = 0$.

4. Jde-li o obdélník o rozměrech z, v, je $f(x) = v$ pro každé x z intervalu $\langle 0, z\rangle$ (obr. 69), takže $P = \int_0^z v\,dx = vz$.

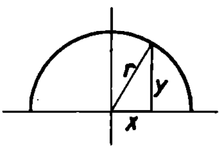
Tím můžeme považovat výklad o obsahu plochy za skončený; jde jen o to, abychom ještě objasnili, proč jsme k definici obsahu plochy volili právě rovnici (71) a žádnou jinou. Všimneme-li si geometrického významu horního součtu (viz obr. 50), vidíme, že plocha, jejíž obsah chceme vyjádřit, leží celá uvnitř plochy, jejíž obsah je vyjádřen horním součtem. Podobně plocha, jejíž obsah je vyjádřen dolním součtem (viz obr. 51), leží celá uvnitř plochy, jejíž obsah chceme stanovit. Proto podle našeho zákona 3 platí pro každé rozdělení D intervalu $\langle a, b\rangle$



Obr. 69

$$S(D) \geqq P \geqq s(D).$$

To tedy značí, že P není nikdy větší než infimum horních součtů a současně není menší než supremum dolních součtů. Existuje-li integrál funkce f od a do b, musí tedy být tento integrál roven obsahu P.



Obr. 70

Příklad 68. Vypočísti obsah půlkruhu o poloměru r (obr. 70).

Jsou-li x, y souřadnice libovolného bodu na půlkružnici o poloměru r, platí $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, a proto podle (71) je

$$P = \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\,\mathrm{d}x. \text{ Položíme-li } x = rt,\ \mathrm{d}x = r\,\mathrm{d}t, \text{ je}$$

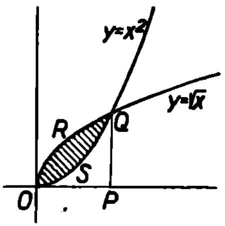
$$P = r^2\int_{-1}^{1}\sqrt{1 - t^2}\,\mathrm{d}t = \tfrac{1}{2}r^2[\arcsin t + t\sqrt{1 - t^2}]_{-1}^{1} = \tfrac{1}{2}\pi r^2$$

(viz příklad 59).

Příklad 69. Stanovit obsah plochy omezené oblouky křivek $y = x^2$ a $y = \sqrt{x}$ (obr. 71).

Obě křivky se protínají jednak v počátku, jednak v bodě o souřadnicích 1, 1. Jde vlastně o rozdíl ploch $OPQR$ a $OPQS$. Plocha $OSQR$, která je omezena oběma křivkami, je

$$P = \int_0^1 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x - \int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = [\tfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \tfrac{1}{3}x^3]_0^1 = \tfrac{1}{3}.$$



Obr. 71

Nyní se obrátíme k délce oblouku. V elementární geometrii se hovoří o délce úsečky. Jsou-li x_1, y_1 souřadnice jednoho krajního bodu P_1 a x_2, y_2 souřadnice druhého krajního bodu P_2 úsečky, jejíž délku označíme P_1P_2, pak $P_1P_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$. Jsou-li P_1, P_2, P_3 tři libovolné body, snadno dokážeme, že platí $P_1P_2 + P_2P_3 \geqq P_1P_3$. Souřadnice daných bodů označme x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3; máme dokázat, že

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} + \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2} \geqq \geqq \sqrt{(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2}.$$

Pro stručnost položme $x_2 - x_1 = a_1$, $y_2 - y_1 = b_1$, $x_3 - x_2 = a_2$, $y_3 - y_2 = b_2$. Pak je $x_3 - x_1 = a_1 + a_2$, $y_3 - y_1 = b_1 + b_2$. Máme tedy dokázat, že pro libovolná čísla a_1, a_2, b_1, b_2 je

$$\sqrt{a_1^2 + b_1^2} + \sqrt{a_2^2 + b_2^2} \geqq \sqrt{(a_1 + a_2)^2 + (b_1 + b_2)^2}.$$

Na obou stranách této nerovnosti jsou nezáporná čísla. Nerovnost bude zcela jistě splněna tehdy, když bude splněna nerovnost, která vznikne, když obě strany umocníme na druhou.

Tím dostaneme

$$a_1^2 + b_1^2 + 2\sqrt{(a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2)} + a_2^2 + b_2^2 \geqq (a_1 + a_2)^2 + (b_1 + b_2)^2$$

čili po úpravě

$$\sqrt{(a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2)} \geqq a_1a_2 + b_1b_2.$$

Na levé straně je nezáporné číslo; tato nerovnost bude zcela jistě splněna, bude-li

$$\sqrt{(a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2)} \geqq |a_1a_2 + b_1b_2|,$$

a tato podmínka bude opět splněna, bude-li splněna nerovnost vzniklá novým umocněním obou stran na druhou

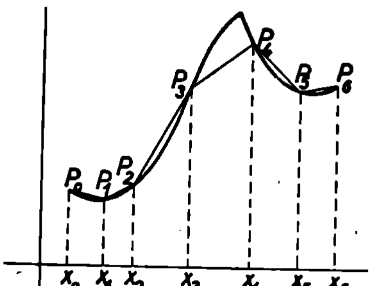
$$(a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2) \geqq a_1^2a_2^2 + 2a_1a_2b_1b_2 + b_1^2b_2^2.$$

Tuto nerovnost lze upravit na tvar

$$(a_1b_2 - a_2b_1)^2 \geqq 0,$$

což však je splněno vždy. Tím je naše tvrzení dokázáno.

Budiž nyní dána funkce $f(x)$ spojitá v intervalu $\langle a, b\rangle$. Vezmeme v úvahu množinu bodů o souřadnicích x, y, které



Obr. 72

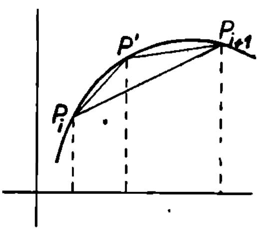
vyhovují podmínkám $a \leqq x \leqq b$, $y = f(x)$. Tuto množinu budeme nazývat *křivka.* Předpoklad o spojitosti funkce f v intervalu $\langle a, b\rangle$ jsme učili proto, aby takto definovaná množina bodů odpovídala tomu, co se v běžném životě označuje názvem křivka. Sestrojme nyní libovolné rozdělení D

intervalu $\langle a, b \rangle$ s dělicími body $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < < x_{n-1} < x_n = b$, jako jsme to dělali v kapitole V. Dále sestrojme na naší křivce body $P_0, P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}, P_n$, odpovídající hodnotám proměnné $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n$ (viz obr. 72, který je sestrojen pro $n = 6$), a sestrojme lomenou čáru $P_0P_1P_2 \ldots P_{n-1}P_n$. Délkou této lomené čáry budeme rozumět součet délek úseček $P_0P_1, P_1P_2, \ldots, P_{n-1}P_n$, t. j. výraz

$$L(D) = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + [f(x_1) - f(x_0)]^2} + \\ + \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + [f(x_2) - f(x_1)]^2} + \ldots + \\ + \sqrt{(x_n - x_{n-1})^2 + [f(x_n) - f(x_{n-1})]^2}.$$

Pro různá rozdělení D dostáváme různá čísla $L(D)$.

Především je vidět toto: Je-li D' zjemněním rozdělení D, pak $L(D') \geqq L(D)$. To je zřejmé, uvědomíme-li si, že rozdělení D' vznikne z rozdělení D přidáním dalších dělicích bodů. Přidáme-li mezi dva body x_i, x_{i+1} rozdělení D další dělicí bod x' tak, že $x_i < x' < x_{i+1}$, vznikne nová lomená čára, jejíž délka se liší od délky $L(D)$ jen tím, že mezi body P_i, P_{i+1} je přidán další bod P' (obr. 73), a my jsme před chvilkou dokázali, že $P_iP' + P'P_{i+1} \geqq P_iP_{i+1}$. Totéž platí pro přidávání dalších dělicích bodů, takže je vskutku $L(D') \geqq L(D)$.



Obr. 73

To nás vede k této definici: Je-li množina všech čísel $L(D)$ omezená, nazveme její supremum *délkou oblouku* naší křivky mezi body P_0 a P_n.

Dokážeme nyní větu:

Věta **48**. Je-li $f(x)$ funkce spojitá v intervalu $\langle a, b \rangle$, která má derivaci ve všech vnitřních bodech tohoto intervalu, a existuje-li integrál

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx, \tag{72}$$

pak křivka $y = f(x)$ mezi body o souřadnicích $a, f(a)$ a $b, f(b)$ má délku oblouku rovnou integrálu (72). Při tom $f'^2(x)$ značí totéž jako $[f'(x)]^2$.

Důkaz. Napřed poněkud upravíme výraz pro $L(D)$. Vezměme si k-tý dílčí interval $\langle x_{k-1}, x_k \rangle$ rozdělení D. Protože funkce f má podle předpokladu derivaci ve všech vnitřních bodech intervalu $\langle a, b \rangle$, a tedy také ve všech vnitřních bodech intervalu $\langle x_{k-1}, x_k \rangle$, a protože je spojitá v bodech x_{k-1}, x_k, jsou splněny předpoklady věty o přírůstku funkce (věta 31), a pak v intervalu $\langle x_{k-1}, x_k \rangle$ existuje takový vnitřní bod ξ_k, při čemž $x_{k-1} < \xi_k < x_k$, že $f(x_k) - f(x_{k-1}) = (x_k - x_{k-1}) \cdot f'(\xi_k)$. Je tedy k-tý člen součtu $L(D)$

$$\sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + [f(x_k) - f(x_{k-1})]^2} = \Delta x_k \cdot \sqrt{1 + f'^2(\xi_k)},$$

při čemž jsme zavedli obvyklé označení $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$. Označme dále $\sqrt{1 + f'^2(x)} = g(x)$, takže můžeme psát

$$L(D) = g(\xi_1) \cdot \Delta x_1 + g(\xi_2) \cdot \Delta x_2 + \ldots + g(\xi_n) \cdot \Delta x_n.$$

Z existence integrálu L plyne, že funkce $g(x)$ je omezená v intervalu $\langle a, b \rangle$, a tedy v k-tém dílčím intervalu $\langle x_{k-1}, x_k \rangle$ má určité supremum M_k a určité infimum m_k; při tom zcela jistě

$$m_k \leqq g(\xi_k) \leqq M_k.$$

Násobíme-li tuto nerovnost číslem Δx_k, které je kladné, a provedeme-li to pro všechny dílčí intervaly a všecky takto vzniklé nerovnosti sečteme, dostaneme

$$s(D) \leqq L(D) \leqq S(D),$$

kde $s(D) = m_1 \cdot \Delta x_1 + m_2 \cdot \Delta x_2 + \ldots + m_n \cdot \Delta x_n$ je dolní součet příslušný k funkci $g(x)$ a k rozdělení D a $S(D) =$

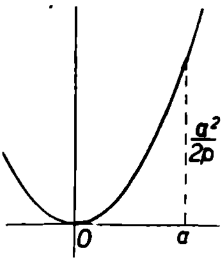
$= M_1 \,.\, \Delta x_1 + M_2 \,.\, \Delta x_2 + \ldots + M_n \,.\, \Delta x_n$ je horní součet příslušný k téže funkci a k témuž rozdělení. Protože dále podle předpokladu funkce $g(x) = \sqrt{1 + f'^2(x)}$ má integrál L od a do b, který je podle své definice supremem dolních součtů $s(D)$ a zároveň infimem horních součtů $S(D)$ (str. 89), musí platit

$$L \geqq s(D),\ L \leqq S(D) \text{ pro každé rozdělení } D.$$

Označíme-li dále K supremum množiny čísel $L(D)$, platí

$$K \geqq L(D) \text{ pro každé rozdělení } D.$$

To však znamená, že $K \geqq s(D)$ pro každé rozdělení D, a tedy také $K \geqq L$, neboť supremum množiny dolních součtů nemůže být větší než K. Kdyby totiž bylo $K < L$, existovalo by takové rozdělení D_1, pro něž by bylo $K < s(D_1)$, neboť L je supremum množiny dolních součtů, ale to není možné. S druhé strany však není možné, aby $K > L$. Kdyby tomu tak bylo, muselo by existovat takové rozdělení D_2, že $K > S(D_2)$, vzhledem k tomu, že L je infimum množiny horních součtů $S(D)$. Pak by však také muselo existovat takové rozdělení D_3, že $L(D_3) > S(D_2)$, vzhledem k tomu, že K je supremum množiny všech $L(D)$. Utvoříme-li nyní společné zjemnění D_4 obou rozdělení D_2 a D_3, je jednak $S(D_4) \leqq S(D_2)$ (viz str. 87), jednak $L(D_4) \geqq L(D_3)$ (str. 176), takže $L(D_4) > S(D_4)$, ale to není možné. Musí tedy být $K = L$ a to jsme měli dokázat.



Obr. 74

Příklad 70. Vypočísti délku oblouku paraboly $y = \dfrac{x^2}{2p}$, kde $p > 0$, od počátku, jenž je vrcholem paraboly, do bodu o souřadnicích a, $\dfrac{a^2}{2p}$ ($a > 0$, obr. 74).

Podle vzorce (72) je

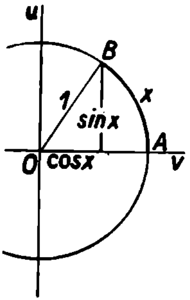
$$L = \int_0^a \sqrt{1 + \frac{x^2}{p^2}}\, dx = \frac{1}{p} \int_0^a \sqrt{p^2 + x^2}\, dx,$$

neboť $y' = \frac{x}{p}$. Integrujeme methodou per partes Položíme $\sqrt{p^2 + x^2} = u$, $v' = 1$; pak je $u' = \frac{x}{\sqrt{p^2 + x^2}}$, $v = x$, takže $L = \frac{1}{p}\,[x\sqrt{p^2 + x^2}]_0^a - \frac{1}{p}\int_0^a \frac{x^2\, dx}{\sqrt{p^2 + x^2}}$. Ježto $x^2 = p^2 + x^2 - p^2$, je $\int_0^a \frac{x^2\, dx}{\sqrt{p^2 + x^2}} = \int_0^a \sqrt{p^2 + x^2}\, dx - p^2 \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{p^2 + x^2}}$.

Avšak podle vzorce (58) je $\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{p^2 + x^2}} = [\lg(x + \sqrt{p^2 + x^2})]_0^a = \lg \frac{a + \sqrt{p^2 + a^2}}{p}$ (absolutní hodnotu nepíšeme vzhledem k významu čísel x, a, p). Je tedy $L = \frac{a}{p} \cdot \sqrt{p^2 + a^2} - L + p \lg \frac{a + \sqrt{p^2 + a^2}}{p}$ a odtud vyplývá

$$L = \frac{a}{2p} \sqrt{p^2 + a^2} + \frac{p}{2} \lg \frac{a + \sqrt{p^2 + a^2}}{p}.$$

Nyní toho umíme již tolik, že můžeme přikročit k tomu, abychom doplnili úvahy o funkcích sinus a kosinus, které jsme před časem založili na názoru, nestarajíce se příliš o přesný význam užívaných pojmů. Provedeme tedy znovu výklad podaný v kapitole I. Tam jsme měli kružnici o poloměru 1, zvolili jsme na ní bod A a od tohoto bodu jsme nanesli oblouk dané délky x (směrem nahoru jsme jej měřili kladně, směrem dolů záporně). Tím jsme dospěli k bodu B, jehož souřadnice u, v jsme označili názvy $\sin x$, $\cos x$ (obr. 75). Aby každému u odpovídalo jen jediné x, omezíme se (prozatím) jen na pravou polokružnici, při čemž budeme považovat v za funkci souřadnice u. Jak známo, je



Obr. 75

$$v = \sqrt{1 - u^2}, \text{ kde } -1 \leqq u \leqq 1. \qquad \text{(a)}$$

Vyjádříme tedy oblouk x pomocí souřadnice u. Derivováním dostáváme pro $|u| < 1$

$$v' = \frac{-u}{\sqrt{1 - u^2}}, \quad 1 + v'^2 = 1 + \frac{u^2}{1 - u^2} = \frac{1}{1 - u^2},$$

takže

$$\sqrt{1 + v'^2} = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2}}.$$

Pak podle vzorce (72) je

$$x = \int_0^u \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}}, \quad \text{pokud } -1 < u < 1; \qquad \text{(b)}$$

při tom jsme integrační proměnnou označili písmenem t, aby nedošlo k nedorozumění. Integrál na pravé straně rovnice (b) existuje, neboť funkce $\frac{1}{\sqrt{1 - t^2}}$ je spojitá v intervalu $(-1, 1)$ (věta 33); rovnice (b) tedy definuje jakousi funkci proměnné u, kterou označme třeba $A(u)$ (za chvíli se ovšem ukáže, že to je naše známá funkce $\arcsin u$) a která je definována v intervalu $(-1, 1)$.

Poněvadž existuje integrál (b) pro každé u z intervalu $(-1, 1)$, je funkce $A(u)$ spojitá v intervalu $(-1, 1)$ (věta 37). Poněvadž dále funkce $\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}$ je spojitá v intervalu $(-1, 1)$, je $A'(u) = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}$ pro každé u, pro něž $-1 < u < 1$ (věta 38). Dále platí

$$A(-u) = -A(u), \tag{c}$$

neboť substitucí $t = -z$, $\mathrm{d}t = -\mathrm{d}z$, dostáváme

$$A(-u) = \int_0^{-u} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} = -\int_0^{u} \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{1-z^2}} = -A(u).$$

Zřejmě je $A(0) = 0$.

Nyní dokážeme, že funkce $A(u)$ je rostoucí v intervalu $(-1, 1)$. Je-li předně $0 \leqq u_1 < u_2, < 1$, je

$$\int_0^{u_2} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} = \int_0^{u_1} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} + \int_{u_1}^{u_2} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}.$$

Avšak pro každé t, které vyhovuje podmínce $0 \leqq u_1 \leqq t \leqq \leqq u_2$, je $t^2 \geqq u_1^2$, takže také $\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}} \geqq \dfrac{1}{\sqrt{1-u_1^2}}$. Proto podle věty 34 je

$$\int_{u_1}^{u_2} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} \geqq \frac{1}{\sqrt{1-u_1^2}} \int_{u_1}^{u_2} \mathrm{d}t = \frac{u_2 - u_1}{\sqrt{1-u_1^2}} > 0,$$

takže

$$\int_0^{u_2} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} > \int_0^{u_1} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}.$$

Tím jsme dokázali:

Z nerovností $0 \leqq u_1 < u_2 < 1$ plyne $A(u_1) < A(u_2)$. (d)

Speciálně pro $u > 0$ je $A(u) > A(0)$ čili $A(u) > 0$.

Je-li za druhé $u_1 < 0$, $u_2 \geqq 0$, je podle (c) $A(u_1) = -A(-u_1)$, při čemž $-u_1 > 0$, takže podle (d) je $A(-u_1) > 0$, $-A(u_1) > 0$, $A(u_1) < 0$. Vedle toho je $A(u_2) \geqq 0$, takže zase z nerovnosti $u_1 < u_2$ plyne $A(u_1) < A(u_2)$.

Je-li za třetí $-1 < u_1 < u_2 < 0$, je $1 > -u_1 > -u_2 > 0$. Proto podle (d) je $A(-u_1) > A(-u_2)$ čili podle (c) $-A(u_1) > -A(u_2)$, t. j. $A(u_1) < A(u_2)$. Je tedy funkce $A(u)$ rostoucí v intervalu $(-1, 1)$.

Funkce $A(u)$ je v intervalu $(-1, 1)$ omezená, jak plyne z této úvahy: Je li $0 \leqq t < 1$, je $t^2 \leqq t$, takže $\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}} \leqq \dfrac{1}{\sqrt{1-t}}$; proto podle věty 34 pro $u > 0$

$$A(u) = \int_0^u \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \leqq \int_0^u \frac{dt}{\sqrt{1-t}}.$$

Tento poslední integrál dovedeme však spočítat substitucí $1 - t = z$, $dt = -dz$, takže

$$\int_0^u \frac{dt}{\sqrt{1-t}} = -\int_1^{1-u} \frac{dz}{\sqrt{z}} = \int_{1-u}^1 \frac{dz}{\sqrt{z}} =$$
$$= [2z^{\frac{1}{2}}]_{1-u}^1 = 2(1 - \sqrt{1-u}) < 2.$$

Je tedy $0 \leqq A(u) \leqq 2(1 - \sqrt{1-u}) < 2$ pro každé u, které vyhovuje podmínkám $0 \leqq u < 1$.

Označme ω supremum funkce $A(u)$ v intervalu $\langle 0, 1)$. Pro žádné u, pro něž platí $0 \leqq u < 1$, nemůže být $A(u) = \omega$, neboť A je funkce rostoucí v intervalu $(-1, 1)$, a tedy také v intervalu $\langle 0, 1)$. Kdyby bylo $A(u) = \omega$, pak by pro každé u_1, pro které platí $u < u_1 < 1$ (a takové u_1 jistě existuje, neboť interval $\langle 0, 1)$ je zprava otevřený), muselo být $A(u_1) > > \omega$, ale to není možné, neboť ω je supremum všech hodnot $A(u)$ v intervalu $\langle 0, 1)$. Z toho plyne, že $\lim\limits_{u\to 1-} A(u) = \omega$. Můžeme tedy definici funkce $A(u)$ doplnit také pro $u = 1$ hodnotou $A(1) = \omega$. Tím se funkce A stává spojitou zleva v bodě $u = 1$. Podobně položíme také $A(-1) = -\omega$, čímž se funkce A stane spojitou zprava v bodě -1.

Podle svého významu značí číslo ω délku oblouku čtvrtiny kružnice o poloměru 1. Toto číslo budeme označovat, jak je všeobecným zvykem, znakem $\frac{1}{2}\pi$ místo ω. Je tedy

$$\tfrac{1}{2}\pi = A(1) = \lim_{u\to 1-} \int_0^u \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1 - t^2}}$$

a je možno vypočítat, že $\pi = 3{,}14159265358979\ldots$

Máme tedy dokázáno: Funkce $x = A(u)$ je spojitá a rostoucí v intervalu $\langle -1, 1\rangle$, při čemž $A(1) = \frac{1}{2}\pi$, $A(-1) = = -\frac{1}{2}\pi$. Proto existuje k funkci $A(u)$ funkce inversní, která je rovněž spojitá a rostoucí v intervalu $\langle -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi\rangle$ (věta 44). Tuto inversní funkce nazýváme, jak jsme již řekli, $\sin x$.

Rovnice $u = \sin x$, kde $-\frac{1}{2}\pi \leqq x \leqq \frac{1}{2}\pi$, říká tedy přesně totéž jako rovnice $x = A(u)$, kde $-1 \leqq u \leqq 1$. Pro každé takové u je $A(-u) = -A(u)$ podle (c), při čemž také $-1 \leqq -u \leqq 1$. Je-li tedy $x = A(u)$ čili $u = \sin x$, je $-x = = A(-u)$ čili $-u = \sin(-x)$. Proto

$$\sin(-x) = -\sin x.$$

Poněvadž dále $A(0) = 0$, $A(1) = \frac{1}{2}\pi$, $A(-1) = -\frac{1}{2}\pi$, proto

$$\sin 0 = 0,\ \sin\tfrac{1}{2}\pi = 1,\ \sin(-\tfrac{1}{2}\pi) = -1.$$

Počítejme derivaci funkce $\sin x$ v bodě x. Podle věty 45 je

$$(\sin x)' = \frac{1}{A'(u)} = \sqrt{1 - u^2} = \sqrt{1 - \sin^2 x}.$$

Funkci $\sqrt{1 - \sin^2 x}$ proměnné x, kde x je z intervalu $\langle -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi\rangle$, označme $\cos x$; je tedy

$$(\sin x)' = \cos x.$$

Poněvadž funkce $\sin x$ je spojitá v intervalu $\langle -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi\rangle$, je v tomto intervalu spojitá i funkce $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$. Dále je podle pravidla o derivování složených funkcí

$$(\cos x)' = (\sqrt{1 - \sin^2 x})' = \frac{-\sin x}{\sqrt{1 - \sin^2 x}} \cdot \cos x = -\sin x.$$

Vedle toho $\cos(-x) = \sqrt{1 - \sin^2(-x)} = \sqrt{1 - \sin^2 x} = \cos x$ a dále $\cos 0 = \sqrt{1 - \sin^2 0} = 1$, $\cos\frac{1}{2}\pi = \cos(-\frac{1}{2}\pi) = \sqrt{1 - 1} = 0$. Podle rovnice (a) je zřejmé, že $\cos x = v$ čili že $\cos x$ je druhá souřadnice bodu B, jehož jedna souřadnice je $\sin x$.

Prozatím máme definovány hodnoty funkcí $\sin x$ a $\cos x$ pouze v oboru $\langle -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi\rangle$. Nyní rozšíříme definici těchto funkcí na každé x takto:

Pro každé x nechť platí

$$\sin x = -\sin(x + \pi), \quad \cos x = -\cos(x + \pi). \tag{e}$$

Tím jsou naše funkce definovány pro každé x. Je-li totiž x libovolné číslo, můžeme vždy z něho dostat přičtením nebo odečtením vhodného celistvého násobku čísla π takové číslo z, které padne do intervalu $\langle -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi\rangle$, při čemž $x + k\pi = z$, kde k je celé číslo. Pak platí

$$\sin x = \sin z, \quad \cos x = \cos z, \quad \text{je-li } k \text{ sudé,}$$
$$\sin x = -\sin z, \quad \cos x = -\cos z, \quad \text{je-li } k \text{ liché.}$$

Ve zvláštním případě pro $k = 2$ je

$$\sin(x + 2\pi) = \sin x, \quad \cos(x + 2\pi) = \cos x$$

a to znamená, že funkce $\sin x$ i $\cos x$ jsou periodické s periodou 2π.

Odvodíme dále: Platí-li

$$(\sin x)' = \cos x, \quad (\cos x)' = -\sin x \tag{f}$$

pro nějaké x, platí tytéž vztahy i pro $x + \pi$. Vskutku je

$$[\sin(x + \pi)]' = (-\sin x)' = -(\sin x)' = -\cos x = \\ = \cos(x + \pi),$$

$$[\cos(x + \pi)]' = (-\cos x)' = -(\cos x)' = -(-\sin x) = \\ = -\sin(x + \pi).$$

Protože vzorce (f) platily pro každé x z intervalu $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$, platí vůbec pro každé x s výjimkou hodnot $x = \frac{1}{2}\pi + k\pi$, kde k je celé. Nalezené vzorce však platí i pro tyto vyloučené hodnoty, neboť pro jednostranné derivace v bodě $x = \frac{1}{2}\pi$ máme

$$(\sin x)'_{x=\frac{1}{2}\pi-} = \lim_{x\to\frac{1}{2}\pi-} (\sin x)' = \lim_{x\to\frac{1}{2}\pi-} \cos x = \cos\tfrac{1}{2}\pi,^{*)}$$

$$(\sin x)'_{x=\frac{1}{2}\pi+} = \lim_{x\to\frac{1}{2}\pi+} (\sin x)' = \lim_{x\to\frac{1}{2}\pi+} \cos x = -\lim_{x\to-\frac{1}{2}\pi+} \cos x = \\ = -\cos(-\tfrac{1}{2}\pi) = \cos\tfrac{1}{2}\pi;$$

$$(\cos x)'_{x=\frac{1}{2}\pi-} = \lim_{x\to\frac{1}{2}\pi-} (\cos x)' = \lim_{x\to\frac{1}{2}\pi-} (-\sin x) = -\sin\tfrac{1}{2}\pi,$$

$$(\cos x)'_{x=\frac{1}{2}\pi+} = \lim_{x\to\frac{1}{2}\pi+} (\cos x)' = \lim_{x\to\frac{1}{2}\pi+} (-\sin x) = \lim_{x\to-\frac{1}{2}\pi+} \sin x = \\ = \sin(-\tfrac{1}{2}\pi) = -\sin\tfrac{1}{2}\pi.$$

Protože derivace zleva v bodě $\frac{1}{2}\pi$ je rovna derivaci zprava, existuje derivace v bodě $\frac{1}{2}\pi$, při čemž je

$$(\sin x)'_{x=\frac{1}{2}\pi} = \cos\tfrac{1}{2}\pi, \quad (\cos x)'_{x=\frac{1}{2}\pi} = -\sin\tfrac{1}{2}\pi.$$

---

*) $(\sin x)'_{x=\frac{1}{2}\pi-}$ značí derivaci zleva funkce $\sin x$ v bodě $\frac{1}{2}\pi$ atd.; podobně dále $(\sin x)'_{x=\frac{1}{2}\pi}$ značí derivaci funkce $\sin x$ v bodě $\frac{1}{2}\pi$.

Platí tedy vzorce (f) bez jakékoli výjimky.

Utvořme nyní funkci proměnné x

$$F(x) = [\sin(x + y) - \sin x \cos y - \cos x \sin y]^2 + \\ + [\cos(x + y) - \cos x \cos y + \sin x \sin y]^2,$$

kde y je libovolná konstanta. Derivace této funkce podle proměnné x je

$$F'(x) = 2[\sin(x + y) - \sin x \cos y - \cos x \sin y][\cos(x + y) - \\ - \cos x \cos y + \sin x \sin y] + 2[\cos(x + y) - \cos x \cos y + \\ + \sin x \sin y][- \sin(x + y) + \sin x \cos y + \cos x \sin y] = 0.$$

To však znamená, že $F(x) = c$ pro každé x, kde c je konstanta (důsledek věty 31). Abychom spočetli toto c, dosadíme za x kteroukoli hodnotu, třeba $x = 0$. Pak je $F(0) = (\sin y - \sin y)^2 + (\cos y - \cos y)^2 = 0$. Je tedy $F(x) = 0$ pro každé x. Avšak $F(x)$ je součet dvou druhých mocnin. Ten se může rovnat nule jen tehdy, když se rovnají nule oba základy, t. j. když

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y,$$
$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y.$$

Odtud již můžeme odvodit všecky další výsledky z kapitoly I.

Ještě nám zbývá dokázat vzorec (20) z kapitoly III. Ten však již dokážeme snadno. Je-li $x > 0$, označme J interval $\langle 0, x\rangle$; je-li $x < 0$, označme J interval $\langle x, 0\rangle$. V intervalu J jsou splněny předpoklady věty 31 o přírůstku funkce, proto v něm existuje takový vnitřní bod ξ, že

$$\sin x - \sin 0 = (x - 0) \,.\, (\sin x)'_{x=\xi},$$

neboli

$$\frac{\sin x}{x} = \cos \xi.$$

Jestliže se x blíží k nule, blíží se k nule také ξ, proto

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{\xi \to 0} \cos \xi = 1,$$

neboť pravá strana naší rovnice má limitu; musí ji mít tedy také levá strana a obě tyto limity se musí navzájem rovnat.

Nalezené funkce $\sin x$ a $\cos x$ mají všecky vlastnosti, které mají funkce zavedené v kapitole I. Jsou to tedy tytéž funkce. Proto i pomocná funkce $A(u)$ je inversní funkce k funkci $\sin x$, t. j. $A(u) = \arcsin u$, jak jsme již na počátku napověděli. Tím jsou odstraněny všecky pochybnosti, které jsme vyslovili v kapitole I a III.

Také zde jsme dokázali pouze existenci funkcí $\sin x$ a $\cos x$ a nezabývali jsme se otázkou, jak se vypočtou hodnoty těchto funkcí. K tomu se nejlépe hodí opět nekonečné řady, jejichž výklad však nespadá do rámce této knížky.

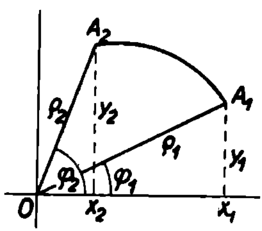
Cvičení.

91. Stanovte obsah plochy omezené a) jednou polovlnou křivky $y = \sin x$ a osou x, b) obloukem křivky $y = x^n$, osou x a přímkou $x = 1$ $(n > 0)$, c) elipsou o poloosách a, b, jež má rovnici $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, d) obloukem hyperboly $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$, osou x a přímkami $x = x_1$, $x = x_2$; při tom $a \leqq x_1 < x_2$ a celá plocha leží nad osou x.

92. Vypočtěte obsah plochy společné dvěma shodným soustředným elipsám o poloosách a, b, z nichž jedna vznikne z druhé otočením o pravý úhel.

93. Vypočtěte obsah plochy omezené křivkou $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ zvanou astroida, při čemž $a > 0$ je konstanta.

94. a) Jestliže polohu bodu A v rovině udáváme délkou průvodiče $OA = \varrho$ a úhlem $\sphericalangle xOA = \varphi$ sevřeným kladně orientovaným



Obr. 76

vanou osou x a průvodičem OA, je rovnice křivky dána vztahem $\varrho = f(\varphi)$. Pak velikost plochy $P = OA_1A_2$ (obr. 76) je $P = \frac{1}{2}\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_1} f^2(\varphi)\,d\varphi$. Dokažte. b) Podle toho vypočtěte plochu omezenou křivkou $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$, zvanou lemniskata $(a > 0)$.

95. Stanovte délku oblouku křivky a) $y = \lg x$ mezi dvěma body, jejichž souřadnice x jsou $0 < x_1 < x_2$, b) $y = e^x$ mezi dvěma body, jejichž souřadnice x jsou $x_1 < x_2$.

96. Odůvodněte, že objem rotačního tělesa, které vznikne, otáčí-li se plocha omezená obloukem křivky $y = f(x)$, osou x a přímkami $x = a$, $x = b$ $(a < b)$, kolem osy x, je vyjádřen vzorcem

$$V = \pi\int\limits_a^b f^2(x)\,dx,$$

při čemž $f(x) \geqq 0$ v intervalu $\langle a, b\rangle$.

97. Vypočtěte a) objem koule o poloměru r, b) objem rotačního elipsoidu, který vznikne, otáčí-li se elipsa o poloosách a, b kolem některé své osy.

98. Vypočtěte objem rotačního jednodílného hyperboloidu, jehož podstavy mají poloměr r, jehož hrdlová kružnice má poloměr ϱ a výška je v. (Hrdlová kružnice je nejmenší kružnice na povrchu hyperboloidu.)

99. Vypočtěte objem tělesa, které vznikne, otáčí-li se kružnice o poloměru r kolem přímky, jejíž vzdálenost od středu kružnice je a $(a > r)$.

100. Vypočtěte objem tělesa, které vznikne, otáčí-li se lemniskata z cvič. 94 a) kolem osy x, b) kolem osy y.

1. a) $y = 2x$ pro $x \geq 0$, $y = 0$ pro $x < 0$. b) $y = 2x - 1$ pro $x \geq 1$, $y = 1$ pro $0 \leq x < 1$, $y = 1 - 2x$ pro $x < 0$. c) $y = 5 - x$ pro $x \geq 1$, $y = 5x - 1$ pro $-1 \leq x < 1$, $y = x - 5$ pro $x < -1$. — **2.** a) Není definována pro $x = 2$ a pro $x = -2$. b) Není definována pro $x = 4$ a pro $x = -1$. c) Je definována. — **3.** Prvá není definována pro a) $x = 0$, b) $x = -\frac{1}{2}$, c) $x = \frac{1}{2}(2k + 1)\pi$, kdežto druhá ano. — **4.** a) $a_n = (-1)^{n-1}$. b) $a_n = \frac{1}{2}[1 - (-1)^n]$. c) $a_n = \frac{1}{n}$. — **5.** Rovnost může nastat, je-li buď $n = 1$, nebo $x = 0$. — **6.** a) $\left(\dfrac{1 + \dfrac{1}{n+1}}{1 + \dfrac{1}{n}}\right)^{n+1} =$

$= \left[1 - \dfrac{1}{(n+1)^2}\right]^{n+1} > 1 - \dfrac{1}{n+1} = \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{n}}$. b) $\left(\dfrac{1 + \dfrac{1}{n}}{1 + \dfrac{1}{n+1}}\right)^{n+2} =$

$= \left[1 + \dfrac{1}{n(n+2)}\right]^{n+2} > 1 + \dfrac{1}{n}$. — **7.** a) Je-li $a \neq 0$, pro každé r, s; je-li $a = 0$ pro každé r a pro $s = 0$. b) Je-li $r \geq 0$, $s \geq 0$, pro každé a; je-li $r < 0$ nebo $s < 0$ (nebo obojí) pro $a \neq 0$. c) Je-li $r \geq 0$ pro každé a i pro každé b; je-li $r < 0$, pro $a \neq 0$, $b \neq 0$. d) Je-li $r \geq 0$, pro každé a a pro $b \neq 0$; je-li $r < 0$ pro $a \neq 0$, $b \neq 0$. e) Pro každé r. f) Pro $r \neq 0$. — **8.** a) $y = \pi x : 180$. b) $180 : \pi \doteq 57°17'45''$. — **9.** a) Definována pro každé x, hodnoty 0 nabývá pro $x = -a + k\pi$, hodnoty 1 pro $x = \frac{1}{2}\pi - a + 2k\pi$, hodnoty -1 pro $x = \frac{3}{2}\pi - a + 2k\pi$, k celé. b) Definována pro každé x, hodnoty 0 nabývá pro $x = k\pi : a$, hodnoty 1 pro $x = (1 + 4k)\pi : 2a$, hodnoty -1 pro $x = (3 + 4k)\pi : 2a$, k celé. c) Definována pro každé x, hodnoty 0 nabývá pro $x = \pm\sqrt{k\pi}$, hodnoty 1 pro $x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}(1 + 4k)\pi}$, hodnoty -1 pro $x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}(3 + 4k)\pi}$, $k \geq 0$ celé. d) Definována pro $x \neq 0$, hodnoty 0 nabývá pro $x = 1 : k\pi$, $k \neq 0$ celé, hodnoty 1 nabývá pro $x = 2 : (1 + 4k)\pi$, hodnoty -1 pro $x = 2 : (3 + 4k)\pi$, k celé. e) Definována pro $x \neq k\pi$, hodnoty 0 nenabývá, hodnoty 1 nabývá pro $x = \frac{1}{2}(1 + 4k)\pi$, hodnoty -1 pro $x = \frac{1}{2}(3 + 4k)\pi$, k celé. — **10.** a) $-\operatorname{tg} x$ pro $x \neq \frac{1}{2}(2k + 1)\pi$; $-1 : \operatorname{tg} x$ pro $x \neq \frac{1}{2}k\pi$; $1 : \operatorname{tg} x$ pro $x \neq \frac{1}{2}k\pi$; $\operatorname{tg} x$ pro $x \neq \frac{1}{2}(2k + 1)\pi$; $-\operatorname{tg} x$ pro $x \neq \frac{1}{2}(2k + 1)\pi$, k celé. b) $x_1 \neq \frac{1}{2}(2k + 1)\pi$, $x_2 \neq \frac{1}{2}(2k + 1)\pi$, $x_1 + x_2 \neq \frac{1}{2}(2k + 1)\pi$; $x \neq \frac{1}{2}(2k + 1)\pi$, $x \neq \frac{1}{4}(2k + 1)\pi$; $x \neq (2k + 1)\pi$; $x \neq k\pi$, k celé.

11. Pro $|x| \neq 1$ je $\dfrac{x^2 - 1}{|x| - 1} = |x| + 1$. Nechť $1 \leq p < 2 < q$. Pak pro $p - 1 < x < q - 1$ je $p < x + 1 < q$ a pro $-p + 1 > x > -q + 1$ je $p < -x + 1 < q$. — **12.** Zvolme libovolné $k > 0$. Pak a) pro $x > 1 : \sqrt{k}$ nebo pro $x < -1 : \sqrt{k}$ je $1 : x^2 < k$; b) pro $-1 : \sqrt{k} < x < 1 : \sqrt{k}$ je $1 : x^2 > k$. — **13.** Zvolme libovolné $k > 0$. Pak a) pro $x > \sqrt{k}$ nebo pro $x < -\sqrt{k}$ je $x^2 > k$; b) pro $x > \sqrt[3]{k}$ je $x^3 > k$ a pro $x < -\sqrt[3]{k}$ je $x^3 < -k$. — **14.** a) Zvolme libovolné $\varepsilon > 0$. Pak $\left|\frac{ax + b}{cx + d} - \frac{a}{c}\right| = \frac{|bc - ad|}{|c(cx + d)|} < \varepsilon$, když buď $bc - ad = 0$, nebo $x > \frac{|bc - ad|}{c^2\varepsilon} - \frac{d}{c}$, nebo $x < -\frac{|bc - ad|}{c^2\varepsilon} - \frac{d}{c}$. b) Předpokládejme, že $c > 0$. (Kdyby tomu tak nebylo, změníme znaménko čitatele i jmenovatele.) Zvolme libovolné $k > \frac{a}{c}$; pak $\frac{ax + b}{cx + d} > k$, když $-\frac{d}{c} < x < -\frac{d}{c} + \frac{bc - ad}{c(ck - a)}$. Zvolme libovolné $k < \frac{a}{c}$; pak $\frac{ax + b}{cx + d} < k$, když $-\frac{d}{c} - \frac{bc - ad}{c(a - ck)} < x < -\frac{d}{c}$. — **15.** a) Je-li $p < a < q$ a jestliže pro $x \neq a$ platí $p < x < q$ a padne-li pro tato x hodnota $f(x)$ do jistého intervalu J_y, pak $p - a < x - a < q - a$, při čemž $p - a < 0 < q - a$ a hodnota $f(x) = f[(x - a) + a]$ padne do téhož intervalu J_y a obráceně. b) Jestliže hodnota $f(x)$ padne do jistého intervalu J_y pro všecka $x > k$, pak hodnota $f(x) = f[(x - a) + a]$ padne do téhož intervalu pro všecka $x - a > k - a$ a obráceně. c) Jestliže pro všecka x z jistého intervalu J_x platí $|f(x)| > k > 0$, pak $\left|\frac{1}{f(x)}\right| < \frac{1}{k}$ a obráceně. — **16.** Jestliže v J_x platí $|f(x)| < m$, $|g(x)| < n$, pak $|f(x) \pm g(x)| \leqq |f(x)| + |g(x)| < m + n$, $|f(x) \,.\, g(x)| = |f(x)| \,.\, |g(x)| < mn$. — **17.** Je-li $|f(x) - b| < \varepsilon$ pro všecka $x \neq a$ z nějakého okolí J_x, pak také $||f(x)| - |b|| \leqq |f(x) - b| < \varepsilon$. Obrácená věta neplatí (viz příklad 8). — **18.** Jestliže pro všecka $x \neq a$ z J_x platí $|f(x)| < \varepsilon$, pak také $|g(x)| < \varepsilon$. — **19.** Kdyby platilo $\lim_{x \to a} \frac{1}{f(x)} = 0$, pak by ke každému $\varepsilon > 0$ existovalo takové okolí J_x bodu a, že pro všecka $x \neq a$ z J_x by bylo $\left|\frac{1}{f(x)}\right| < \varepsilon$ čili $|f(x)| > \frac{1}{\varepsilon}$. — **20.** Písmena J_x, J'_x atd. značí vesměs buď pravé, nebo levé okolí.

21. Je spojitá. — **22.** Funkce $\sin \frac{1}{x}$ nabývá v každém okolí bodu 0 hodnoty 1 i hodnoty -1 (viz cvič. 9d). Volíme-li za J_y třeba interval $(k - \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2})$, aspoň jedna z hodnot $1, -1$ do něho nepadne. —

23. $k = \lim_{x\to 0}(x \sin\frac{1}{x})$, ale v okolí bodu 0 je funkce $\varphi(x) = x$ nekonečně malá a $\sin\frac{1}{x}$ omezená. Proto $k = 0$. — **24.** a) Pro $x = k\pi$, k celé. b) Pro $x = 0$ a pro $x = 1$. — **25.** a) $(\frac{1}{2}(2k - 1)\pi, \frac{1}{2}(2k + 1)\pi)$, b) $(k\pi, (k + 1)\pi)$, k celé. — **26.** a) 1. b) $\frac{3}{2}$. c) 6. — **27.** a) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 5x}{5x} \,.\, 5\right) = 5$. b) $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x} \,.\, \frac{1}{\cos x}\right) = 1$. c) $1 - \sin x = \sin\frac{1}{2}\pi - \sin x = 2\cos\frac{1}{2}(\frac{1}{2}\pi + x)\sin\frac{1}{2}(\frac{1}{2}\pi - x)$, proto $\lim_{x\to\frac{1}{2}\pi}\frac{1 - \sin x}{\frac{1}{2}\pi - x} = 0$. — **28.** a) $\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{1 - x} - \frac{3}{1 - x^3}\right) = \lim_{x\to 1}\frac{x^2 + x - 2}{1 - x^3} = -1$. b) $\lim_{x\to\frac{1}{4}\pi}\frac{\sin x - \cos x}{1 - \operatorname{tg} x} = \lim_{x\to\frac{1}{4}\pi}\frac{\cos x(\sin x - \cos x)}{\cos x - \sin x} = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$. c) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \frac{3}{n^2} + \dots + \frac{n}{n^2}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}n(n + 1)}{n^2} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{2}$. — **29.** Je-li $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$, je také $||f(x)| - |f(a)|| \leqq |f(x) - f(a)| < \varepsilon$. — **30.** Může, je-li na příklad $g(x) = \varphi(x) - f(x)$, kde $\varphi(x)$ je spojitá v bodě a.

31. a) $6x - 2$. b) $\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$. c) $4x^3 + 3x^2 - 2x + 11$. d) $-\frac{\sqrt{5}}{x^2}$, $x \neq 0$. e) $\frac{4a^2x}{(a^2 - x^2)^2}$, $x \neq a$, $x \neq -a$. f) $\frac{x^2 - 6x + 7}{(x - 3)^2}$, $x \neq 3$. g) $\frac{-2x - a - b}{(x - a)^2(x - b)^2}$, $x \neq a$, $x \neq b$. h) $\frac{2(x - 1)}{(1 + x)^3}$, $x \neq -1$. i) $\operatorname{tg}^2 x$, $x \neq \frac{1}{2}(2k + 1)\pi$, k celé. j) $\frac{\sin x}{\cos^2 x}$, $x \neq \frac{1}{2}(2k + 1)\pi$, k celé. k) $2x\sin x + x^2\cos x$. l) $2\cos 2x$. m) $\frac{\cos x}{(1 - \sin x)^2}$, $x \neq \frac{1}{2}(4k + 1)\pi$, k celé. n) $\frac{-2}{(\sin x - \cos x)^2}$, $x \neq \frac{1}{4}(4k + 1)\pi$, $x \neq \frac{1}{2}(2k + 1)\pi$, k celé. — **32.** a) $-1 : x^2$ pro $x > 0$, $1 : x^2$ pro $x < 0$. b) 2 pro $x > 0$, 0 pro $-1 < x < 0$, -2 pro $x < -1$. c) $\frac{-2}{(x - 1)^2}$ pro $x > 1$ a pro $x < -1$, $\frac{2}{(x - 1)^2}$ pro $-1 < x < 1$. — **33.** a) $v = c - gt$. b) $t = c : g$, $s = c^2 : 2g$. c) $t = 2c : g$, $v = -c$. — **34.** a) $x = 2k\pi$, $\operatorname{tg}\alpha = 1$; $x = (2k + 1)\pi$, $\operatorname{tg}\alpha = -1$, k celé. b) $x = k\pi$, $\operatorname{tg}\alpha = 1$. c) $x = 0$, $\operatorname{tg}\alpha = -1$; $x = 1$ a $x = -1$, $\operatorname{tg}\alpha = 2$. — **35.** 1. Pro $n = 1$ je $(k_1u_1)' = k_1u'_1$. 2. Jestliže $v = k_1u_1 + k_2u_2 + \dots + k_nu_n$, při čemž $v' = k_1u'_1 + k_2u'_2 + \dots + k_nu'_n$, pak $(v + k_{n+1}u_{n+1})' = v' + k_{n+1}u'_{n+1}$. — **36.** a) 1. Pro $n = 1$ vzorec platí. 2. $[f^{n+1}(x)]' = [f^n(x) \,.\, f(x)]' = [f^n(x)]' \,.\, f(x) +$

$+ f^n(x) \,.\, f'(x)$. b) Je-li $m = -n$, pak $[f^n(x)]' = \left[\frac{1}{f^m(x)}\right]' =$ $= \frac{-mf^{m-1}(x)\,.\,f'(x)}{f^{2m}(x)} = -mf^{-m-1}(x)\,.\,f'(x)$, pokud $f(x) \neq 0$. c) $\sin 2x$; $\frac{2\sin x}{\cos^3 x}$, $x \neq \frac{1}{2}(2k+1)\,.\,\pi$; $46(1+2x)^{22}$. — **37.** 1. Pro $n = 1$ vzorec platí. 2. Označme $u_1 u_2 \ldots u_n = v$. Je-li $\frac{v'}{v} = \frac{u_1'}{u_1} + \frac{u_2'}{u_2} + \ldots + \frac{u_n'}{u_n}$, je $\frac{(vu_{n+1})'}{vu_{n+1}} = \frac{v'u_{n+1} + vu_{n+1}'}{vu_{n+1}} = \frac{v'}{v} + \frac{u_{n+1}'}{u_{n+1}}$. Pro $u_1 = u_2 = \ldots = u_n =$ $= f(x)$ máme $\frac{[f^n(x)]'}{f^n(x)} = \frac{n\,f'(x)}{f(x)}$. — **38.** Je-li $f(-x) = f(x)$, je $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(-x+h) - f(-x)}{h} = -\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x-h) - f(x)}{-h}$; je-li $f(-x) =$ $= -f(x)$, je $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(-x+h) - f(-x)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x-h) - f(x)}{-h}$. — **39.** a) Rostoucí pro $x > \frac{1}{3}\sqrt{3}$ a pro $x < -\frac{1}{3}\sqrt{3}$, klesající pro $-\frac{1}{3}\sqrt{3} < x <$ $< \frac{1}{3}\sqrt{3}$, maximum pro $x = -\frac{1}{3}\sqrt{3}$, minimum pro $x = \frac{1}{3}\sqrt{3}$. b) Rostoucí pro $x > 1$ a pro $-1 < x < 0$, klesající pro $0 < x < 1$ a pro $x < -1$, maximum pro $x = 0$, minimum pro $x = 1$ a pro $x = -1$. c) Rostoucí pro $x < 0$, klesající pro $x > 0$, maximum pro $x = 0$. d) Rostoucí pro $-1 < x < 1$, klesající pro $x > 1$ a pro $x < -1$, minimum pro $x = -1$. e) Rostoucí pro $x > 1$, klesající pro $x < -1$, konstantní pro $-1 \leq x \leq 1$. f) Rostoucí pro každé x. g) Rostoucí pro $\frac{1}{2}k\pi < x < \frac{1}{2}(k + \frac{1}{2})\,\pi$, klesající pro $\frac{1}{2}(k - \frac{1}{2})\,\pi < x < \frac{1}{2}k\pi$, maximum pro $x = \frac{1}{4}(2k+1)\,\pi$, minimum pro $x = \frac{1}{2}k\pi$, k celé. — **40.** a) $\sin x -$ $- \sin 0 = (x - 0)\,.\,\cos\xi < x$. b) $\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} 0 = (x - 0)\,.\,\frac{1}{\cos^2\xi} > x$.

41. a) Označme $\int\limits_a^{\overline{b}} f(x)\,dx = I$, $\int\limits_a^{\overline{b}} k\,f(x)\,dx = I'$, $\int\limits_{\underline{a}}^{b} f(x)\,dx = K$, $\int\limits_{\underline{a}}^{b} k\,f(x)\,dx = K'$. D budiž rozdělení intervalu $\langle a, b \rangle$. Horní a dolní součet příslušný k funkci $f(x)$ označme $S(D)$ a $s(D)$; horní a dolní součet příslušný k funkci $k\,f(x)$ označme $S'(D)$ a $s'(D)$. 1. Pro $k = 0$ je $S'(D) = 0$, $k\,S(D) = 0$ pro každé D. Proto $I' = kI = 0$. Podobně $s'(D) = 0$, $k\,s(D) = 0$ pro každé D. Proto $K' = kK = 0$. 2. Pro $k > 0$ je $S'(D) = k\,S(D)$, $s'(D) = k\,s(D)$. Proto $I' = kI$, $K' = kK$. 3. Pro $k < 0$ je $S'(D) = k\,s(D)$, $s'(D) = k\,S(D)$. Proto $I' = kK$, $K' = kI$. b) Je-li $I = K$, je $kI = kK$ a tedy $I' = K'$. — **42.** a) Označme $\overline{\int_a^b}[f(x) + g(x)]\,dx = I$, $\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = I_1$, $\overline{\int_a^b} g(x)\,dx = I_2$; stejně tvořené dolní integrály označme K, K_1, K_2. Horní součty příslušné k funkcím $f(x) + g(x)$, $f(x)$, $g(x)$ označme $S(D)$, $S_1(D)$, $S_2(D)$, podobně dolní součty příslušné k týmž funkcím označíme $s(D)$, $s_1(D)$, $s_2(D)$. Platí $S(D) \leqq S_1(D) + S_2(D)$ pro každé D, neboť je-li M_k, M_k', M_k'' supremum funkcí $f(x) + g(x)$, $f(x)$, $g(x)$ v k-tém dílčím intervalu $\langle x_{k-1}, x_k\rangle$, je $M_k \leqq M_k' + M_k''$ (dosáhnou-li obě funkce svého suprema v témž bodě intervalu $\langle x_{k-1}, x_k\rangle$, je $M_k = M_k' + M_k''$; dosáhnou-li ho v různých bodech, je $M_k < M_k' + M_k''$). Proto $I \leqq I_1 + I_2$. Podobně pro dolní součty platí $s(D) \geqq s_1(D) + s_2(D)$ a odtud $K \geqq K_1 + K_2$. b) Poněvadž $I_1 + I_2 \geqq I \geqq K \geqq K_1 + K_2$, proto pro $I_1 = K_1$, $I_2 = K_2$ dostáváme $I = K$. — **43.** Užijeme výsledku cvičení 41b a 42b. — **44.** Označme $\int_a^b f(x)\,dx = I$. Poněvadž I je infimum horních součtů, existuje takové rozdělení D_1, že $S(D_1) < I + \frac{1}{2}\varepsilon$. Poněvadž I je zároveň supremum dolních součtů, existuje takové rozdělení D_2, že $s(D_2) > I - \frac{1}{2}\varepsilon$. Je-li D společné zjemnění rozdělení D_1 a D_2, je $S(D) \leqq S(D_1)$, $s(D) \geqq s(D_2)$, takže $S(D) < I + \frac{1}{2}\varepsilon$, $s(D) > I - \frac{1}{2}\varepsilon$. Odtud $S(D) - s(D) < \varepsilon$. — **45.** Je-li $g(x) = 0$ pro každé x z intervalu $\langle a, b\rangle$, je $S(D) = 0$, $s(D) = 0$ pro každé rozdělení D, takže $\int_a^b 0\,dx = 0$. Pak podle věty 34 $\int_a^b f(x)\,dx \geqq \int_a^b 0\,dx = 0$. — **46.** Podle věty 34 je $\int_b^a f(x)\,dx \leqq \int_b^a g(x)\,dx$ čili $-\int_a^b f(x)\,dx \leqq -\int_a^b g(x)\,dx$. — **47.** Je-li funkce f spojitá v $\langle a, b\rangle$, existuje $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ (věta 33), která je spojitá v $\langle a, b\rangle$ (věta 37), při čemž $F'(x) = f(x)$ (věta 38). Vedle toho $F(a) = 0$. Podle věty o přírůstku funkce tedy existuje v $\langle a, b\rangle$ vnitřní bod c tak, že $F(b) - F(a) = (b - a) \,.\, F'(c)$. — **48.** Je-li $a < b$ je $\int_c^x f(t)\,dt = \int_c^a f(t)\,dt + \int_a^x f(t)\,dt$, je-li $a > b$, je $\int_c^x f(t)\,dt = \int_c^b f(t)\,dt + \int_b^x f(t)\,dt$. Na poslední integrály v obou rovnicích užijeme vět 37 a 38. — **49.** Platí $\int_x^c f(t)\,dt = -\int_c^x f(t)\,dt$. Dále podle cvič. 48. —

50. $\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt = \int_c^b f(t)\,dt - \int_c^a f(t)\,dt.$

51. a) $\frac15 x^5$ v intervalu $(-\infty, \infty)$. b) $-\frac{1}{2x^2}$ v int. $(-\infty, 0)$ a $(0, \infty)$. c) $\frac32 x^2 - 2x$ v int. $(-\infty, \infty)$. d) $\frac13 x^3 - \frac12 x^2 + x$ v int. $(-\infty, \infty)$. e) $\frac13 x^3 - \frac15 x^5$ v int. $(-\infty, \infty)$. f) $\frac15 x^5 - \frac23 x^3 + x$ v int. $(-\infty, \infty)$. g) $x + \frac{2}{x}$ v int. $(-\infty, 0)$ a $(0, \infty)$. h) $x - \frac{1}{x} + \frac{5}{2x^2}$ v int. $(-\infty, 0)$ a $(0, \infty)$. Integrační konstanty jsou všude vynechány. — **52.** a) $-a\cos x + b\sin x$ v intervalu $(-\infty, \infty)$. b) $\frac12 \operatorname{tg} x$ v int. $(\frac12(2k-1)\pi, \frac12(2k+1)\pi)$. c) $-\operatorname{cotg} x - x$ v int. $(k\pi, (k+1)\pi)$. d) $2x - \operatorname{tg} x$ v int. $(\frac12(2k-1)\pi, \frac12(2k+1)\pi)$. e) $-2\operatorname{cotg} 2x$ v int. $(\frac12 k\pi, \frac12(k+1)\pi)$. k značí celé číslo, integrační konstanty vynechány. — **53.** a) $x\sin x + \cos x$. b) $-x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x$. c) $3(x^2 - 2)\sin x - x(x^2 - 6)\cos x$. d) $\frac12(x + \sin x\cos x)$. e) $\frac12 \sin^2 x$. f) $-\frac13(\sin^2 x + 2)\cos x$. Vesměs v intervalu $(-\infty, \infty)$; integrační konstanty vynechány. — **54.** $u = x^n$, $v' = \sin x$, resp. $u = x^n$, $v' = \cos x$. — **55.** $u = \sin^{n-1} x$, $v' = \sin x$, resp. $u = \cos^{n-1} x$, $v' = \cos x$. — **56.** a) $3x^3 - 6x^2 + 4x + 7$. b) $3x^3 - 6x^2 + 4x - 32$. — **57.** Lze užít buď úplné indukce s pomocí vzorce (34), nebo výsledku cvič. 35. — **59.** $s = \frac12 at^2 + c$, a je konstanta úměrnosti a c integrační konstanta. — **60.** a) $y = x^2$. b) $y = \frac23 x^3 + \frac13$.

61. a) $10x(x^2 - 1)^4$. b) $\frac{-3(2x-1)}{(x^2 - x - 2)^4}$, $x \neq 2$, $x \neq -1$. c) $-3\sin 3x$. d) $-3\cos^2 x \sin x$. e) $-3x^2 \sin x^3$. f) $\sin(a - 2x)$. g) $\frac{2\sin x}{\cos^3 x}$, $x \neq \frac12(2k + 1)\pi$, k celé. h) $\frac{2}{\cos^2 2x}$, $x \neq \frac14(2k + 1)\pi$, k celé. — **62.** a) $an(ax + b)^{n-1}$ při $n > 0$ pro každé x, při $n \leqq 0$ pro $x \neq -\frac{b}{a}$. b) $x^{m-1}(1 - x)^{n-1}(m - mx - nx)$ při $m > 0$, $n > 0$ pro každé x, při $m \leqq 0$, $n > 0$ pro $x \neq 0$, při $m > 0$, $n \leqq 0$ pro $x \neq 1$, při $m \leqq 0$, $n \leqq 0$ pro $x \neq 0$, $x \neq 1$. c) $\frac{2m(1 + x^m)(x^{m-1} - x)}{(1 + x^2)^{m+1}}$ při $m > 0$ pro každé x, při $m \leqq 0$ pro $x \neq 0$. d) $an\sin^{n-1}(ax + b)\cos(ax + b)$ při $n > 0$ pro každé x, při $n \leqq 0$ pro $x \neq \frac{k\pi - b}{a}$, k celé. — **64.** a) $v = a\omega\cos(\omega t + k)$. b) $s = \pm a$. — **66.** a) $-\frac{1}{10}(3 - 2x^2)^5$ v int. $(-\infty, \infty)$. b) $-\frac{1}{2(x^2 - 1)}$ v int. $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$, $(1, \infty)$. c) $\frac13 \sin^3 x$ v int. $(-\infty,$

∞). d) $-\frac{1}{4}\cos^4 x$ v int. $(-\infty, \infty)$. e) $\frac{1}{\cos x}$ v int. $(\frac{1}{2}(2k-1)\pi, \frac{1}{2}(2k+1)\pi)$, k celé. f) $\frac{1}{3}\cos^3 x - \cos x$ v int. $(-\infty, \infty)$. g) $\frac{1}{8}\cos^8 x - \frac{1}{6}\cos^6 x$ v int. $(-\infty, \infty)$. h) $-\frac{1}{3\sin^3 x} + \frac{1}{\sin x}$ v int. $(k\pi, (k+1)\pi)$, k celé. —

67. a) $\frac{1}{4a}(ax+b)^4$ v intervalu $(-\infty, \infty)$. b) $\frac{1}{a-x}$ v int. $(-\infty, a)$, (a, ∞). c) $-\frac{1}{2}\cos 2x$ v int. $(-\infty, \infty)$. d) $\frac{1}{3}\sin(3x-5)$ v int. $(-\infty, \infty)$. e) $\frac{1}{3}\operatorname{tg} 3x$ v int. $(\frac{1}{6}(2k-1)\pi, \frac{1}{6}(2k+1)\pi)$, k celé. f) $-\frac{1}{4}\operatorname{cotg}(4x+1)$ v int. $(\frac{1}{4}(k\pi-1), \frac{1}{4}[(k+1)\pi-1])$, k celé. g) $\operatorname{tg}\frac{1}{2}x$ v int. $((2k-1)\pi$, $(2k+1)\pi)$, k celé. — **68.** a) $-\frac{1}{4}$. b) $\frac{1}{2}$. c) $\frac{1}{3}$. d) $\frac{2}{3}$. e) $\frac{1}{4}$.

71. $\frac{1}{x}$ pro $x > 0$ nebo pro $x < 0$. b) $\frac{1}{\sqrt{x}}$ nebo $\frac{1}{-\sqrt{x}}$ pro $x > 0$. c) $\sqrt{1-x^2}$ nebo $-\sqrt{1-x^2}$ pro $0 \leqq x \leqq 1$. d) $\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ nebo $-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ pro $0 < x \leqq 1$. e) $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ pro každé x. — **72.** Má-li být funkce inversní totožná s původní funkcí $f(x)$, musí být graf funkce $f(x)$ souměrný podle přímky, která půlí úhel souřadnicových os. — **73.** a) $x = k\pi + \operatorname{arctg} a$. b) $x = 2k\pi \pm \arccos a$. c) $x = k\pi + \operatorname{arccotg} a$, k celé. — **74.** a) Je-li $\arcsin x = y$, je $x = \sin y$. Pak $\cos y = \cos(-y) = \sqrt{1-x^2} \geqq 0$. Je-li $x \geqq 0$, je $y \geqq 0$ a $y = \arccos\sqrt{1-x^2}$. Je-li $x \leqq 0$, je $y \leqq 0$ a $-y = \arccos\sqrt{1-x^2}$. b) Je-li $\arcsin x = y$, je $x = \sin y$. Pak $\operatorname{tg} y = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, $y = \operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$. c) Je-li $\operatorname{arctg} x = y$, je $x = \operatorname{tg} y$. Pak $\sin y = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, $y = \arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$. d) Je-li $\arcsin x = y$, je $x = \sin y$, $-x = \sin(-y)$, $-y = \arcsin(-x)$. e) Je-li $\operatorname{arctg} x = y$, je $x = \operatorname{tg} y$, $-x = \operatorname{tg}(-y)$, $-y = \operatorname{arctg}(-x)$. f) Je-li $\arccos x = y$, je $x = \cos y$, $-x = \cos(\pi - y)$, $\pi - y = \arccos(-x)$. g) Je-li $\operatorname{arccotg} x = y$, je $x = \operatorname{cotg} y$, $-x = \operatorname{cotg}(\pi - y)$, $\pi - y = \operatorname{arccotg}(-x)$. — **75.** a) Je-li $\arcsin x_1 = y_1$, $\arcsin x_2 = y_2$, je $\sin y_1 = x_1$, $\sin y_2 = x_2$, $\sin(y_1+y_2) = \sin y_1 \cos y_2 + \cos y_1 \sin y_2 = x_1\sqrt{1-x_2^2} + x_2\sqrt{1-x_1^2}$ i co do znaménka (viz cvič. 74a). Označme $x_1\sqrt{1-x_2^2} + x_2\sqrt{1-x_1^2} = z$. Je-li $|y_1+y_2| \leqq \frac{1}{2}\pi$, je $y_1 + y_2 = \arcsin z$. Pak $\cos(y_1+y_2) \geqq 0$, t. j. $\sqrt{1-x_1^2}\,.\,\sqrt{1-x_2^2} \geqq x_1x_2$. To nastane, když buď $x_1x_2 \leqq 0$, nebo když $x_1^2 + x_2^2 \leqq 1$. Je-li $y_1 + y_2 > \frac{1}{2}\pi$, je $\pi - y_1 - y_2 < \frac{1}{2}\pi$ a $\sin(\pi - y_1 - y_2) = z$, takže $y_1 + y_2 = \pi - \arcsin z$. Je-li $y_1 + y_2 < -\frac{1}{2}\pi$, je $-y_1 - y_2 - \pi > -\frac{1}{2}\pi$ a $\sin(-y_1 - y_2 - \pi) = z$, takže $y_1 + y_2 = -\pi - \arcsin z$. V obou posledních případech je $\cos(y_1 + y_2) < 0$, t. j. $\sqrt{1-x_1^2}\,.\,\sqrt{1-x_2^2} < x_1x_2$. To nastane, když $x_1^2 + x_2^2 > 1$ a čísla x_1, x_2 jsou buď obě kladná, nebo obě záporná. b) Je-li $\operatorname{arctg}x_1 = y_1$, $\operatorname{arctg}x_2 = y_2$, je $\operatorname{tg}y_1 = x_1$, $\operatorname{tg}y_2 = x_2$, $\operatorname{tg}(y_1 + y_2) = \dfrac{\operatorname{tg}y_1 + \operatorname{tg}y_2}{1 - \operatorname{tg}y_1\operatorname{tg}y_2} = \dfrac{x_1 + x_2}{1 - x_1x_2}$. Označme $\dfrac{x_1 + x_2}{1 - x_1x_2} = z$. Je-li $|y_1 + y_2| < \frac{1}{2}\pi$, je $y_1 + y_2 = \operatorname{arctg}z$. Pak $\cos(y_1 + y_2) > 0$. To nastane, když $\operatorname{tg}y_1\operatorname{tg}y_2 < 1$ (neboť $\cos y_1 > 0$, $\cos y_2 > 0$) čili $x_1x_2 < 1$. Je-li $y_1 + y_2 > \frac{1}{2}\pi$, je $y_1 + y_2 - \pi > -\frac{1}{2}\pi$ a $\operatorname{tg}(y_1 + y_2 - \pi) = z$, takže $y_1 + y_2 = \operatorname{arctg}z + \pi$. Je-li $y_1 + y_2 < -\frac{1}{2}\pi$, je $y_1 + y_2 + \pi < \frac{1}{2}\pi$ a $\operatorname{tg}(y_1 + y_2 + \pi) = z$, takže $y_1 + y_2 = \operatorname{arctg}z - \pi$. V obou posledních případech je $\cos(y_1 + y_2) < 0$. To nastane, když $x_1x_2 > 1$ a čísla x_1, x_2 jsou buď obě kladná, nebo obě záporná. — **76.** a) $7 : 8\sqrt[8]{x}$, $x > 0$. b) $\dfrac{3}{2\sqrt{3x+5}}$, $x > -\frac{5}{3}$. c) $\dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$, $-1 < x < 1$. d) $\dfrac{2x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}$. e) $\dfrac{2\sqrt{x}+1}{4\sqrt{x}\,.\,\sqrt{x+\sqrt{x}}}$, $x > 0$. f) $\dfrac{1}{a^2 + x^2}$. g) $\dfrac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$, $-|a| < x < |a|$. h) $\dfrac{2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$, $-1 < x < 1$. i) $\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ pro $0 < x < 1$, $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ pro $-1 < x < 0$. j) $\dfrac{-1}{x^2+1}$, $x \neq 1$. k) $\dfrac{2}{1+x^2}$ pro $|x| < 1$, $\dfrac{-2}{1+x^2}$ pro $|x| > 1$. l) $\dfrac{1}{(1-x)\sqrt{-x}}$, $x < 0$. —

77. a) Definována pro $x \geqq 1$ a $x \leqq -1$, klesající pro všecka x, pro něž je $x > 1$ nebo $x < -1$. b) Definována pro $x \geqq 1$ a $x \leqq -1$, rostoucí pro všecka $x > 1$ nebo $x < -1$. c) Definována pro všecka $x \neq 0$, klesající pro každé $x \neq 0$. d) Definována pro každé $x \neq 0$, rostoucí pro každé $x \neq 0$. e) Definována pro každé x, $y = x - 2k\pi$ pro $2k\pi \leqq x \leqq (2k+1)\pi$, $y = -x + 2k\pi$ pro $(2k-1)\pi \leqq x \leqq 2k\pi$. f) Definována pro každé x; $y = x - \frac{1}{2}(4k-1)\pi$ pro $(2k-1)\pi \leqq x \leqq 2k\pi$; $y = -x + \frac{1}{2}(4k+1)\pi$, $2k\pi \leqq x \leqq (2k+1)\pi$. g) Definována pro $x \neq \frac{1}{2}(2k+1)\pi$; $y = x - k\pi$ pro $\frac{1}{2}(2k-1)\pi < x < \frac{1}{2}(2k+1)\pi$. h) Definována pro $x \neq k\pi$; $y = -x + \frac{1}{2}(2k+1)\pi$ pro $k\pi < x < (k+1)\pi$. k značí vesměs číslo celé. — **78.** a) $\frac{4}{7}x\sqrt[4]{x^3}$ v intervalu $(0, \infty)$. b) $\frac{2}{9}(3x+2)\sqrt{3x+2}$ v int. $(-\frac{2}{3}, \infty)$. c) $-\sqrt{5-x^2}$ v int. $(-\sqrt{5}, \sqrt{5})$. d) $\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{5}}$ v int. $(-\sqrt{5}, \sqrt{5})$. e) $\frac{2}{9}(x^3+1)\sqrt{x^3+1}$ v int. $(-1, \infty)$. f) $\sqrt{1-x^2} + \arcsin x$ v int. $(-1, 1)$. g) $\frac{1}{2}(\operatorname{arctg}x)^2$

v int. $(-\infty, \infty)$. h) $\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{tg}x\right)$ v int. $(-\frac{1}{2}(2k-1)\pi, \frac{1}{2}(2k + 1)\pi)$ (substituce $\operatorname{tg}x = z\sqrt{2}$). i) $\frac{1}{2}a^2 \arcsin\frac{x}{a} - \frac{1}{2}x\sqrt{a^2 - x^2}$ v int. $(-a, a)$ (substituce $x = a \sin t$). j) $\arcsin(x - 1)$ v int. $(0, 2)$ (substituce $x - 1 = z$). — **79.** a) $\frac{1}{2}(x^2 + 1) \operatorname{arctg}x - \frac{1}{2}x$ v int. $(-\infty, \infty)$. b) $x \,.\arcsin x + \sqrt{1-x^2}$ v int. $(-1, 1)$. c) $\frac{1}{4}(2x^2 - 1) \arcsin x + \frac{1}{4}x\sqrt{1-x^2}$ v int. $(-1, 1)$. d) $\frac{1}{2}x\sqrt{3 - 2x^2} + \frac{3}{4}\sqrt{2} \arcsin\frac{1}{3}x\sqrt{6}$ v int. $(-\frac{1}{2}\sqrt{6}, \frac{1}{2}\sqrt{6})$. e) $\frac{1}{4}(2x + 5)\sqrt{6 - 5x - x^2} + \frac{49}{8} \arcsin\frac{2x+5}{7}$ v int. $(-6, 1)$. — **80.** a) $\frac{m}{m+n}$. b) $\frac{1}{18}\pi\sqrt{3}$. c) $|a|(1 - \frac{1}{2}\sqrt{3})$. d) $\frac{1}{6}\pi$. e) $\frac{1}{4}\pi a^2$.

81. a) Je-li $\log_a b = p, \log_b a = q$, je $a^p = b, b^q = a$; odtud $a^{pq} = a$. b) Je-li $\log_a b = p$, $\log_b c = q$, $\log_c a = r$, je $a^p = b$, $b^q = c$, $c^r = a$; odtud $a^{pqr} = b^{qr} = c^r = a$. c) Podle a) a b) je $\log_a c = 1 : \log_c a = \log_a b \,.\, \log_b c$. d) Je-li $\log_a c = p$, $\log_b c = q$, $\log_{ab} c = r$, je $a^p = c$, $b^q = c$, $(ab)^r = c$, čili $a^r b^r = c$; odtud $a^{pqr} \,.\, b^{pqr} = c^{pq}$, čili $c^{qr} \,.\, c^{pr} = c^{pq}$, $c^{(p+q)r} = c^{pq}$. — **82.** Je-li $0 < x_1 < x_2$, je $\lg x_1 < \lg x_2$. a) Je-li $a > 1$, je $\lg a > 0$, takže $\frac{\lg x_1}{\lg a} < \frac{\lg x_2}{\lg a}$ a $x_1 \lg a < x_2 \lg a$, čili $\lg a^{x_1} < \lg a^{x_2}$. b) Je-li $a < 1$, je $\lg a < 0$, takže $\frac{\lg x_1}{\lg a} > \frac{\lg x_2}{\lg a}$ a $x_1 \lg a > x_2 \lg a$. — **83.** Je-li $1 \leqq t \leqq 1 + \frac{1}{n}$, je $\frac{n}{n+1} \leqq \frac{1}{t} \leqq 1$. a) $\lg\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n =$

$$= n \lg\left(1 + \frac{1}{n}\right) = n\int_1^{1+\frac{1}{n}} \frac{dt}{t} \leqq n\int_1^{1+\frac{1}{n}} dt = 1;\ \lg\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} =$$

$$= (n+1)\int_1^{1+\frac{1}{n}} \frac{dt}{t} \geqq (n+1)\,.\,\frac{n}{n+1}\int_1^{1+\frac{1}{n}} dt = 1.$$ b) Poněvadž $\lg e = 1$, z nerovností v a) plyne $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leqq e \leqq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$. Odtud $e : \left(1 + \frac{1}{n}\right) \leqq \leqq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leqq e$; proto $e = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ (věta 13 a definice limity). c) Pak $e^x : \left(1 + \frac{1}{n}\right)^x \leqq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{nx} \leqq e^x$. Dosadíme-li $nx = m$, $n = \frac{m}{x}$,

je e^x: $\left(1 + \frac{x}{m}\right)^x \leqq \left(1 + \frac{x}{m}\right)^m \leqq e^x$ a $\lim\limits_{m\to\infty}\left(1 + \frac{x}{m}\right)^m = e^x$. — **84.** a) Podle vzorce (42). b) Substitucí $g(x) = t$. — **85.** a) $\lg x$, $x > 0$. b) $\frac{2}{\sin 2x}$, $k\pi < x < (k + \frac{1}{2})\pi$. c) $\frac{2x+1}{x(x+1)}$, $x > 0$, $x < -1$. d) $\frac{1}{\sqrt{x^2+a}}$, je-li $a > 0$ pro každé x, je-li $a < 0$ pro $|x| > \sqrt{-a}$. e) $\frac{1}{x^2-1}$, $-1 < x < 1$. f) $\frac{1}{x \lg x}$, $x > 1$. g) $\frac{2e^x}{(e^x+1)^2}$. h) $2e^x \sin x$. i) $x^{\sin x}\left(\frac{1}{x}\sin x + \lg x \cos x\right)$, $x > 0$. j) $\frac{2}{(1+x)^2}\left(1 + \lg\frac{1-x}{1+x}\right)\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1-x}{1+x}}$, $-1 < x < 1$. — **86.** a) $\lg|x+1|$ v int. $(-\infty, -1)$, $(-1, \infty)$. b) $x + 2\lg|x-1|$ v int. $(-\infty, 1)$, $(1, \infty)$. c) $\frac{1}{3}\lg|3x+2|$ v int. $(-\infty, -\frac{2}{3})$, $(-\frac{2}{3}, \infty)$. d) $\frac{1}{2}x^2 + 2x + 4\lg|x-2|$ v int. $(-\infty, 2)$, $(2, \infty)$. e) $\lg(x^2+1)$ v int. $(-\infty, \infty)$. f) $-\lg|\cos x|$ v int. $(\frac{1}{2}(2k-1)\pi, \frac{1}{2}(2k+1)\pi)$, k celé. g) $\lg|\lg x|$ v int. $(0, 1)$, $(1, \infty)$. h) $\frac{1}{2}\lg^2 x$ v int. $(0, \infty)$. i) $-e^{-x}$ v int. $(-\infty, \infty)$. j) $\frac{-1}{e^x+1}$ v int. $(-\infty, \infty)$. k) $\frac{1}{4}x^2(2\lg x - 1)$ v int. $(0, \infty)$. l) $(x^2 - 2x + 2)e^x$ v int. $(-\infty, \infty)$. m) $\frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x)$ v int. $(-\infty, \infty)$. n) $\frac{1}{2}e^x(\sin x + \cos x)$ v int. $(-\infty, \infty)$. — **87.** a) $\frac{1}{3}x^3 - 3x + 4\lg|x|$ v int. $(-\infty, 0)$, $(0, \infty)$. b) $\frac{1}{2}x^2 + x + 3\lg|x-2|$ v int. $(-\infty, 2)$, $(2, \infty)$. c) $\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + \lg|x-1|$ v int. $(-\infty, 1)$, $(1, \infty)$. d) $\frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{8}x^2 + \frac{9}{8}x + \frac{27}{16}\lg|2x-3|$ v int. $(-\infty, \frac{3}{2})$, $(\frac{3}{2}, \infty)$. — **88.** $kx + h = \frac{k}{2a}(2ax + b) + h - \frac{bk}{2a}$. a) $\frac{15}{2}\lg|x-6| - \frac{3}{2}\lg|x-2|$ v int. $(-\infty, 2)$, $(2, 6)$, $(6, \infty)$. b) $\frac{1}{12}x^3 + \frac{1}{16}x + \frac{1}{64}\lg\left|\frac{2x-1}{2x+1}\right|$ v int. $(-\infty, -\frac{1}{2})$, $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $(\frac{1}{2}, \infty)$. c) $x + \frac{16}{3}\lg|x-4| - \frac{1}{3}\lg|x-1|$ v int. $(-\infty, 1)$, $(1, 4)$, $(4, \infty)$. d) $\frac{2}{5}\lg|x-1| - \frac{1}{15}\lg|3x+2|$ v int. $(-\infty, -\frac{2}{3})$, $(-\frac{2}{3}, 1)$, $(1, \infty)$. e) $-\frac{1}{2}x + \frac{1}{5}\lg|x| - \frac{23}{20}\lg|5-2x|$ v int. $(-\infty, 0)$, $(0, \frac{5}{2})$, $(\frac{5}{2}, \infty)$. f) $\frac{1}{\sqrt{17}}\operatorname{arctg}\frac{3x-2}{\sqrt{17}}$ v int. $(-\infty, \infty)$. g) $\frac{1}{2}x^2 - 2 . \lg(x^2+4) + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{1}{2}x$ v int. $(-\infty, \infty)$. h) $\frac{1}{2}\lg(x^2 + 2x + 7) + \frac{4}{\sqrt{6}}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{6}}$ v int. $(-\infty, \infty)$. i) $4\lg|x-3| - \frac{15}{x-3}$ v int. $(-\infty, 3)$, $(3, \infty)$. j) $x - \frac{9}{x+1} - 6\lg|x+1|$ v int. $(-\infty, -1)$, $(-1, \infty)$. — **89.** $kx + h = \frac{k}{2a}(2ax + b) + h - \frac{bk}{2a}$. a) $\lg(x + 2 +$

$+ \sqrt{x^2 + 4x + 13})$ v int. $(-\infty, \infty)$. b) $\sqrt{x^2 - 2x} + 2 \lg|x - 1 + \sqrt{x^2 - 2x}|$ v int. $(-\infty, 0)$, $(2, \infty)$. c) $\frac{1}{\sqrt{2}} \lg|x + \frac{3}{4} + \sqrt{x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{5}{2}}|$ v int. $(-\infty, -\frac{5}{2})$, $(1, \infty)$. d) $\frac{1}{2}\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \frac{1}{4\sqrt{2}} \lg(x - \frac{5}{4} + \sqrt{x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{3}{2}})$ v int. $(\frac{3}{2}, \infty)$, $-\frac{1}{2}\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \frac{1}{4\sqrt{2}} \lg(\frac{5}{4} - x + \sqrt{x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{3}{2}})$ v int. $(-\infty, 1)$. e) $\frac{1}{2}\sqrt{2x^2 + x - 3} + \frac{3}{4\sqrt{2}} \lg|x + \frac{1}{4} + \sqrt{x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}}|$ v int. $(-\infty, -\frac{3}{2})$, $(1, \infty)$. f) $\frac{1}{3}\sqrt{3} \, . \arcsin \frac{6x + 5}{11}$ v int. $(-\frac{8}{3}, 1)$. g) $\arcsin(\frac{1}{2}x - 1)$ v int. $(0, 4)$. h) $-2\sqrt{4 - x^2} - \arcsin\frac{1}{2}x$ v int. $(-2, 2)$. i) $-\sqrt{4 - 3x - x^2} - \frac{3}{2} \, . \arcsin(\frac{2}{5}x + \frac{3}{5})$ v int. $(-4, 1)$. j) $\sqrt{6 + x - x^2} + \frac{5}{2} \arcsin(\frac{2}{5}x - \frac{1}{5})$ v int. $(-2, 3)$. — **90.** $u = \sqrt{ax^2 + bx + c}$, $v' = 1$; $2ax^2 + bx = 2(ax^2 + bx + c) - (bx + 2c) = 2(ax^2 + bx + c) - \frac{b}{2a}(2ax + b) + \frac{b^2 - 4ac}{2a}$. a) $\frac{1}{4}(2x + 3)\sqrt{x^2 + 3x - 4} - \frac{25}{8} \lg|x + \frac{3}{2} + \sqrt{x^2 + 3x - 4}|$ v int. $(-\infty, -4)$, $(1, \infty)$. b) $\frac{1}{4}(2x + 1)\sqrt{x^2 + x + 1} + \frac{3}{8} \lg(x + \frac{1}{2} + \sqrt{x^2 + x + 1})$ v int. $(-\infty, \infty)$. c) $\frac{1}{4}(2x - 1)\sqrt{x(1 - x)} + \frac{1}{8} \, . \arcsin(2x - 1)$ v int. $(0, 1)$.

91. a) 2. b) $\frac{1}{n + 1}$. c) πab. d) $\frac{1}{2}(x_2y_2 - x_1y_1) - \frac{1}{2} \lg \frac{bx_2 + ay_2}{bx_1 + ay_1}$, kde x_1, y_1 a x_2, y_2 jsou souřadnice bodů omezujících oblouk hyperboly. — **92.** $4ab \operatorname{arctg} \frac{a}{b}$. — **93.** $P = 4\int_0^a (a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}} \, dx = \frac{3}{8}\pi a^2$ (substituce $x = a \sin^3 t$). — **94.** a) Platí $x = f(\varphi) \cos\varphi$, $y = f(\varphi) \sin\varphi$, $dx = [f'(\varphi) \cos\varphi - f(\varphi) \sin\varphi] \, d\varphi$, $P = \int_{x_2}^{x_1} y \, dx + \frac{1}{2}x_2y_2 - \frac{1}{2}x_1y_1$. Ale $x_2y_2 - x_1y_1 = f^2(\varphi_2) \sin\varphi_2 \cos\varphi_2 - f^2(\varphi_1) \sin\varphi_1 \cos\varphi_1 = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} [2f(\varphi) f'(\varphi) \, . \sin\varphi \cos\varphi + f^2(\varphi) \cos^2\varphi - f^2(\varphi) \sin^2\varphi] \, d\varphi$, takže $P = \frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f^2(\varphi) \, d\varphi$. b) Dosadíme-li $x = \varrho \cos\varphi$, $y = \varrho \sin\varphi$, vyjde (po zanedbání hodnoty $\varrho = 0$) $\varrho^2 = 2a^2 \cos 2\varphi$. Je-li $0 \leq \varphi \leq \frac{1}{4}\pi$, je $\varrho^2 \geq 0$, takže čtvrtina plochy omezené lemniskatou je $\frac{1}{4}P = 2a^2 \int\limits_0^{\frac{1}{4}\pi} \cos 2\varphi \, d\varphi$, $P = 2a^2$.

95. $\displaystyle\int\limits_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\,dx = \int\limits_{x_1}^{x_2} \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+1}} + \int\limits_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}} = \sqrt{x_2^2+1}\; -$

$\displaystyle -\sqrt{x_1^2+1} + \lg\frac{x_2(\sqrt{x_1^2+1}+1)}{x_1(\sqrt{x_2^2+1}+1)}$ (substituce $\sqrt{x^2+1} = t + x$).

b) $\displaystyle\int\limits_{x_1}^{x_2} \sqrt{e^{2x}+1}\,dx = \sqrt{e^{2x_2}+1} - \sqrt{e^{2x_1}+1} + x_2 - x_1 - \lg\frac{\sqrt{e^{2x_2}+1}+1}{\sqrt{e^{2x_1}+1}+1}$

(substituce $e^x = z$). — **96.** Je-li M_k supremum a m_k infimum funkce f v k-tém dílčím intervalu, je $\pi m_k^2 \Delta x_k \leq V_k \leq \pi M_k^2 \Delta x_k$, neboť objem části tělesa v k-tém dílčím intervalu není menší než objem válce, jehož poloměr je m_k a výška Δx_k, a není větší než objem válce o poloměru M_k a výšce Δx_k. — **97.** a) $\frac{4}{3}\pi r^3$. b) $\frac{4}{3}\pi ab^2$ resp. $\frac{4}{3}\pi a^2 b$. — **98.** $\frac{1}{3}\pi(r^2 + 2\varrho^2)\,v$. — **99.** $2\pi^2 ar^2$. — **100.** a) $\frac{1}{3}\pi a^3[3\lg(1+\sqrt{2}) - \sqrt{2}]$. b) $\frac{1}{2}\pi^2 a^3$.

REJSTŘÍK

OBSAH

CESTA K VĚDĚNÍ

svazek

64

DR KAREL HRUŠA

DESET KAPITOL Z DIFERENCIÁLNÍHO A INTEGRÁLNÍHO POČTU

Vydalo Přírodovědecké vydavatelství, Praha 1952. Hlavní redaktor Ladislav Mach, odborný redaktor Miroslav Fuka, literární redaktorka Věra Pašková. Z nové sazby písmem Extended vytiskla Státní tiskárna n. p., závod 05 (Prometheus) v Praze VIII. — 1. vydání, náklad 4 400 výtisků (1—4 400) — 301 03/2 — 53274-51/9/III/1 — 128 — 1% — Sazba 25. VI. 1951, tisk 22. II. 1952 — 6,38 plánovacích archů, 9,00 autorských archů, 9,19 vydavatelských archů — 204 stran, 76 obrazců. Papír 222-17, formát 70×100 cm, 80 g. — Cena brož. 84 Kčs.

DT 517.3

CESTA K VĚDĚNÍ

svazek

64

Cena brož. Kčs 84,—

301 03/2
DT 517.3