

Geometrická místa bodů v prostoru

Josef Holubář (author): Geometrická místa bodů v prostoru. (Czech).
Praha: Mladá fronta, 1965.

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/403527>

Terms of use:

© Josef Holubář, 1965

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

ŠKOLA MLADÝCH MATEMATIKŮ

**GEOMETRICKÁ
MÍSTA BODŮ
V PROSTORU**

11

Vydal matematický ústav ČSAV a ÚV ČSM v nakladatelství Mladá fronta

ŠKOLA MLADÝCH MATEMATIKŮ

JOSEF HOLUBÁŘ

geometrická místa bodů v prostoru

PRAHA 1965

VYDAL ŮV MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY
A ŮV ČSM V NAKLADATELSTVÍ
MLADÁ FRONTA

*Odbornou recenzi provedli prof. dr. Alois Urban
a doc. Jan Vyšín.*

1. kapitola

ÚVOD

Vám, mladí přátelé, je ze střední školy dobře znám *pojem geometrického místa bodů* neboli *pojem množiny všech bodů, které mají určitou vlastnost*, pokud se jedná o útvary v rovině.¹⁾ V planimetrii jste už řešili četné konstruktivní úlohy, při jejichž řešení se g. m. b. často používá. Vždyť má konstruktivní geometrická úloha mnohdy řešení, které dostaneme jako průnik dvou nebo více množin bodů, tj. g. m. b., která jsme před tím našli (srovn. např. úlohu 8 řešenou v našem textu na str. 30). Potom je odvození příslušných g. m. b. vlastně řešením jistých „obecnějších“ úloh konstruktivních, s kterými jsou g. m. b. v úzké souvislosti.

Ve škole jste se však dosud málokdy setkali s pojmem g. m. b., který se vztahuje na útvary prostorové. V této knížce chtěl bych vás, zvláště pak účastníky Matematické olympiády, seznámit s některými g. m. b. v prostoru. Prostorem zde rozumíme *trojrozměrný prostor Euklidův*, v němž se vyskytují všechny geometrické útvary, které jste probírali ve škole. Také g. m. b. v prostoru docházejí hojného použití v konstruktivních úlohách, a to prostorových. V našich úvahách, zvláště na počátku knížky, zdůrazníme obdobu a souvislosti g. m. b. prostorových s g. m.

¹⁾ Název *množiny všech bodů určité vlastnosti* je novější termín pro pojem, který je dosud běžně označován starším a stále vžitým názvem *geometrické místo bodů*. Toho budeme používat i v této knížce a slova geometrické místo bodů zapisovat zkráceně „g. m. b.“.

b. v rovině. Uvidíme, jak se vyšetřování g. m. b. v prostoru často a výhodně převádí na vyšetřování g. m. b. v rovině a jak se z těchto g. m. b. rovinných přejde do prostoru zobrazením, např. otáčením, rovnoběžným posunutím nebo stejnolehlostí apod., čímž se studium g. m. b. v prostoru značně usnadní.

Při vyšetřování g. m. b. v prostoru se nám vyskytnou plochy běžné v prostorové geometrii, s kterými jste se však na střední škole nesetkali, jako např. další *rotační plochy druhého stupně* (tzv. *kvadriky*). Z nich jste poznali rotační plochu válcovou, kuželovou a kulovou i jejich vznik. Pokud jde o kulovou plochu, připomeňme k její známé definici pomocí středu a poloměru a k jejímu vytvoření pomocí rotace kružnice kolem jejího průměru ještě Thaletovo a Apolloniovo vytvoření kulové plochy. Tato vytvoření jsou jenom prostorovým zobecněním Thaletova a Apolloniova vytvoření kružnice, která znáte z planimetrie. (Viz příklad 4 kapitoly 2 na str. 12.)

Další rotační kvadriky vznikají *rotací kuželoseček* kolem některé z jejich os:

Rotací elipsy, která má ohniska v bodech F, G , kolem její hlavní osy vznikne *rotační elipsoid protáhlý* s ohnisky v bodech F, G , definovaný jako g. m. b. v prostoru, které mají od daných bodů F, G daný součet vzdáleností rovný $2a > FG$, kde a je velikost hlavní poloosy výchozí elipsy a také hlavní poloosy vzniklého elipsoidu. Rotací téže elipsy kolem její vedlejší osy vznikne další kvadrika, *rotační elipsoid zploštělý*.

Otáčením hyperboly s ohnisky F, G kolem její hlavní osy vznikne *rotační hyperboloid dvoudílný* s ohnisky v bodech F, G , definovaný jako g. m. b. v prostoru, které mají od daných bodů F, G daný rozdíl vzdáleností rovný $2a < FG$. Při této rotaci vytvářejí asymptoty rotující hyperboly asymptotickou kuželovou plochu vzniklého

hyperboloidu. Rotuje-li táž hyperbola kolem své vedlejší osy, vznikne *rotační hyperboloid jednodílný*, který má mnoho zajímavých vlastností (např. obsahuje přímky a lze jej také vytvořit rotací každé takové přímky).

Rotuje-li parabola (s ohniskem v bodě F a řídící přímkou d) kolem své osy, vzniká rotační paraboloid s ohniskem v bodě F a řídící rovinou ϱ , která prochází přímkou d a která je kolmá na osu výchozí paraboly. Rotační paraboloid je definován jako g. m. b. v prostoru, které mají od daného bodu F a od dané roviny ϱ vzdálenosti sobě rovné.

Při našich úvahách o g. m. b. v prostoru se nám vyskytnou *kuželosečky*, jejichž ohniskové definice znáte, které tu však vzniknou jako *rovinné průseky na kvadrikách*. Uvedme zde aspoň některé věty, a to bez důkazů (příslušná odůvodnění najde čtenář v [3]).

Rotační válcová plocha V (o ose v přímce o) a rovina σ dává v průseku vznik:

a) *dvěma přímkám* plochy V , je-li $\sigma \parallel o$, pokud rovina σ není tečnou rovinou plochy V anebo pokud rovina σ nemá takovou polohu, že by neměla s plochou V žádný společný bod;

b) *kružnici*, je-li rovina σ kolmá k přímce o ;

c) *elipse*, je-li rovina σ kosá k přímce o .

Na rotační kuželové ploše K (o ose v přímce o) může v rovině σ vzniknout průsek:

a) *složený ze dvou přímek* plochy K , prochází-li rovina σ vrcholem plochy K (rovina σ je v tomto případě tzv. vrcholovou rovinou kuželové plochy K), pokud však rovina σ není tečnou rovinou plochy K anebo pokud rovina σ nemá takovou polohu, že by s plochou K neměla kromě vrcholu žádný jiný společný bod;

není-li rovina σ vrcholovou rovinou plochy K , potom vznikne;

b) *elipsa* (ve zvláštním případě kružnice), je-li rovina σ různoběžná se všemi přímkami plochy K ,

c) *hyperbola*, je-li rovina σ rovnoběžná právě se dvěma přímkami plochy K ,

d) *parabola*, je-li rovina σ rovnoběžná právě s jednou přímkou plochy K .

V naší knížce půjde v podstatě o řešení příkladů g. m. b. v prostoru vybraných tak, aby vás mohly zaujmout i poučit. Geometrické myšlení pěstované studiem planimetrických útvarů si tím rozšíříte a hlavně prohloubíte. Pro názornost budeme často používat vedle pravoúhlých průmětů také náčrtů prostorových útvarů sestrojovaných v známém *volném rovnoběžném zobrazení*. Tyto náčrty vám usnadní porozumění vztahům mezi prostorovými útvary a pomohou vám i v dalším rozvoji prostorové představivosti. Některé příklady g. m. b. jsou ponechány jako úlohy doprovázené aspoň částečnými výsledky k řešení vám samotným. Na konci knížky uvedeme *literaturu*, která jednak obsahuje hojně dalších úloh na vyšetřování g. m. b. v prostoru, jednak doplňuje teoretické poznatky v textu použité a nedokazované. Tuto literaturu vám doporučujeme k dalšímu studiu.

2. kapitola

NĚKTERÁ ANALOGICKÁ G. M. B. V ROVINĚ A V PROSTORU

Především je třeba, abyste si uvědomili, že právě tak jako při vyšetřování g. m. b. v rovině, musí být i při vyšetřování g. m. b. v prostoru dokazovány vždycky dvě věty:

a) *každý bod, který má danou vlastnost V, náleží určitému geometrickému útvaru G, o němž chceme dokázat, že je hledaným g. m. b.,*

b) *každý bod, který náleží útvaru G, má vlastnost V. Pak teprve platí, že útvar G je hledaným geometrickým místem.*

Všimněme si nyní některých g. m. b. v prostoru v souvislosti s příslušnými g. m. b. v rovině a ukažme postup vyšetřování nejdříve na nejjednodušším příkladě.

1. Víme, že v rovině platí věta: G. m. b., které mají od daných dvou různých bodů A, B vzdálenosti sobě rovné, je osa úsečky AB .

Vyšetřme v prostoru g. m. b., které mají od daných dvou různých bodů A, B sobě rovné vzdálenosti. Je to rovina σ kolmá k přímkě AB a procházející středem úsečky AB , tj. rovina souměrnosti bodů A, B .

Důkaz. Necht' o určitém bodu X v prostoru, který neleží na přímkě AB , platí vztah $AX = BX$. Potom body A, B, X určují rovinu ρ . V této rovině, jak víte, náleží bod X přím-

přímku AB (v rovině ϱ_i tzv. svazku rovin o ose v přímce AB) určit přímku o_i , která je opět osou úsečky AB (viz obr. 1). Všecky přímky o_i vyplňují, jak známo, rovinu σ kolmou k AB , procházející středem úsečky AB , tj. rovinu souměrnosti úsečky AB . O bodech roviny σ (tj. o bodech přímk o_i jako o bodech přímky o) jsme tak dokázali obě věty nahoře označené a), b). Tím je dokázáno, že rovina σ je hledaným prostorovým g. m. b.

Všimněme si, že všechny přímky o_i vyplňující rovinu σ vzniknou z přímky o jejím otáčením kolem přímky AB jakožto osy rotace, tedy určitým *shodným zobrazením*.

2. V rovině platí: G. m. b., které mají od daných dvou bodů A, B ($A \neq B$) daný součet vzdáleností rovný $2a > AB$, je elipsa s ohnisky A, B a hlavní poloosou o velikosti a .

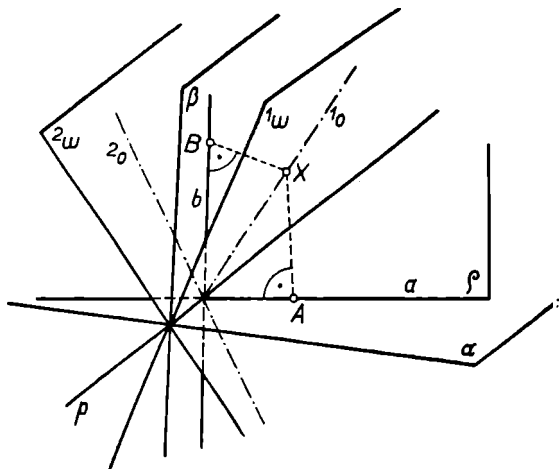
V prostoru dostáváme: G. m. b., které mají od daných dvou různých bodů A, B daný součet vzdáleností rovný $2a > AB$, je rotační protáhlý elipsoid ε s ohnisky A, B a hlavní poloosou o velikosti a . Přímka AB je osou rotace plochy ε .

Důkaz tohoto prostorového g. m. b. bychom provedli obdobně jako v předchozím příkladě pomocí svazku rovin o ose v přímce AB při použití otáčení jedné z rovin tohoto svazku. Proveďte sami!

Úloha 1. Určete g. m. b., které mají od daných dvou bodů A, B ($A \neq B$) daný rozdíl vzdáleností rovný $2a < AB$. [Rotační dvoudílný hyperboloid.]

Úloha 2. Určete g. m. b., které mají od dané roviny ϱ a od daného bodu A , jenž neleží v rovině ϱ , vzdálenosti sobě rovné. [Rotační paraboloid s ohniskem v bodě A a s řídící rovinou ϱ .]

3. V rovině platí: G. m. b., které mají od dvou daných různoběžných přímek a, b sobě rovné vzdálenosti, jsou dvě přímky $o_1 \perp o_2$, a to osy souměrnosti přímek a, b (osy úhlů, které přímky a, b tvoří).



Obr. 2

Snadno přejdeme do prostoru. Platí: G. m. b., které mají od daných dvou různoběžných rovin α, β sobě rovné vzdálenosti, jsou dvě roviny ${}^1\omega \perp {}^2\omega$, a to roviny souměrnosti rovin α, β (roviny souměrnosti klínů, které roviny α, β tvoří).⁴⁾

⁴⁾ Klín se definuje jako průnik dvou poloprostorů, jejichž hraniční roviny mají společnou přímku (hranu klínu). Pro velikost úhlu α klínu platí $0 \leq \alpha \leq 2R$; je-li $\alpha = 0$, je klín nulový, a je-li $\alpha = 2R$, je klín přímý.

Důkaz. Necht' v prostoru pro určitý bod X , který neleží ani v rovině α ani v rovině β , platí vztah $XA = XB$, kde body A a B jsou paty kolmic sestrojených bodem X k rovinám α, β . Potom je rovina $\varrho \equiv (XAB)$ kolmá k průsečnici p rovin α, β a protíná roviny α, β v přímkách $a \equiv \alpha \cdot \varrho$, $b \equiv \beta \cdot \varrho$. Přímký a, b tvoří úhly, jimiž měříme velikosti daných čtyř klínů, určených rovinami α, β . (Viz obr. 2.) V rovině ϱ lze sestrojit osy souměrnosti ${}^1o, {}^2o$ přímk a, b a zvolený bod X je zřejmě jeden z bodů, který náleží g. m. b. tvořenému dvojicí přímk ${}^1o \perp {}^2o$. Jejich body mají od přímk a, b stejné vzdálenosti. Obdobně je tomu také v každé rovině $\varrho_i \perp p$. V ní dostaneme obdobně dvojici přímk ${}^1o_i \perp {}^2o_i$, jejichž body tvoří v ϱ_i g. m. b. požadované vlastnosti. Všechny dvojice přímk ${}^1o_i, {}^2o_i$ vyplňují dvě roviny ${}^1\omega \perp {}^2\omega$, jejichž body mají požadovanou vlastnost. Ze vzniku rovin ${}^1\omega, {}^2\omega$ vyplývá, že o jejich bodech platí, že a) každý bod, mající požadovanou vlastnost, náleží některé z rovin ${}^1\omega, {}^2\omega$, b) každý bod náležející rovině ${}^1\omega$ nebo ${}^2\omega$ má onu vlastnost (také ovšem body přímky p , kde jde o vzdálenosti nulové).

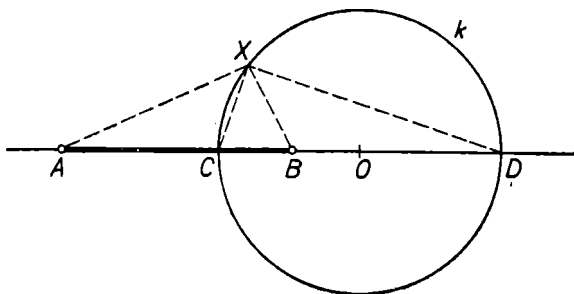
Připomeňme si, že každá dvojice přímk ${}^1o_i, {}^2o_i$, vyplňující roviny našeho prostorového g. m. b., vznikne z přímk ${}^1o, {}^2o$ roviny ϱ opět určitým shodným zobrazením, a to *rovnoběžným posunutím* přímk ${}^1o, {}^2o$ ve směru daném přímkou p .

Úloha 3. Určete g. m. b., které mají stejné vzdálenosti od dvou daných rovnoběžných (různých) rovin. [Rovina souměrnosti daných rovin s nimi rovnoběžná.]

Úloha 4. Určete g. m. b., které mají od dané roviny vzdálenost rovnou dané délce $d > 0$. [Dvě roviny s danou rovinou rovnoběžné.]

Úloha 5. Určete g. m. b., které mají od daných dvou a) různoběžných, b) rovnoběžných rovin vzdálenosti

v daném poměru $0 < p : q \neq 1$. [a) Dvě roviny náležející svazku daných rovin, b) dvě roviny s danými rovinami rovnoběžné.]



Obr. 3

4. V rovině platí: *G. m. b.*, které mají od daných dvou bodů A, B ($A \neq B$) daný poměr vzdáleností λ , $0 < \lambda \neq 1$, je kružnice $k(A, B, \lambda)$, tzv. Apolloniova. Její střed O leží na přímce AB a o krajních bodech C, D jejího průměru platí (viz obr. 3):

$$\frac{AC}{BC} = \frac{AD}{BD} = \lambda \neq 1.$$

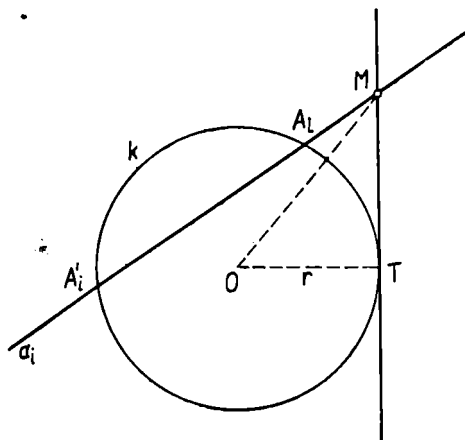
Důkaz najde čtenář v knížce: Jaroslav Šedivý, O podobnostech v geometrii, str. 14–16. (Škola mladých matematiků, sv. 7, 1963.)

V prostoru platí: *G. m. b.*, které mají od daných dvou různých bodů A, B daný poměr vzdáleností λ , $0 < \lambda \neq 1$, je kulová plocha $\kappa(A, B, \lambda)$ Apolloniova, jejíž střed O leží na přímce AB a pro jejíž krajní body C, D průměru AB platí:

$$|(ABC)| = |(ABD)| = \lambda.$$

(Přitom symbol (ABC) značí tzv. *dělicí poměr* bodu C na přímce AB vzhledem k základním bodům A, B ; je tedy $(ABC) = AC : BC$.)

Důkaz této věty se provede pomocí svazku rovin o ose v přímce AB a plochu π dostaneme otáčením Apolloniovy kružnice $k(A, B, \lambda)$ kolem přímky AB . Provedte sami!



Obr. 4

Úloha 6. Je dána rovina ϱ a mimo ni dva různé body A, B ; přitom přímka AB není kolmá k ϱ . Určete v rovině ϱ g. m. b., jichž spojnice s body A, B mají od roviny ϱ stejné odchylky $\neq 90^\circ$. [Apolloniova kružnice $k(A', B', \lambda)$, kde body A', B' jsou pravouhlé průměty bodů A, B do roviny ϱ a poměr $\lambda = \frac{A'M}{B'M} = \frac{AM}{BM}$ (body M náležejí kružnici k). V případě, že dané body A, B jsou od dané roviny ϱ stejně vzdáleny, je hledaným g. m. b. osa úsečky $A'B'$.]

Poznámka. Pro vyšetřování některých g. m. b. v prostoru budeme později potřebovat pojem tzv. *mocnosti bodu ke kulové ploše*; proto si zde tento pojem vysvětlíme.

Začneme opět s obdobným pojmem v rovině. Je-li dána kružnice k a v její rovině bod M , pak víme, že o kružnici k (O , r) a bodu M platí důležitá planimetrická vlastnost, která dochází hojněho užití při konstruktivních úlohách o kružnici, a která vyjadřuje tzv. *mocnost bodu M ke kružnici k* . Viz obr. 4.

Sestrojíme-li bodem M sečny a_i kružnice k a označíme-li A_i , A'_i společné body kružnice k a sečen a_i , pak platí o velikostech úseček MA_i , MA'_i vztah

$$(*) \quad MA_i \cdot MA'_i = MO^2 - r^2 (= \text{konst.}).$$

Číslo $MO^2 - r^2$ se nazývá *mocnost bodu M ke kružnici k* .⁵⁾ Důkaz vztahu (*) viz v knížce *J. Šedivého*, citované v odst. 4 na str. 23–24.

Nyní snadno dokážeme platnost prostorového vztahu, který vyjadřuje mocnost bodu M ke kulové ploše κ (O , r).

Plochu κ můžeme vytvořit otáčením kružnice k (O , r) kolem osy MO , takže vztah (*) platí hned také pro všechny kružnice plochy κ , vzniklé otáčením kružnice k kolem osy MO (za předpokladu $M \neq O$) a číslo $MO^2 - r^2$ udává i mocnost bodu M k ploše κ . Je-li $M \equiv O$, otáčíme kružnici k kolem libovolné přímky procházející bodem O .

Než přistoupíme k dalším výkladům, bude prospěšné, když čtenář sám rozřeší následující úlohy, jejichž výsledky v dalším použijeme.

⁵⁾ Je-li $MO > r$, tj. leží-li bod M vně kružnice k , je mocnost $MO^2 - r^2$ bodu M kladné číslo rovné MT^2 , druhé mocnině délky tečny sestavené z bodu M ke kružnici k ; je-li $MO = r$, tj. leží-li bod M na kružnici k , je jeho mocnost rovna nule; je-li $MO < r$, tj. leží-li bod M uvnitř kružnice k , je jeho mocnost záporné číslo.

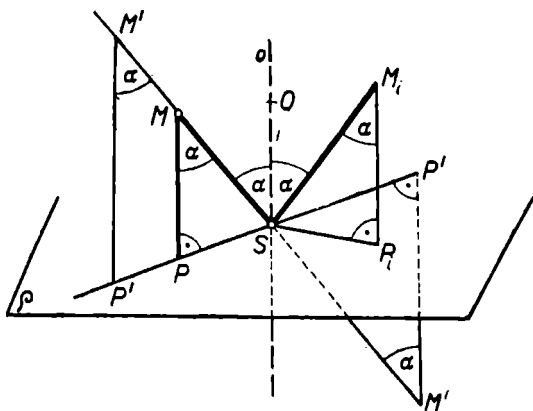
Úloha 7. Určete g. m. středů kulových ploch, které procházejí danými třemi body $A \neq B \neq C$. [Přímka kolmá k rovině $\varrho \equiv (ABC)$, která prochází středem kružnice opsané trojúhelníku $\triangle ABC$.]

Úloha 8. Jsou dány rovnoběžné roviny ϱ, σ ($\varrho \neq \sigma$). Určete g. m. středů všech úseček, z nichž každá má jeden krajní bod v rovině ϱ a druhý krajní bod v rovině σ . [Rovina souměrnosti $\omega \parallel \varrho (\parallel \sigma)$ rovinové vrstvy (ϱ, σ) určené rovinami ϱ, σ .]

Úloha 9. Jsou dány mimoběžné přímky a, b . Určete g. m. středů všech úseček, z nichž každá má jeden krajní bod na přímce a , druhý krajní bod na přímce b . [Rovina σ souměrnosti nejkratší příčky XY daných mimoběžek ($\sigma \perp XY$), srovn. s obr. 7.]

DALŠÍ PŘÍKLADY G. M. B. V PROSTORU

1. Je dána rovina ρ a v ní bod S . Určete g. m. b., které mají stálý poměr vzdáleností od roviny ρ a od bodu S , rovný danému kladnému číslu $\lambda < 1$.



Obr. 5

Řešení. Necht' o bodu M platí pro úsečky MP a MS vztah
(*) $MP : MS = \lambda,$

kde bod P je pata kolmice sestrojené bodem M k rovině ρ . Protože je $\lambda < 1$, je $P \neq S$. (Viz obr. 5.) Bod M náleží tedy

hledanému g. m. b. a zřejmě i každý další bod M' přímky MS (až na bod S) náleží tomuto g. m. b. To vyplývá z vlastnosti podobných pravoúhlých trojúhelníků

$$\triangle MSP \sim \triangle M' S P'.$$

V nich označme α velikost úhlu při vrcholu M resp. M' , což je vzhledem k vztahu (*) známé číslo, neboť $\cos \alpha = \lambda$. Sestrojíme-li bodem S přímkou $o \perp \varrho$, pak i úhel $\sphericalangle OSM = \alpha$ (bod $O \neq S$ je libovolně zvolený bod na přímce o). To znamená: Každý bod M , který má vlastnost požadovanou v úloze, náleží rotační ploše kuželové K o vrcholu v bodě S a ose kolmé k rovině ϱ ; úhly tvořících přímek plochy K vzniklé rotací kolem přímky o svírají s osou plochy úhly velikosti α , přičemž $\cos \alpha = \lambda$.

Obráceně, zvolíme-li libovolný bod $M_i \neq S$ na kuželové ploše K , pak bod M_i má vlastnost předepsanou v úloze a náleží tedy našemu g.m. b. To vyplývá z pravoúhlého trojúhelníka $\triangle M_i S P_i$ (viz obr. 5), v němž velikost úhlu $\sphericalangle P_i M_i S$ je α a v němž platí vztah $M_i P_i : M_i S = \lambda$. Proto: *G. m. b., které mají daný poměr λ vzdáleností od roviny ϱ a od jejího bodu S , je rotační plocha kuželová K s vyloučením jejího vrcholu S .*

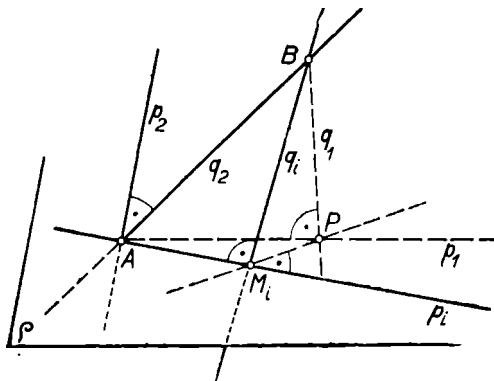
Má-li mít úloha řešení, musí být $0 < \lambda < 1$, což odpovídá tomu, že ze všech úseček, které spojují bod M (neležící na přímce o) s body roviny ϱ , je délka MP kolmice k rovině ϱ nejkratší.

Úloha 10. Jak by vypadalo g. m. b. v předchozím příkladě, kdyby dané číslo $\lambda = 1$? [Přímka o s vyloučením bodu S .]

2. Je dána rovina ϱ , v ní bod A a mimo ni bod B . Určete g. m. b. společných přímek p_i , které tvoří v rovině ϱ svazek

o středu v bodě A , a přímkám q_i , které procházejí bodem B a z nichž každá je kolmá k příslušné přímce p_i .

Řešení. Hledané g. m. b., jestliže existuje, obsahuje zřejmě jenom body M , které leží v rovině ϱ .



Obr. 6

Nejprve předpokládejme, že kolmice, sestrojena bodem B k rovině ϱ , protíná ϱ v bodě $P \neq A$ (viz obr. 6). Bod P je jeden bod našeho g. m. b., neboť zvolíme-li přímku $p_1 \equiv AP$, potom je příslušná přímka $q_1 \equiv BP$. Rovněž bod A je bodem našeho g. m. b., protože sestrojíme-li bodem A přímku $p_2 \perp p_1$, dostaneme na příslušné přímce $q_2 \perp p_2$ bod $M_2 \equiv A$. Dále zvolme v rovině ϱ přímku $p_i \neq AP$ a sestrojme v rovině (Bp_i) přímku $q_i \perp p_i$. Průsečík $M_i \equiv p_i \cdot q_i$ je dalším bodem našeho g. m. b. Snadno dokážeme, že přímka PM_i je kolmá k přímce $p_i \equiv AM_i$. Je totiž $AM_i \perp BM_i$ (podle sestrojení daného podmínkou úlohy) a $AM_i \perp BP$ (protože je $BP \perp \varrho$). Odtud vyplývá,

Úloha 11. Je dána přímka p a mimo ni bod A . Určete g. m. b. společných rovinám ϱ_i svazku rovin o ose p a přímkám q_i , které procházejí bodem A , a je-li $q_i \perp \varrho_i$. [Kružnice Thaletova ležící v rovině $\sigma \perp p$; σ prochází bodem A .]

3. Je dána rovina σ a dvě mimoběžné přímky a, b , které jsou rovnoběžné s rovinou σ a které mají od roviny σ stejnou vzdálenost. Určete v rovině σ g. m. středů kulových ploch κ , které se dotýkají daných přímek a, b .

Řešení. Jestliže bod M (viz obr. 7) roviny σ je středem kulové plochy κ , která se dotýká přímek a, b , potom je přímka MA kolmá k přímce a (bod A je pata kolmice MA na přímce a), přímka MB je kolmá k přímce b (bod B je pata kolmice MB na přímce b) a je $MA = MB$. Takový bod M lze snadno sestavit. Sestrojíme dále kolmice $AP \perp a'$, $BQ \perp b'$, kde přímky a', b' jsou pravoúhlé průměty přímek a, b do roviny σ . Protože je $AP = BQ$ a o úhlech $\sphericalangle APM, \sphericalangle BQM$ platí

$$\sphericalangle APM = \sphericalangle BQM = R,$$

jsou pravoúhlé trojúhelníky $\triangle MAP, \triangle MBQ$, které mají shodné přepony $MA = MB$ a shodné odvěsny $AP = BQ$, navzájem shodné. Proto je $MP = MQ$. Leží tedy bod M roviny σ na ose o úhlu přímek a', b' .

Obráceně, zvolíme-li na jedné z os $o \perp o'$ přímek a', b' libovolný bod M_i , pak ze shodných pravoúhlých trojúhelníků $\triangle M_i A_i P_i, \triangle M_i B_i Q_i$ snadno dokážeme, že z bodu M_i jakožto středu lze sestavit kulovou plochu κ_i , která se dotýká přímek a, b . Zřejmě i z bodu $S \equiv o.o'$ lze sestavit určitou kulovou plochu naší úlohy.

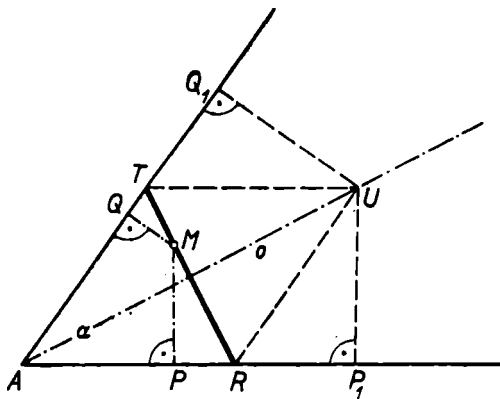
Tím jsme dokázali, že g. m. středů kulových ploch κ požadovaných v naší úloze jsou osy o, o' přímek a', b' .

4. Je dán klín K o úhlu velikosti $\alpha, 0 < \alpha < 2R$, a kladné

číslo s . Určete g. m. b., které náležejí klínu K a jejichž součet vzdáleností od rovin stěn klínu K je konstantní, rovný s .

Řešení. Nechť bod M vyhovuje podmínce naší úlohy, tj. o jeho vzdálenostech $MP = v_1$, $MQ = v_2$ od rovin stěn klínu K (viz obr. 8) platí vztah

$$(1) \quad v_1 + v_2 = s.$$



Obr. 8

Protože přímky MP , MQ jsou kolmé k hraně a klínu K , určují rovinu ω kolmou k přímce a . V rovině ω dostáváme jako průnik roviny ω a klínu K úhel $\sphericalangle PAQ$, kde bod A je průsečík $\omega . a$.

Nyní řešíme planimetrickou úlohu: V úhlu $\sphericalangle PAQ$ máme určit g. m. b., jejichž součet vzdáleností od ramen úhlu $\sphericalangle PAQ$ je konstantní, rovný s .

Bod M je jeden takový bod. Pokus s několika body M_i přivede nás k tomuto řešení:

Bodem M vedme mezi rameny úhlu $\sphericalangle PAQ$ úsečku kolmou na osu o úhlu $\sphericalangle PAQ$; její koncové body označme: R na AP , T na AQ . V pravoúhlých trojúhelnících $\triangle MRP$ a $\triangle MTQ$ jsou úhly $\sphericalangle RMP = \sphericalangle TMQ = \frac{1}{2} \alpha$ (ramena těchto ostrých úhlů jsou kolmá na ramena ostrých úhlů $\sphericalangle uAP = \sphericalangle uAQ = \frac{1}{2} \alpha$), takže je

$$v_1 = MR \cdot \cos \frac{1}{2} \alpha, v_2 = MT \cdot \cos \frac{1}{2} \alpha.$$

Proto o úsečce RT platí:

$$RT = MR + MT = (v_1 + v_2) \frac{1}{\cos \frac{1}{2} \alpha} = \frac{s}{\cos \frac{1}{2} \alpha},$$

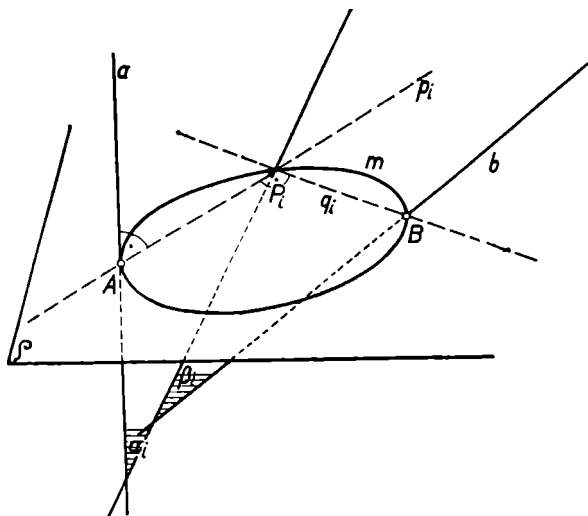
tj. že je konstantní délky a pro daný úhel velikosti α a daný součet vzdáleností s jediná, a lze ji snadno sestrojiti.⁶⁾ Z naší úvahy vyplývá: a) Platí-li o bodu M vztah (1), pak bod M náleží úsečce RT , b) leží-li bod M na úsečce RT , potom o jeho vzdálenostech v_1, v_2 od ramen úhlu $\sphericalangle PAQ$ platí vztah (1). Je tedy hledaným g. m. b. úsečka RT .

Nyní už snadno přejdeme k řešení naší úlohy v prostoru, a to s pomocí shodného zobrazení, v tomto případě s pomocí rovnoběžného posunutí úsečky RT ve směru přímky a . Proto sestrojíme přímkou RT rovinu μ rovnoběžnou s přímkou a . Rovina μ protne roviny aP, aQ stěn klínu K (viz obr. 9) v přímkách $r \parallel t \parallel a$, které určují přímý pás $P \equiv (r, t)$. Sestrojíme-li nyní libovolný bod M_i , jehož vzdálenosti od stěn klínu K vyhovují podmínce naší úlohy, lze bodem M_i proložit rovinu $\omega_i \perp a$ a v ní bodem M_i úsečku $R_i T_i \parallel RT$. Úsečka $R_i T_i$, vzniklá zmíněným posunutím z úsečky RT , tvoří v rovině μ g. m. b., které

⁶⁾ Úsečku RT sestrojíme jako úhlopříčku kosočtverce $ARUT$, jehož vrchol U protilehlý k vrcholu A dostaneme jako bod ležící uvnitř úhlu $\sphericalangle PAQ$ a vzdálený od přímky AP i AQ o délku rovnou $s = P_1 U = Q_1 U$.

přímé hranolové plochy s obdélníkovým řídícím mnohoúhelníkem a s osou rovnoběžnou s průsečnicí daných rovin.]

5. Jsou dány dvě přímky $a \neq b$ a rovina ϱ , která je kolmá k přímce a . Každé rovině β_i svazku rovin o ose b přiřadíme ve svazku rovin o ose a rovinu α_i , která je kolmá k rovině β_i .



Obr. 10

Určete g. m. b. společných rovinám ϱ , α_i , β_i . Rozlište různé polohy přímky b vzhledem k rovině ϱ .

Řešení. Příklad [1]. Necht přímka b je různoběžná s rovinou ϱ a průsečíky přímek a , b s rovinou ϱ jsou body $A \neq B$ (viz obr. 10). Průsečnice rovin α_i s rovinami β_i jsou přímky $p_i \equiv \alpha_i \cdot \varrho$ svazku o středu v bodě A a průsečni-

ce rovin β_i s rovinou ϱ tvoří svazek přímek $q_i \equiv \beta_i \cdot \varrho$ o středu v bodě B . Hledané g. m. b. naší úlohy jsou tedy body $P_i \equiv p_i \cdot q_i$.

Každá rovina α_i obsahuje přímku a a určitou přímku p_i . Příslušná rovina β_i , kolmá k rovině α_i , obsahuje jistou přímku c , která prochází bodem B a která je kolmá k rovině α_i . Proto přímka c je kolmá k přímce a ; leží tedy přímka c v rovině ϱ a je tedy $c \equiv q_i$. Protože však je přímka c kolmá i k přímce p_i roviny α_i , je $q_i \perp p_i$. Hledané body $P_i \equiv p_i \cdot q_i$ vyplní proto v rovině ϱ *Thaletovu kružnici* m , sestrojenou nad průměrem AB .

Případ [2]. Přímka b je různoběžná s rovinou ϱ a protíná ji v bodě $B \equiv A$. Tu každá dvojice rovin α_i, β_i má s rovinou ϱ společný právě jen bod A . Hledaným g. m. b. je tedy *pouze bod* A .

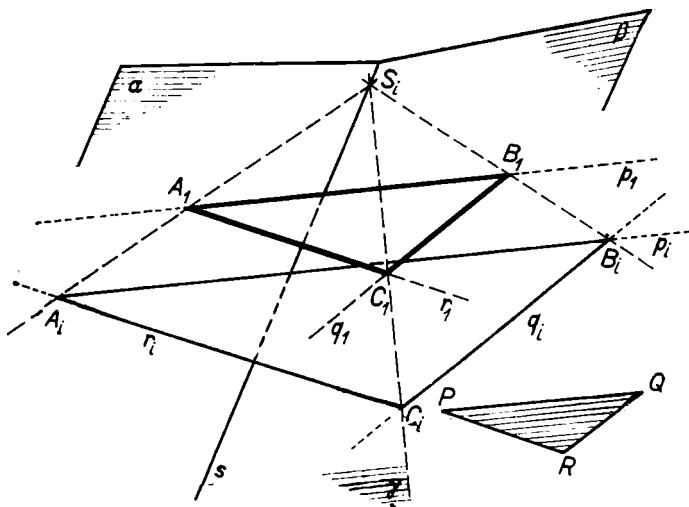
Případ [3]. a) Přímka b je rovnoběžná s rovinou ϱ (ale neleží v rovině ϱ). V tomto případě je přímka a kolmá k přímce b , takže ke všem rovinám β_i svazku o ose v přímce b je kolmá jediná rovina α_0 , která obsahuje přímku a ; α_0 je kolmá k přímce b . G. m. b. společných rovinám $\varrho, \alpha_0, \beta_i$ (s vyloučením roviny $\beta_0 \parallel \varrho$) je *přímka* $m_0 \equiv \varrho \cdot \alpha_0$.

b) Kdyby přímka b ležela v rovině ϱ , pak naše g. m. b. je *celá rovina* ϱ .

6. Jsou dány dvě roviny $\alpha \neq \beta$ a trojúhelník $\triangle PQR$, přičemž žádná jeho strana není rovnoběžná ani s rovinou α ani s rovinou β . Určete g. m. vrcholů C trojúhelníků ABC , jestliže vrchol A každého z nich leží v rovině α , vrchol B v rovině β a jestliže pro jeho strany platí: $AB \parallel PQ$, $BC \parallel QR$, $CA \parallel RP$.

Řešení. Případ [1]: Necht' dané roviny α, β jsou různoběžné o společné průsečnici s . Zvolme přímku $p_1 \parallel PQ$ a ta necht' protíná rovinu α resp. β v bodě A_1 resp. B_1 ,

přítom je $A_1 \neq B_1$. Potom vedme přímku $q_1 \parallel QR$ bodem B_1 a přímku $r_1 \parallel RP$ bodem A_1 (viz obr. 11). Vznikne trojúhelník $\triangle A_1B_1C_1$, jehož rovina je rovnoběžná s rovinou (PQR) . Jeho vrchol C_1 je jedním bodem hledaného



Obr. 11

g. m. b. naší úlohy. Bod C_1 nepadne na přímku s , neboť ani úsečka PR ani úsečka QR není rovnoběžná s rovinami α, β . Bod C_1 s přímkou s určují rovinu γ , o níž dokážeme, že s vyloučením bodů přímky s je hledaným g. m. b. C .

a) Nejprve dokážeme, že každá přímka $p_i \parallel PQ$ bez společného bodu s přímkou s vede k bodu C_i , který leží v rovině γ (ne však na přímce s). Nechť tedy přímka p_i (různá od p_1) protíná rovinu α resp. β v bodě A_i resp. B_i

a rovina (p_i, p_1) přímku s v bodě S_i . Potom přímka $r_i \parallel r_1$ vedená bodem A_i a přímka $q_i \parallel q_1$ vedená bodem B_i určují dvě roviny (r_i, S_i) , (q_i, S_i) s průsečnicí $S_i C_1$; na přímce $S_i C_1$ leží i bod C_i , jakožto společný bod tří rovin (r_i, S_i) , (q_i, S_i) , (p_i, p_1) . Leží tedy bod C_i v rovině γ .

b) Obráceně: Zvolme v rovině γ libovolný bod $C \neq C_i$, ($C \neq C_1$), který neleží na přímce s , a sestrojme přímku CC_1 ; ta nechť protne přímku s v bodě S . Snadno dokážeme obráceným postupem úvahy provedené v a), že lze pro bod C sestrojit $\triangle ABC$ se stranou $CA \parallel RP$ a $CB \parallel RQ$ s vrcholy A resp. B v rovině α resp. β . (Úvahu možno sledovat na obr. 11 s pomocí bodu C , místo C a bodu S_i místo S .)

Bod C nemůžeme volit na přímce s , neboť by pak přímky CA , CB měly ležet v rovině α resp. β , protože bod A má být v rovině α a bod B v rovině β , takže by úsečky RP ($\parallel CA$), RQ ($\parallel CB$) byly rovnoběžné s rovinou α resp. β , což odporuje textu naší úlohy.

Všimněme si ještě, že náš předpoklad o existenci bodu S ležícího na přímce s není pro důkaz podstatný, neboť kdyby byla přímka CC_1 rovnoběžná s přímkou s , přešla by jehlanová plocha $S_i A_1 B_1 C_1$, vzniklá za existence bodu S_i , v tomto případě v plochu hranolovou obsahující body $A_1 B_1 C_1$ s tvořícími přímkami směru s .

Případ [2]: Jsou-li dané roviny rovnoběžné, tj. $\alpha \parallel \beta$, pak zcela obdobnou cestou dokážeme, že g. m. b. C je rovina $\gamma \parallel \alpha \parallel \beta$, kterou určíme jedním bodem C_1 , který sestrojíme jako v případě [1]. Příslušnou úvahu ponecháme čtenáři.

Poznámka. Trojúhelníky $\triangle A_1 B_1 C_1$, $\triangle A_i B_i C_i$ tvoří v prostoru dvojice trojúhelníků stejnohleklých o středu stejnohleklosti v bodě S_i (v případě [1]). V případě [2] jsou všechny trojúhelníky $A_i B_i C_i$ shodné.

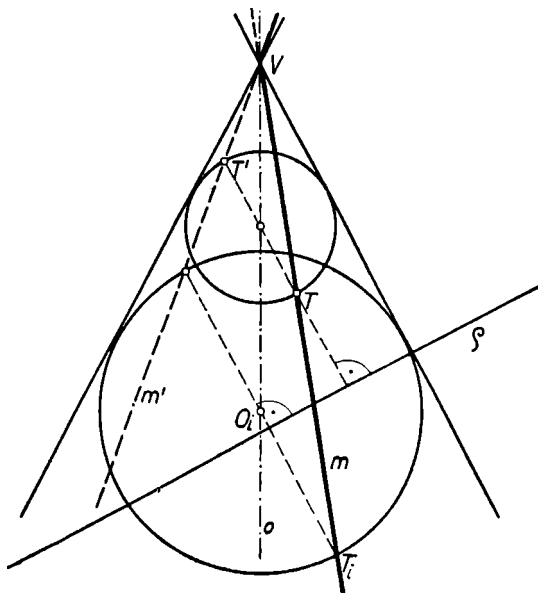
Úloha 13. Je dána přímka a , rovina β neobsahující přímku a a trojúhelník $\triangle PQR$, jehož žádná strana není rovnoběžná ani s přímkou a ani s rovinou β . Určete g. m. vrcholů C trojúhelníků $\triangle ABC$, jestliže vrchol A každého z nich leží na přímce a , vrchol B v rovině β a o jehož stranách platí: $AB \parallel PQ$, $BC \parallel QR$, $CA \parallel RP$. [Jestliže: a) přímka a a rovina β jsou různoběžné, potom g. m. vrcholů C je přímka procházející bodem $P \equiv a$. β s vyloučením bodu P ; b) jestliže přímka a je rovnoběžná s β (nejsou však podle textu úlohy incidentní), je g. m. vrcholů C přímka rovnoběžná s a , určená jedním bodem C_1 , který splňuje podmínky úlohy a jež snadno sestrojíme.]

7. Je dána rotační kuželová plocha K a rovina ϱ . Do plochy K jsou vepsány kulové plochy κ_i . Určete g. m. b. dotyku těch tečných rovin τ_i ploch κ_i , jsou-li roviny τ_i rovnoběžné s rovinou ϱ .

Řešení. Kulové plochy κ_i vepsané ploše K jsou, jak známo, navzájem v dvojicích stejnohlé (homotetické) v stejnohllosti (homotetii) S se středem stejnohllosti ve vrcholu V plochy K . Středy O_i ploch κ_i vyplňují osu o plochy K (až na bod V) a dotykové body T_i tečných rovin τ_i ploch κ_i rovnoběžných s rovinou ϱ leží na kolmicích vedených body přímkou o k rovině ϱ .

Rozeznávejme dva případy: *Případ* [1]. Necht' daná rovina není kolmá k ose o plochy K . Dotykové body T_i leží v rovině $\sigma \perp \varrho$ proložené přímkou o a odpovídají sobě v stejnohllosti S , jakožto diametrálně protilehlé body na plochách κ_i , takže leží na dvou přímkách m, m' stejnohllosti v rovině σ a procházejí bodem V . Přímkou m, m' snadno určíme, sestrojíme-li na jedné ploše κ vepsané do plochy K příslušné dotykové body T, T' tečných rovin rovnoběžných s rovinou ϱ . Potom je $m \equiv VT$, $m' \equiv VT'$ (viz obr. 12).

Obráceně, zvolíme-li na m (nebo na m') libovolný bod T_i (nebo T'_i) různý od V , lze sestavit plochu κ_i se středem O_i (nebo κ'_i se středem O'_i), vedeme-li v rovině σ přímky $T_i O_i \perp \varrho$ (nebo $T'_i O'_i \perp \varrho$). Ze stejnosti



Obr. 12

ploch κ_i a κ (nebo κ'_i a κ) vyplývá, že plochy κ_i a κ'_i jsou vepsány do plochy K . Jsou tedy body T_i a T'_i body našeho g. m. b.

Proto platí: *G. m. b. dotyku ploch κ_i vepaných ploše K , v nichž sestrojené tečné roviny jsou rovnoběžné s rovinou ϱ , jsou přímky m , m' s vyloučením jejich společného bodu V .*

Příklad [2]. Je-li ve zvláštním případě daná rovina ϱ kolmá k přímce o , pak přímky m, m' splývají s přímkou o , která (kromě bodu V) je hledaným g. m. b. dotyku.

Úloha 14. Je dána rovina α , v ní bod A a rovina ϱ . Jsou sestrojeny kulové plochy κ_i , které se dotýkají roviny α v bodě A . Určete g. m. b. dotyku tečných rovin ploch κ_i , které jsou rovnoběžné s rovinou ϱ . [Jsou-li roviny α, ϱ různoběžné, pak dvě navzájem kolmé přímky procházející bodem A , z nichž je vyňat bod A , a ležící v rovině, která je kolmá k průsečnici rovin α a ϱ . Ve zvláštním případě obě výsledné přímky splývají.]

8. Je dána rovina ϱ a uvnitř jednoho s poloprostorů vytvářené rovinou ϱ dva body A, B různě vzdálené od roviny ϱ . Určete g. m. středů kulových ploch κ_i , které se dotýkají roviny ϱ a které procházejí body A, B (nebo v jiné formulaci, g. m. b., které mají od roviny ϱ a bodů A, B vzdálenosti ($\neq 0$) sobě rovné).

Řešení. Necht přímka $p \equiv AB$ protíná rovinu ϱ v bodě P . Použijeme mocnosti M bodu P ke kulovým plochám κ_i , které procházejí body A, B . Platí vztah (viz kapitolu 2, poznámku):

$$(1) \quad M = PA \cdot PB = t^2,$$

kde t značí délku tečen vedených z bodu P ke všem kulovým plochám, které procházejí body A, B . Délka t je vztahem (1) jednoznačně určena. Tečny PT_i ploch κ_i , které se dotýkají roviny ϱ v bodech T_i , mají tedy dotykové body na kružnici $k \equiv (P, t)$ roviny ϱ .

Necht tedy bod S je středem jedné z kulových ploch κ_i . Potom a) musí být splněn vztah $SA = SB$, b) dále musí pata T kolmice z bodu S sestrojena k rovině ϱ ležet na kružnici k (viz obr. 13). Vztah a) vyžaduje, aby bod S ležel

Z vlastností velikostí aritmetického a geometrického průměru čísel, protože je $PA \neq PB$, vyplývá nerovnost

$$\sqrt{PA \cdot PB} < (PA + PB) : 2,$$

tj. $PO > PT$. Protože rovina $\sigma \perp AB$ prochází bodem O , platí o vzdálenosti d její průsečnice s s rovinou ϱ tím spíše, že $d > PT$, takže přímka s leží vně kružnice k a tím i všechny body elipsy e v poloprostoru (ϱ, A) .

Obráceně, zvolíme-li na elipse e libovolný bod S_i , náleží rovině σ , v níž leží elipsa e , takže platí vztah: $S_iA = S_iB$. Sestrojíme-li dále bodem S_i přímku $q_i \perp \varrho$, náleží přímka q_i ploše V a protíná rovinu ϱ v bodě T_i na kružnici k . Sestrojíme-li nyní kulovou plochu κ o středu S_i , která prochází body A, B a má tedy poloměr $r_i = S_iA = S_iB$, pak pro mocnost M bodu P vzhledem k ploše κ platí jednak vztah

$$(1) \quad M = PA \cdot PB = PT_i^2$$

a dále vztah

$$M = (PS_i + r_i) \cdot (PS_i - r_i) = PS_i^2 - r_i^2,$$

takže je $PS_i^2 - r_i^2 = PT_i^2$.

Ale v pravouhlém trojúhelníku $\triangle S_iT_iP$ (viz obr. 13) platí

$$PT_i^2 = PS_i^2 - S_iT_i^2,$$

takže z posledních dvou rovnic dostáváme, že

$$PS_i^2 - ST_i^2 = PS_i^2 - r_i^2$$

a odtud

$$S_iT_i = r_i (= S_iA = S_iB).$$

To znamená, že kulová plocha κ se dotýká roviny ϱ a že náleží množině κ_i , což jsme chtěli dokázat.

Závěr. G. m. středů kulových ploch κ_i , které se dotýkají dané roviny ϱ a které procházejí danými body A, B (pokud přímka AB není rovnoběžná s rovinou ϱ), je elipsa, která ve zvláštním případě, je-li $AB \perp \varrho$, je kružnicí.

Poznámka. K řešení naší úlohy jsme mohli také použít, kromě roviny σ , rotačního paraboloidu P s ohniskem v bodě A a s řídící rovinou ϱ (viz úlohu 2, kap. 2). Protože je možno každou rovinu (která není rovnoběžná s osou paraboloidu P) považovat za rovinu souměrnosti ohniska A paraboloidu P a určitého bodu B , je průsek této roviny s plochou P g. m. středů kulových ploch naší úlohy. Podle řešení uvedeného dříve, dospíváme tu k známé geometrické větě o průseku e roviny σ , která není kolmá k rovině ϱ , s rotačním paraboloidem:

Elipsy ležící na rotačním paraboloidu promítají se kolmo na roviny, které jsou kolmé k ose paraboloidu, do kružnic (v našem případě elipsa e do kružnice k).

(Použití této věty viz v autorově stati „Užití plochy rotačního paraboloidu k řešení planimetrických úloh“ v publikaci: *O rovinných konstrukcích odvozených z prostorových útvarů*, Cesta k vědě, svazek 47, JČMF 1944, str. 35—41.)

Úloha 15. Je dána rovina ϱ , přímka p různoběžná s rovinou ϱ a na přímce p bod $A \notin \varrho$. Určete g. m. středů kulových ploch, které se dotýkají roviny ϱ a přímky p v bodě A . [Buď elipsa nebo kružnice.]

9. Je dána plocha P skládající se z dvou kulových vrchlíků o společné hraně: První vrchlík náleží kulové ploše $K(O, r)$ a má výšku $v > r$, druhý vrchlík, který leží uvnitř prvního vrchlíku, náleží kulové ploše $K'(O', r')$ a má výšku $v' < r'$. Určete g. m. středů S_i kulových ploch κ_i , které jsou vepsány do plochy P .

Podle obrázku 14 platí tyto vztahy:

$$OS = OT - ST = r - x, O'S = O'T' + T'S = r' + x.$$

Proto je

$$OS + O'S = r + r' > OO',$$

což znamená, že součet vzdáleností bodu S od daných bodů O, O' je konstantní. Odtud vyplývá, že bod S leží na oblouku ABC elipsy e , která má ohniska v bodech O, O' a která prochází body A, B . Úsečka OO' má délku, jež udává velikost dvojnásobku lineární excentricity elipsy e , a střed úsečky OO' je středem elipsy e . Tím je elipsa e určena.

Obráceně platí, že každý bod S_i , který leží uvnitř oblouku ACB (rovněž i bod C), může být středem kružnice k_i , kterou lze vepsat do útvaru (k, k') , což vyplývá z předchozích úvah.

Rotací roviny ω a oblouku ACB kolem osy $o \equiv OO'$ vytvoří oblouk ACB plochu E , a to část plochy rotačního protáhlého elipsoidu s ohnisky v bodech O, O' , omezenou kruhovou hranou, která je společnou hranou daných vrchlíků. *Plocha E s vyloučením bodů své kruhové hrany je pak g. m. středů kulových ploch hledaných v naší úloze, neboť obsahuje zřejmě středy S_i kulových ploch κ_i , a obráceně, každý bod plochy E kromě bodů její kruhové hrany dává střed jedné kulové plochy κ_i , jak vyplývá z předchozích úvah.*

Úloha 16. Je dáno těleso T , které je průnikem dvou koulí $K(O, r), K'(O', r')$ různých poloměrů.⁷⁾ Určete g. m. středů kulových ploch, které jsou vepsány do tělesa T . [Část rotačního hyperboloidu dvoudílného, jehož ohniska jsou v bodech O, O' .]

⁷⁾ Tj. za předpokladu $|r - r'| < OO' < r + r'$.

Úloha 17. Je dána polosféra na kulové ploše $\kappa_1 \equiv (O, r)$ sestrojená nad rovinou ϱ rovnou plochy κ_1 a kulová plocha $\kappa_2 \equiv (O', \frac{1}{2}r)$, které se dotýká κ_1 a ϱ . Určete g. m. středů koulí, které se dotýkají κ_1 , κ_2 a ϱ . [Kružnice v rovině rovnoběžné s ϱ o středu na úsečce OO' a poloměru velikosti $r \frac{\sqrt{2}}{2}$.]

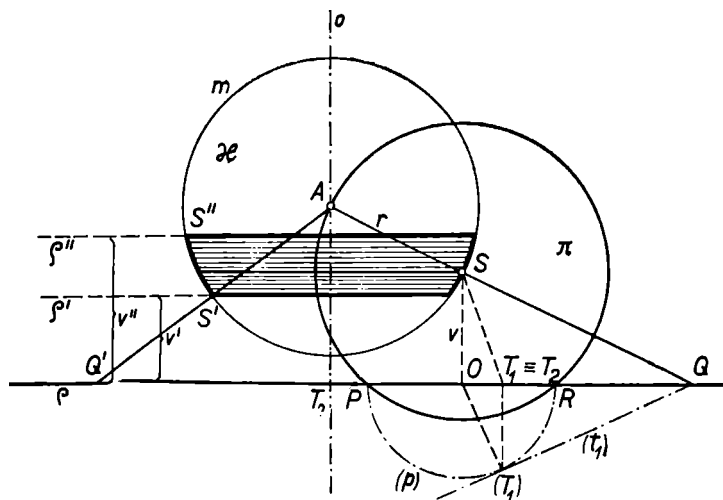
10. Je dána rovina ϱ a bod A , který má od roviny ϱ vzdálenost d ($0 < d \leq 2r$). Určete g. m. středů kružnic k_i daného poloměru $r > 0$, které se dotýkají roviny ϱ a procházejí bodem A .

Řešení. Rovina ϱ se dotýká kružnice k , má-li s ní společný právě jeden bod. Potom i průsečnice roviny kružnice k s rovinou ϱ je tečnou kružnice k .

Střed S_i každé kružnice k_i o poloměru r , která prochází daným bodem A , má od bodu A vzdálenost $S_iA = r$. Body S_i hledaného g. m. b., pokud existují, leží tedy jedině na kulové ploše κ se středem v bodě A a s poloměrem velikosti r . Sestrojíme-li jeden bod S našeho g. m., pak všechny body S_i vzniklé z bodu S otočením kolem přímky o , která prochází bodem A a je kolmá k rovině ϱ , náležejí hledané g. m. Přímka o je totiž osou nejen plochy κ , ale i roviny ϱ . Body S_i odvozené z bodu S touto rotací vyplní na ploše κ kružnici ležící v rovině rovnoběžné s rovinou ϱ . Stačí tedy vyhledat body S_i na meridiánu m (viz obr. 15a) plochy κ , který tvoří obrys pravoúhlého průmětu plochy κ do roviny proložené přímkou o . Z nich dostaneme potom všechny ostatní body hledaného g. m. otočením kolem přímky o .

Nechť bod S zvolený na meridiánu m plochy κ je tedy bodem našeho g. m. Pak přímka SA je průměrem kružnice k o středu S . Všecky kružnice o středu S a poloměru rovném r vyplní kulovou plochu $\pi(S, r)$. Z nich

vedou k řešení dané úlohy ty kružnice na ploše π , jež se dotýkají průsečnice své roviny σ s rovinou ρ . Rovina σ protne tedy rovinu ρ v tečně kulové plochy π .



Obr. 15a

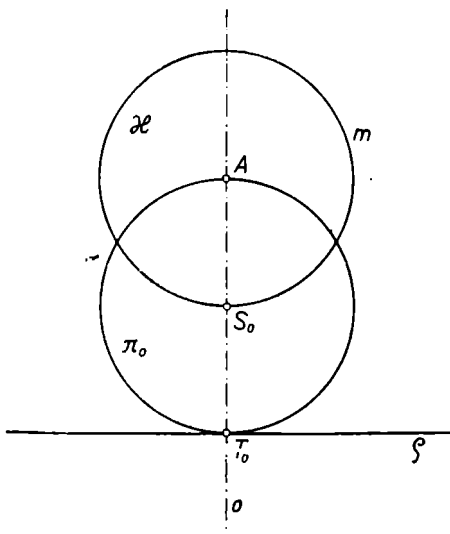
Aby bylo možno tento požadavek splnit, je třeba a stačí,
aby

a) kulová plocha π měla s rovinou ρ alespoň společný bod a aby současně

b) průsečík Q přímky AS s rovinou ϱ , jímž jde průsečnice hledané roviny σ s rovinou ϱ , neležel uvnitř koule omezené plochou π . Poznamenejme, že v případě, že bod Q neexistuje, tj. je-li $AS \parallel \varrho$, je průsečnice roviny hledané kružnice s rovinou ϱ rovnoběžná s přímkou AS .

Je tedy zřejmě nutné, aby o vzdálenosti v bodu S od roviny ϱ platilo:

Jednak a) $v \leq r$ a dále b) $v \geq \frac{1}{2}d$ (neboť musí platit $SQ \geq SA$, tj. $SQ \geq \frac{1}{2}AQ$ a proto $v \geq \frac{1}{2}d$). Body S_i nemohou podle toho ležet vně kulového pásu omezeného



Obr. 15b

rovinami $\varrho' \parallel \varrho$, $\varrho'' \parallel \varrho$, přičemž roviny ϱ' a ϱ'' , ležící v poloprostoru (ϱ, A) , mají od roviny ϱ vzdálenosti $\frac{1}{2}d$ resp. r .

Odtud ihned vyplývá:

a) G. m. naší úlohy je *jediný* bod S_0 plochy π v případě, kdy je $d = 2r$ (viz obr. 15 b). Všechny kružnice $k_i(S_0, r)$, které procházejí bodem A a dotýkají se roviny ϱ v společ-

některý bodě T_0 ($AT_0 \perp \varrho$), vyhovují požadavkům úlohy a žádné jiné.

b) Jestliže je $d > 2r$, je třeba body S hledat jenom na té části meridiánu m plochy κ , která náleží kulovému pásu určenému rovinami ϱ' , ϱ'' . A skutečně, zvolíme-li na oblouku m libovolný bod S uvnitř kulového pásu (ϱ' , ϱ''), tj. ve vzdálenosti v od roviny ϱ , o níž platí $\frac{1}{2}d < v < r$, potom plocha $\pi(S, r)$ protne rovinu ϱ v kružnici p . (Na obr. 15a je (p) obrazem kružnice p sklopené do roviny meridiánu m .) Dále: z bodu Q , který leží v tomto případě vně plochy π a tedy i vně kružnice p , lze vésti k p dvě tečny, t_1 a t_2 , — dvě průsečnice rovin σ_1 a σ_2 s rovinou ϱ ; v rovině $\sigma_1 \equiv (A, t_1)$ a $\sigma_2 \equiv (A, t_2)$ lze sestrojit dvě kružnice, k_1 a k_2 , které procházejí bodem A , mají poloměr velikosti r a dotýkají se roviny ϱ , jak žádá naše úloha.

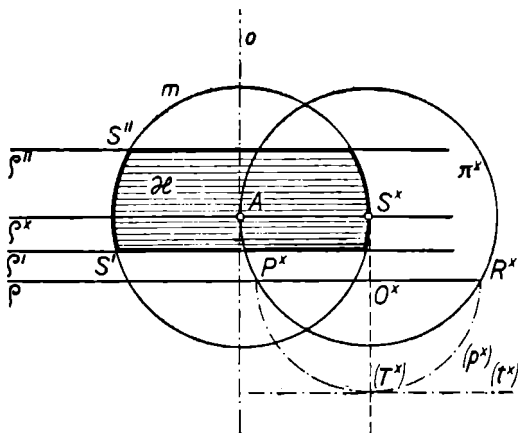
Zvolíme-li dále bod S' v rovině ϱ' , tj. ve vzdálenosti $v' = \frac{1}{2}d$ od roviny ϱ , potom příslušný bod Q' padne na kružnici p' a tečna v něm sestrojená k p' je průsečnicí roviny jediné kružnice k' , která vyhovuje požadavkům úlohy. Její rovina je kolmá k rovině meridiánu m .

Konečně, zvolíme-li bod S'' v rovině ϱ'' , tj. ve vzdálenosti $v'' = r$ od roviny ϱ , pak plocha $\pi''(S'', r)$ se dotýká roviny ϱ v bodě T'' . Rovina $\sigma_2 \equiv (AS''T'')$ je totožná s rovinou meridiánu m a v té leží také kružnice k'' , jež splňuje podmínky úlohy.

Podle toho každý bod oblouku $\widehat{S'S''}$ patří vyšetřovanému g. m. Otočením oblouku $\widehat{S'S''}$ kolem osy o vznikne kulový pás (ϱ' , ϱ'') omezený kružnicemi plochy κ , které leží v rovinách ϱ' a ϱ'' ; ten tvoří hledané g. m.

Poznámka. Na obr. 15 c) je znázorněn případ b) takový, kdy naše g. m. obsahuje také rovník plochy κ v rovině ϱ^* . Pro body S^* rovníku dostaneme dvě kružnice, $k^*_{1,}$ $k^*_{2,}$ neboť sestrojíme-li plochu $\pi^* \equiv (S^*, r)$ potom π^* nutně

protne rovinu ϱ v kružnici p^* o středu O^* (její obraz na obr. 15 c) je úsečka P^*R^*). Její dvě tečny rovnoběžné s přímkou AS určují s bodem A roviny kružnic k^*_1, k^*_2 , které odpovídají podmínkám naší úlohy.



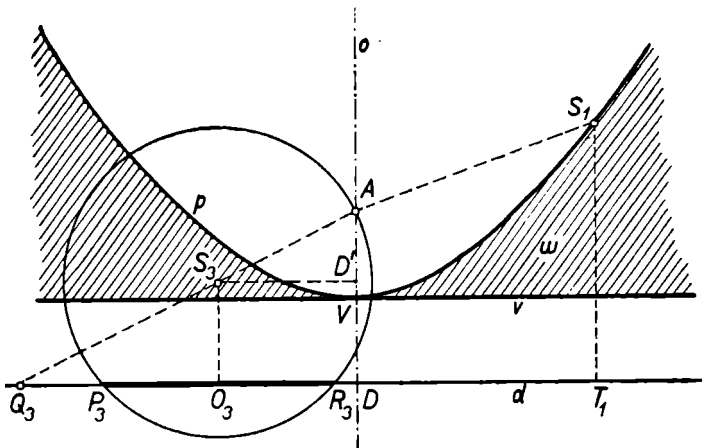
Obr. 15c

11. Je dána rovina ϱ a bod A , jehož vzdálenost od roviny ϱ má velikost $d > 0$. Určete g. m. středů kružnic, které procházejí bodem A a které se dotýkají roviny ϱ .

Řešení. Víme, že rovina ϱ a bod A určují plochu P rotačního paraboloidu jakožto g. m. středů kulových ploch, které se dotýkají roviny ϱ a které procházejí bodem A . Přitom bod A je ohniskem a rovina ϱ řídící rovinou paraboloidu P (viz úlohu 2 kapit. 2). Libovolná rovina μ proložená bodem A kolmo k rovině ϱ má s plochou P společnou parabolu p , která má ohnisko v bodě A a řídící přímkou v průsečnici d roviny μ s rovinou ϱ (viz obr. 16). Parabola p tvoří jeden meridián plochy P .

Protože daný útvar, tj. rovina ϱ a bod A nemění svou polohu při otáčení kolem osy o , je hledané g. m. útvarem rotačním s osou o .

Najdeme-li tedy v rovině μ středy S_i kružnic k_i , které vyhovují podmínkám naší úlohy, pak body vzniklé otočením všech bodů S_i kolem přímky o vyplní hledané g. m.



Обр. 16

Hledejme proto zatím jenom body S_i v rovině paraboly p .

a) Každý bod S_1 , který leží na parabole p , náleží hledanému g. m., neboť lze z každého bodu paraboly p sestrojit kružnici k_1 (S_1, S_1A), která se dotýká přímky d , a proto i roviny q , v bodě T_1 na přímce d , jak plyne z definice paraboly p .

b) Body S_2 , zvolené uvnitř paraboly p , mají tu vlastnost, že jejich vzdálenosti od přímky d jsou větší než délka

úsečky S_2A , takže příslušná kulová plocha π_2 (S_2 , S_2A) nemá s rovinou ϱ žádný společný bod, což znamená, že body S_2 nenáležejí hledanému g. m.

c) Zvolíme-li dále bod S_3 vně paraboly p , a jak hned ukážeme, pouze v oblasti ω roviny μ , ohraničené parabolou p a její vrcholovou tečnou v , náleží i bod S_3 našemu g. m. Každý bod S_3 ležící uvnitř oblasti ω má, jak známo, tu vlastnost, že jeho vzdálenost od přímky d je menší než délka úsečky S_3A . Sestrojíme-li tedy kulovou plochu π_3 (S_3 , S_3A), protne rovinu ϱ v kružnici p_3 o středu O_3 (na obr. 16 je zobrazena kružnice p_3 jako úsečka P_3R_3). Přímka AS_3 , pokud není rovnoběžná s přímkou d , protne rovinu ϱ (a přímku d) v bodě Q_3 , který padne vně kružnice p_3 . Je totiž $S_3O_3 > S_3A$ (neboť je $D'D > AD'$), a tedy bod O_3 vně plochy π_3 . Z bodu Q_3 lze pak vést ke kružnici p_3 dvě tečny t_3 a t'_3 s dotykovými body T_3 a T'_3 . Potom je už možno sestrojit kružnice k_3 (S_3 , S_3A) a k'_3 (S_3 , S_3A) v rovinách $\sigma_3 \equiv (S_3, t_3)$ a $\sigma'_3 \equiv (S_3, t'_3)$, které procházejí bodem A a dotýkají se roviny ϱ , tj. její přímky t_3 resp. t'_3 v bodě T_3 resp. T'_3 . Kružnice k_3 a k'_3 splňují podmínky naší úlohy, takže bod S_3 náleží hledanému g. m.

Ještě poznamenejme, že v případě, kdyby bylo $AS_3 \parallel d$, byly by příslušné tečny t_3 a t'_3 rovnoběžné s přímkou AS_3 .

d) Rovněž body S_i přímky v náležejí našemu g. m.; odůvodnění je stejné jako pro body S_3 jen s tím rozdílem, že v tomto případě padne příslušný bod $Q_i \equiv S_iA.d$ na kružnici $p_i \equiv \pi_i.\varrho$, kde π_i je kulová plocha obdobná ploše π_3 .

e) Zvolíme-li konečně bod S_4 uvnitř poloroviny vytažené přímkou v , která obsahuje přímku d , nevede bod S_4 k řešení naší úlohy. Důkaz ponecháme už čtenáři.

V odstavcích a) až e) jsme uvažovali o všech bodech roviny μ , takže naše úloha je úplně řešena. Odtud vyplývá tento závěr :

G. m. středů kružnic, které procházejí daným bodem A a které se dotýkají dané roviny ϱ , je část poloprostoru (ϱ' , A), vytaženého vrcholovou tečnou rovinou ϱ' paraboloidu P, vzniklá z něho vyloučením všech bodů, které leží uvnitř rotačního paraboloidu P.

Body tohoto g. m. dostaneme z bodů rovinné oblasti ω , ohraničené parabolou p a její vrcholovou tečnou v, rotací oblasti ω kolem přímky o, která je osou souměrnosti oblasti ω .

12. Jsou dány dvě rovnoběžné (různé) roviny $\varrho \parallel \sigma$ a přímka p, která neleží v žádné z nich. Určete g. m. středů a) kulových ploch, b) kružnic, které se dotýkají rovin ϱ , σ a přímky p.

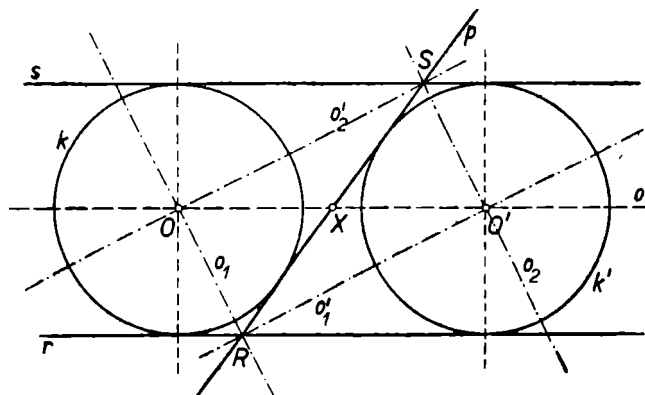
Řešení. a) Kulové plochy κ_i , které se dotýkají dvou rovnoběžných rovin ϱ , σ , jichž vzdálenost má velikost $v > 0$, tj. jsou vepsány do rovinové vrstvy o výšce velikosti v, mají průměr rovný $v = 2r$, kde r je velikost poloměru ploch κ_i . Střed y ploch κ_i vyplňují rovinu $\omega \parallel \varrho$ (σ) souměrnosti dané vrstvy.

Je-li přímka p tečnou kulové plochy κ , která má poloměr velikosti r, potom střed S plochy κ má od přímky p vzdálenost velikosti r. Střed y S_i všech ploch κ_i (r), které se dotýkají přímky p, vyplní rotační válcovou plochu V o ose v přímce p a poloměru řídící kružnice o velikosti rovné r.

Odtud plyne, že střed S_i kulové plochy κ_i , která se dotýká rovin ϱ , σ a přímky p, leží na průseku e roviny ω a plochy V. Obráceně, zvolíme-li na průseku e libovolný bod S_i , potom jeho vzdálenost od rovin ϱ a σ i od přímky p má velikost r; lze tedy okolo bodu S_i opsat kulovou plochu κ_i , která se dotýká rovin ϱ a σ i přímky p. Proto g. m. b. S_i je průsek $e \equiv \omega \cdot V$, a to:

(1) *elipsa (nebo kružnice)* v případě, že je daná přímka p různoběžná s rovinou ϱ (i σ),

(2) *dvě přímky* (náležející ploše V) ležící v rovině ω v případě, že přímka p je rovnoběžná s rovinou ϱ a σ a leží uvnitř rovinové vrstvy (ϱ, σ) .



Obr. 17

(3) Úloha *nemá řešení*, leží-li přímka $p \parallel \varrho$ (σ) vně rovinové vrstvy (ϱ, σ) . Příklad, kdy p leží v ϱ (nebo σ) je v textu úlohy vyloučen.

b) *Příklad (1)*. Necht přímka p je různoběžná s rovinou ϱ (i σ). Je-li přímka p tečnou kružnice k , o níž předpokládáme, že vyhovuje naší úloze, leží k v rovině α proložené přímkou p . Má-li se dále kružnice k dotýkat roviny ϱ a σ , musí rovina α obsahovat dvě tečny kružnice k , které tvoří průsečnice $r \equiv \alpha, \varrho$ a $s \equiv \alpha, \sigma$; při tom zřejmě platí, že je $r \parallel s$ (viz obr. 17). Proto kružnice k je vepsána do rovnoběžného pásu (r, s) roviny α a dotýká se přímky p . Jsou tedy v rovině α dvě kružnice k (O, u) a k' (O', u), které

vyhovují podmínkám úlohy. Jejich poloměr má velikost $u = \frac{1}{2} d$, kde d značí vzdálenost přímek $r \parallel s$.

Protože osy vedlejších úhlů přímek r, p a s, p jsou dvojice přímek o_1, o'_1 a o_2, o'_2 k sobě kolmých a přitom je $o_1 \parallel o_2$ a $o'_1 \parallel o'_2$, jsou pravoúhlé trojúhelníky $\triangle ROS$, $\triangle SO'R$ shodné s pravými úhly ve vrcholu O a O' . Označíme-li velikost jejich společné přepony $RS = q$, platí o jejich těžnicích OX a $O'X$ vztah

$$OX = O'X = \frac{1}{2} RS = \frac{1}{2} q,$$

což je úsečka dané velikosti. A to platí analogicky pro všechny roviny a_i svazku rovin o ose v přímce p . Leží tedy body O_i, O'_i na kružnici $m(X, \frac{1}{2} q)$, která leží v rovině $\omega \parallel \varrho(\sigma)$, v rovině souměrnosti dané vrstvy (ϱ, σ) .

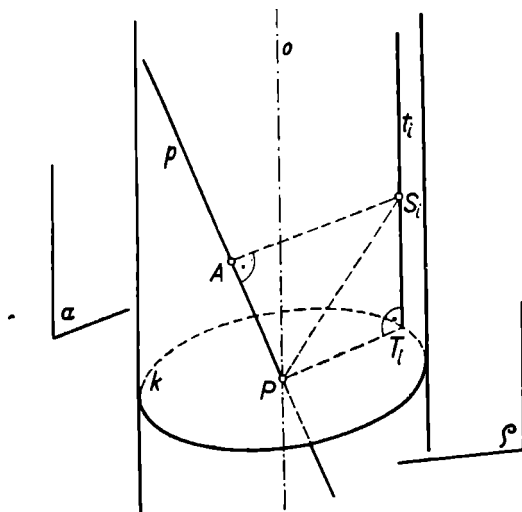
Obráceně, zvolíme-li na kružnici m libovolný bod O_i , potom lze v rovině $a_i \equiv (O_i p)$ vždy sestavit kružnici k_i , která vyhovuje podmínkám úlohy. Proto *g. m. středů kružnic, které se dotýkají daných rovin ϱ, σ a přímky p je kružnice m právě popsaná.*

Případ (2). Je-li daná přímka p rovnoběžná s rovinou $\varrho(\sigma)$, ale neleží v žádné z nich, nemá úloha řešení.

Úloha 18. Jsou dány dvě rovnoběžné roviny (různé) ϱ, σ a přímka p , která leží v jedné z nich. Určete g. m. středů a) kulových ploch, b) kružnic, které se dotýkají rovin ϱ, σ a přímky p . [a) Přímka $m \parallel p$, která je průsečnicí dvou rovin: roviny $\omega \parallel \varrho(\sigma)$ souměrnosti vrstvy (ϱ, σ) a roviny γ , proložené přímkou p tak, že je $\gamma \perp \omega$, b) rovina ω .]

13. Je dána rovina ϱ , přímka p různoběžná s rovinou ϱ a na přímce p bod A , který neleží v rovině ϱ . Určete g. m. středů a) kulových ploch, b) kružnic, které se dotýkají roviny ϱ a přímky p v bodě A .

Řešení. a) Nechť přímka p protíná rovinu ϱ v bodě P . Označme T dotkový bod roviny ϱ a plochy κ , která splňuje podmínky úlohy. Potom délky úseček PA a PT , tj. délky tečen vedených z bodu P k ploše κ jsou si rovny,

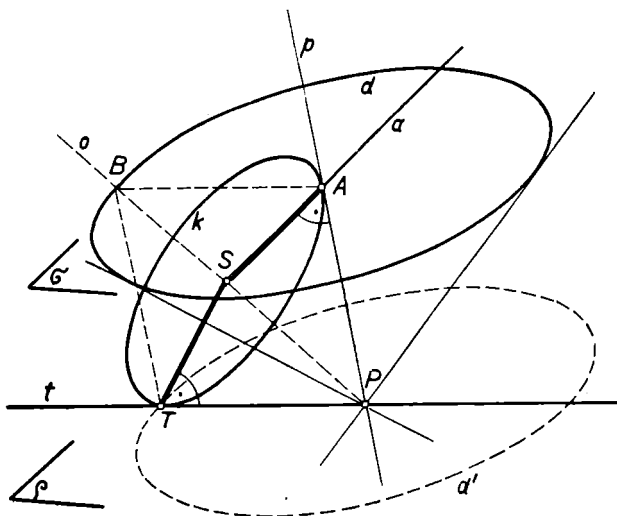


Obr. 18

tedy $PA = PT$. Pro různé plochy κ_i naší úlohy leží jejich dotkové body T_i s rovinou ϱ na kružnici k (P, PT_i) a středy S_i ploch κ_i na přímkách t_i vedených body T_i kolmo k rovině ϱ . (Viz obr. 18.) Přímky t_i vytvoří tedy rotační válcovou plochu V o ose $o \perp \varrho$ procházející bodem P ; kružnice k je její řídící kružnicí.

Dále víme, že g. m. středů kulových ploch, které se dotýkají přímky p v bodě A , je rovina α vedená bodem A kolmo k přímce p . Proto leží středy ploch κ_i na průseku e roviny

α s plochou V . Obráceně, zvolíme-li na e libovolný bod S_i , potom lze z bodu S_i opsat kulovou plochu $\kappa_i (S_i, r_i)$, která se dotýká přímky p v jejím bodě A , a jak hned dokážeme, i roviny ϱ v určitém bodě T .



Obr. 19

Důkaz. Bod S_i leží jednak v rovině α , jednak na ploše V , jejíž povrchová přímka $t_i \perp \varrho$ prochází zvoleným bodem S_i a protíná rovinu ϱ v bodě T_i ; přitom platí rovnost $PT_i = PA$. Proto jsou pravoúhlé trojúhelníky $\triangle PS_iA$ a $\triangle PS_iT_i$ shodné (mají společnou přeponu PS_i a shodné odvěsny PT_i, PA), takže je také $S_iA = S_iT_i = r_i$. Proto předpokládaný dotykový bod $T \equiv T_i$.

Je tedy *g. m. středu kulových ploch, které splňují podmínky*

naší úlohy, elipsa $e \equiv a.V$, která je v případě, že je $p \perp e$, kružnicí.

b) Kružnice k , která vyhovuje podmínkám úlohy b), leží v určité rovině α proložené přímkou p , již se kružnice k dotýká v bodě A ; kružnice k se dotýká také přímky $t \equiv \alpha.e$ v bodě T . Střed S kružnice k leží proto na ose o úhlu $\sphericalangle APT$ a dále na přímce a roviny α , vedené bodem A kolmo k přímce p (viz obr. 19). Bude účelné sestrojit v rovině α přímkou o jako úhlopříčku PB rovnoběžníka $PABT$, který je kosočtvercem (případně čtvercem), neboť platí rovnost $PA = PT$ (délky tečen vedených z bodu P ke kružnici k jsou stejně dlouhé).

Protože v každé rovině α_i svazku rovin o ose p platí $AB_i \# PT_i = AP$, vyplní body B_i kružnici d (A, AB), která leží v rovině $\sigma \parallel e$. Přímky PB_i , tj. osy úhlů $\sphericalangle APT_i$, vytvoří kuželovou plochu K , která má vrchol v bodě P a řídící kružnici d . Protože dále přímky a_i jakožto kolmice sestrojené k přímce p v bodě A leží v rovině $\omega \perp p$, jsou body S_i na průseku m roviny ω s plochou K .

K tomu ještě připomeňme, že body T_i leží v rovině e na kružnici d' (P, PA), shodné s kružnicí d .

Obráceně, zvolíme-li na průseku m libovolný bod S_i , potom lze kolem bodu S_i opsat kružnici k_i (S_i), která se dotýká přímky p v bodě A a roviny e v určitém bodě T_i .

Důkaz. Bodem S_i prochází na kuželové ploše K povrchová přímka PS_i , která určuje na kružnici d bod B_i . Rovina $\alpha_i \equiv (p, S_i)$ protíná rovinu σ v přímce AB_i a rovinu e v přímce $PT_i \parallel AB_i$, kde bod T_i je bodem kružnice d' . Úhlopříčka vzniklého kosočtverce B_iAPT_i je přímka PB_i , která obsahuje bod S_i . Přímka $S_iA \equiv \sigma.\omega$ je kolmá k přímce p . Ze souměrnosti kosočtverce B_iAPT_i podle jeho úhlopříčky PS_i vyplývá, že úsečka S_iT_i kolmá k PT_i je rovna úsečce S_iA , takže $S_iT_i = S_iA$ je poloměr hledané kružnice k_i .

Odtud vyplývá: *G. m. středů kružnic k_i , které splňují podmínky úlohy, je průsek $m \equiv \omega.K$, tj. buď elipsa,⁸⁾ nebo kružnice, a to ve zvláštním případě, je-li přímka p kolmá k rovině ϱ .*

Úloha 19. Je dána rovina ϱ , přímka p rovnoběžná s rovinou ϱ (neleží však v ϱ) a na přímce p bod A . Určete *g. m. středů kružnic, které se dotýkají přímky p v bodě A a roviny ϱ . [Přímka $m \equiv \omega.\sigma$, průsečnice roviny ω vedené bodem A kolmo k přímce p a roviny $\sigma \parallel \varrho$, při čemž rovina σ má od přímky p i od roviny ϱ vzdálenosti sobě rovné.]*

14. *Je dána kulová plocha $\kappa(S, r)$ a vně plochy κ bod V . Do plochy κ jsou vepsány komolé kužele K_i tak, že bod V je společným vrcholem úplných kuželů, příslušných kuželům K_i . Určete *g. m. b., které náležejí obvodům středních řezů M_i komolých kuželů K_i .**

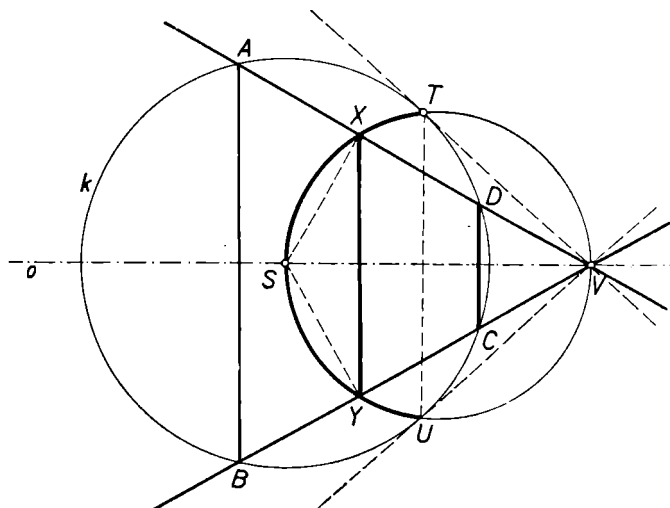
Poznámka. Ke každému komolému kuželi lze sestavit příslušný kužel doplňkový, který spolu s ním tvoří příslušný kužel úplný. Z tohoto kužele vznikne obráceně daný komolý kužel řezem, který leží ve vhodné rovině rovnoběžné s rovinou podstavu úplného kužele.

Řešení úlohy. Komolý kužel K vepsaný do plochy κ je nutně rotační, neboť obvody jeho podstav leží na ploše κ ; jsou to tedy kružnice v rovnoběžných rovinách, takže přímka o , která obsahuje středy těchto podstav, prochází středem S plochy κ a je osou komolého kužele K i plochy κ . Osa o prochází zřejmě i bodem V .

Sestrojíme libovolnou rovinu ω obsahující přímku o . Řez vzniklý na našem útvaru rovinou ω je znázorněn na obr. 20. Na ploše κ je to kružnice $k(S, r)$ a na kuželi K

⁸⁾ Elipsa je to proto, že všechny přímky PB_i kuželové plochy K svírají s přímkou PA úhly menší než R , při čemž rovina průseku je kolmá k přímce PA , takže protíná všechny přímky kuželové plochy K .

rovnoramenný lichoběžník $ABCD$, jehož ramena se v prodloužení protínají v bodě V . Náš prostorový útvar vznikne otáčením uvažovaného řezu ležícího v rovině ω kolem přímky o , takže se vyšetřování hledaných obvodů M_i převede na planimetrickou úlohu v rovině ω .



Obr. 20

Střední řez M na kuželi K protíná rovinu ω v úsečce XY , která tvoří střední příčku lichoběžníka $ABCD$. Její krajní body X, Y , jakožto středy úseček AD resp. BC leží na kruhovém oblouku $\widehat{TSU}$, který náleží Thaletově kružnici sestrojené nad průměrem SV , neboť je $SX \perp AD$ a $SY \perp BC$.

Obráceně: Zvolíme-li kterýkoliv vnitřní bod X_i oblouku $\widehat{TSU}$ (kromě bodu S), lze jím sestrojiti tětivu X_iY_i v oblouku $\widehat{TSU}$, kolmou k přímkce o ; úsečka X_iY_i určuje střední příčku příslušného lichoběžníka $A_iB_iC_iD_i$, kde body A_i, D_i leží na přímkce VX_i a body B_i, C_i na přímkce VY_i . Je totiž $SX_i \perp A_iD_i$ a proto platí $A_iX_i = X_iD_i$. Z vnitřních bodů oblouku $\widehat{TSU}$ je nutno vyloučit bod S , neboť nedává na oblouku $\widehat{TSU}$ žádnou tětivu. Také krajní body T, U oblouku $\widehat{STU}$ nevedou ke konstrukci lichoběžníka, protože přímky VT, VU jsou tečnami kružnice k a nevzniknou na nich žádné tětivy kružnice k , jež by měly být rameny lichoběžníka. Tím jsme dokázali planimetrickou větu: G. m. středů ramen všech rovnoramenných lichoběžníků vepsaných do dané kružnice k , přičemž ramena každého z těchto lichoběžníků se protínají v bodě V daném vně kružnice k , je kruhový oblouk $\widehat{TSU}$ až na jeho body T, S, U .

Rotací bodů X_i, Y_i kolem přímky o vznikají pak obvody středních řezů M_i kuželů K_i . Proto platí: *Obvody středních řezů M_i komolých kuželů K_i naší úlohy vyplní kulový vrchlík, který je průnikem plochy κ a Thaletovy kulové plochy sestrojené nad průměrem SV s vyloučením jeho hrany a jeho bodu ležícího na jeho ose.* Tím je hledané g. m. b. určeno.

15. *Je dán rotační válec V , jehož podstava má poloměr r a výška válce je v . Určete g. m. středů S_i koulí κ_i o poloměru dané velikosti ϱ , které lze celé umístit ve válci V .*

Řešení. Předpokládejme, že jsme z bodu S sestrojili kouli κ (S, ϱ), která je celá umístěna ve válci V . Potom bod S leží uvnitř válce V a má od všech bodů jeho po-

vrchu vzdálenosti, které jsou větší nebo rovné ϱ . Musí tedy bod S splňovat dvě podmínky; označme je A a B:

A) Bod S musí být od rovin podstav válce V vzdálen o délku větší nebo rovnou ϱ . Leží proto v průniku P dvou poloprostorů: jednoho opačného $k(\sigma, O)$, druhého opačného $k(\sigma', O')$, kde body O, O' , jsou středy podstav daného válce, a to O střed podstavy ležící v rovině π , O' střed podstavy ležící v rovině π' ; přitom rovina $\sigma \parallel \pi$ náleží poloprostoru (π, O') a je od roviny π vzdálena o délku rovnou ϱ a rovina $\sigma' \parallel \pi$ náleží poloprostoru (π', O) a je od roviny π' vzdálena opět o délku rovnou ϱ .

Obráceně, zvolíme-li libovolný bod S_p v útvaru P , lze z bodu S_p opsat kouli $\kappa_p(S_p, \varrho)$, která nemá společné body s žádnou z rovin π, π' , nebo se v krajním případě roviny π nebo π' dotýká. To znamená, že průnik P , pokud není prázdný, tj. pokud je $\varrho \leq \frac{v}{2}$, je g. m. středů S_p koulí

κ_p , které splňují podmínku A.

B) Bod S musí být od všech bodů pláště válce V vzdálen o délku větší nebo rovnou ϱ .

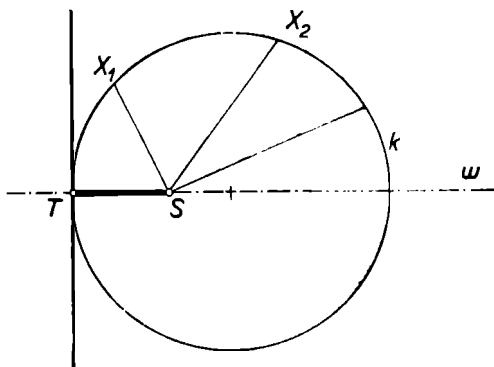
Tažme se dříve po vzdálenostech bodu S , který leží uvnitř válce V , od jeho stran.

Tyto vzdálenosti zjistíme v rovině μ proložené bodem S kolmo ke stranám válce V , tj. k jeho ose o . Jedná se zřejmě o vzdálenosti bodu S od bodů $T, X_1, X_2, \dots$ ležících na obvodu k kruhového řezu, který je průsekem válce V s rovinou μ (viz obr. 21a). Kdyby bod S ležel na ose OO' válce V , byly by jeho vzdálenosti od všech stran válce V stejné a měly by velikost rovnou r . Leží-li bod S mimo úsečku OO' , lze mluvit o jeho nejmenší vzdálenosti od stran válce V . Je to úsečka $ST = d < r$, obsažená v rovině $\omega \equiv (S, o)$.

Úsečka ST je také nejmenší ze všech úseček, které

bychom dostali spojením bodu S s body pláště válce V ; nazveme ji *vzdáleností bodu S od pláště válce V* .

Rovnoběžným posunutím bodu S ve směru přímky o tak, aby zůstal ve válci V , nebo otočením bodu S kolem přímky o , se vzdálenost d od pláště nezmění. Body tak



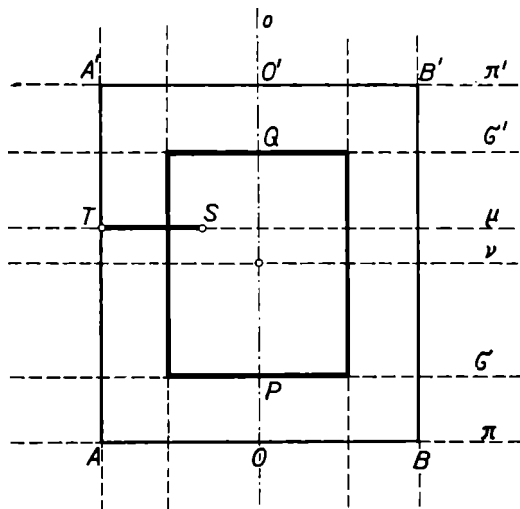
Obr. 21a

vzniklé vyplní plášť rotačního válce o ose OO' a poloměru rovném $r - d$. Každý bod tohoto válce má od pláště válce V vzdálenost větší nebo rovnou d a současně menší nebo rovnou r .

Podmínice B je tedy možno vyhovět jenom tehdy, když daný poloměr ϱ je menší nebo roven r , takže bod S náleží buď rotačnímu válci V' o ose OO' a poloměru $r - \varrho$, když je $\varrho < r$, nebo náleží úsečce OO' v případě, že je $\varrho = r$.

Obráceně, zvolíme-li libovolný bod S_0 tak, aby náležel válci V' případně úsečce OO' , je podle předchozí úvahy vzdálen od všech bodů pláště válce V o délku větší nebo

rovnou ϱ a lze z něho opsat kouli $\kappa_v (S_v, \varrho)$, která nemá s pláštěm válce V žádný společný bod, nebo se v krajním případě pláště válce V dotýká. Dospěli jsme tak ke g. m. středů S_v koulí κ_v , které splňují podmínku B.



Obr. 21b

V průniku obou g. m. P a V' , odvozených v odstavcích A, B, dostáváme už řešení naší úlohy, aniž je třeba pro důkaz tohoto řešení úvahu ještě obracet. G. m. hledaných středů S_i koulí κ_i naší úlohy je průnik útvarů P a V' .

Závěr. a) Je-li $\varrho < r$ a také $\varrho < \frac{v}{2}$, je g. m. středů koulí κ_i válec (na obr. 21b je vyznačen jeho osový řez) souosý

a soustředný s válcem V ; jeho podstavy mají poloměr rovný $r - \varrho$ a jeho výška má velikost $v - 2\varrho$.

b) Je-li $\varrho < r$ a $\varrho = \frac{v}{2}$ (možno jen když je $v < 2r$), je g. m. středů koulí κ_i *kruh*, a to průsek roviny $v \parallel \pi$, která je rovinou souměrnosti rovinové vrstvy (π, π') , s válcem V' . Tento kruh má střed na přímce o a poloměr rovný $r - \varrho$.

c) Je-li $\varrho = r$ a $\varrho < \frac{v}{2}$ (možno jen když je $v > 2r$) je g. m. středů ploch κ_i *úsečka* PQ ležící na ose o válce V (viz obr. 21b).

d) Je-li $\varrho = r$ a také $\varrho = \frac{v}{2}$, je hledaným g. m. pouze *jeden bod*, a to střed válce V . Je to střed koule vepsané rovnostrannému válci V .

e) Je-li $\varrho > r$ nebo $\varrho > \frac{v}{2}$, nemá naše úloha řešení.

Úloha 20. Určete g. m. středů koulí o daném poloměru ϱ , které lze celé umístit do kvádru o daných rozměrech $a \geq b > c$. [Kvádr, který má týž střed jako daný kvádr, stěny rovnoběžné se stěnami daného kvádru z rozměry $a - 2\varrho$, $b - 2\varrho$, $c - 2\varrho$.]

Úloha 21. Je dán rotační kužel K , jehož podstava má poloměr $r > 0$ a výška kužele je $v > 0$. Určete g. m. středů koulí, o daném poloměru $\varrho > 0$, které lze celé umístit do kužele K . [Rotační kužel souosý s daným kuželem a jemu podobný (popř. jediný bod, když je $\varrho = \frac{rv}{r + \sqrt{r^2 + v^2}}$).]

DOSLOV

Mnoho úloh, které se týkají vyšetřování g. m. b. v prostoru, najde čtenář v těchto knihách:

[1] V druhé části obsáhlé knihy *Ź. Hadamarda*, *Léçons de géométrie élémentaire*, která je snadno u nás dostupná v ruském překladu pod názvem: *Elementarnaja geometrija II, Stereometrija*, 3. vydání, Moskva 1958. Překlad byl pořízen za redakce prof. *D. I. Perepelkina* a kromě vlastního textu obsahuje řešení všech úloh z původní knihy Hadamardovy. Cena R 14,90.

[2] Dále v knize: *A. A. Straževskij*, *Zadači na geometričeskije mesta toček*; celá třetí kapitola knihy pojednává o g. m. b. v prostoru. Vyd. v Moskvě 1954. Cena R 3,40.

[3] Jako doplňkovou literaturu doporučujeme čtenáři učebnici: *Ź. Kounovský*, *F. Vyčichlo*, *Deskriptivní geometrie pro samouky*, vydanou JČMF v Praze 1948.

OBSAH

Úvod	3
Některá analogická g. m. b. v rovině a v prostoru (1—4)	7
Další příklady g. m. b. v prostoru (1—15)	16
Doslov	56

ŠKOLA MLADÝCH MATEMATIKŮ

JOSEF HOLUBÁŘ

geometrická
místa bodů
v prostoru

Pro účastníky matematické olympiády vydává

ÚV Matematické olympiády a ÚV ČSM

v nakladatelství Mladá fronta

Řídí akademik Josef Novák

Obálku navrhl Jaroslav Příbramský

Odpovědný redaktor Milan Daneš

Publikace číslo 2203

Edice Škola mladých matematiků, svazek 11

Vytiskl Mír, n. p., závod 2, provozovna 22,

Praha 2, Legerova 22

2,60 AA. 2,70 VA. D-03*50321

Náklad 7500 výtisků. 1. vydání

60 stran. Praha 1965. 63/III-7

23-016-65 03-2 Cena brož. výtisku Kčs 2,50

23

16

20



9



8

21

27



23-116-65
03-2
Cena brož.
Kčs 2,50