Konvexní útvary

Kapitola 3. Opěrné přímky konvexního útvaru v rovině

In: Jan Vyšín (author): Konvexní útvary. (Czech). Praha: Mladá fronta, 1964. pp. 32–48.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/403504

Kapitola 3.

OPĚRNÉ PŘÍMKY KONVEXNÍHO ÚTVARU V ROVINĚ

V kapitole 1. jsme vytvořili některé útvary, např. kruh, jako průniky nekonečně mnoha polorovin. Hranice těchto polorovin byly tečny příslušné kružnice; měly tedy tyto vlastnosti:

a) každá tečna obsahovala (aspoň jeden) hraniční bod kruhu;

b) celý útvar — kruh — ležel v téže polorovině vyťaté tečnou.

Obdobné přímky mají význam pro každý konvexní, ale i nekonvexní útvar; zavedeme pro ně název a vyslovíme definici.

Mějme útvar U v rovině ϱ. Nechť přímka p roviny ϱ má tyto vlastnosti:

a) obsahuje aspoň jeden hraniční bod útvaru U;

b) útvar U leží v jedné polorovině vyťaté přímkou p.

Takovou přímku p nazýváme *opěrnou přímkou* útvaru U; polorovinu s hranicí p, ve které leží útvar U, nazýváme *opěrnou polorovinou.*

Úloha 21. a) Udejte všecky opěrné přímky čtyřúhelníka $ABCD$ z obr. 1, které procházejí bodem A. Udejte všecky opěrné přímky téhož útvaru, které procházejí středem strany AB. Udejte všecky opěrné přímky téhož útvaru, které procházejí bodem C.

b) Udejte (z názoru) všecky opěrné přímky útvaru V z příkladu 8 (obr. 13), které procházejí bodem P; úlohu opakujte pro bod A. Udejte všecky opěrné přímky téhož útvaru, které jsou rovnoběžné s osou y. Obě svá tvrzení dokažte.

Poznámka. Úloha 21a ukazuje, že hraničním bodem nekonvexního útvaru nemusí procházet žádná opěrná přímka (takový je např. vrchol C čtyřúhelníka $ABCD$). Naproti tomu se dá dokázat, že *každým hraničním bodem konvexního útvaru prochází aspoň jedna opěrná přímka.* Některým hraničním bodem (ať konvexního či nekonvexního) útvaru může však procházet nekonečně mnoho opěrných přímek — jako např. bodem A v úloze 21a i 21b.

Příklad 10. Útvar U z úlohy 6 (obr. 7) má hraniční bod $H = [1, 1]$. Máme určit všecky opěrné přímky procházející bodem H.

Řešení. Žádná z hledaných opěrných přímek není rovnoběžná s osou y (proč?); rovnici každé hledané opěrné přímky p lze tedy napsat v tvaru

$$y = ax + b.$$

Protože přímka p prochází bodem $H = [1, 1]$, je $b = 1 - a$. Přímka p nemá žádný společný bod s kladnou poloosou y (obr. 16); proto je $a > 1$. Společné body křivky o rovnici $y = x^3$ a přímky p určíme řešením rovnice $x^3 = ax + 1 - a$ neboli

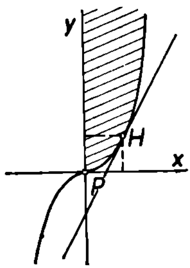
$$x^3 - ax + (a - 1) = 0. \qquad (15)$$

Jak víme, má rovnice (15) kořen $x = 1$, neboť přímka p prochází bodem H. Proto se dá mnohočlen na levé straně (15) rozložit v součin dvojčlenu $x - 1$ a jistého kvadratického trojčlenu $x^2 + cx + d$. Koeficienty c, d určíme z rovnice

$$x^3 - ax + (a - 1) = (x - 1)(x^2 + cx + d), \qquad (16)$$

která platí pro všecka x; vynásobením na pravé straně dostaneme

$$x^3 - ax + (a - 1) = x^3 + (c - 1)x^2 + (d - c)x - d. \quad (17)$$



Obr. 16

V rovnici (17) jsou koeficienty při týchž mocninách x sobě rovny; z toho vyplývá $c = 1$, $d = 1 - a$. Rovnice (15) má tedy podle (16) jednak kořen $x = 1$, jednak kořeny, které jsou řešením kvadratické rovnice

$$x^2 + x + 1 - a = 0.$$

Tato rovnice má při $a > 1$ vždy dva reálné kořeny

$$x = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{a - \frac{3}{4}}. \qquad (18)$$

Protože je $a > 1$, je $\sqrt{a - \frac{3}{4}} > \frac{1}{2}$ a jeden z kořenů (18) je kladný, druhý záporný. Protože však p je opěrná přímka, neobsahuje dva hraniční body s kladnými souřadnicemi

x (jinak by útvar U neležel v téže polorovině vyťaté přímkou p). Odtud vyplývá, že je podle (18)

$$\sqrt{a - \frac{3}{4}} - \frac{1}{2} = 1$$

a dále $a = \frac{9}{4} + \frac{3}{4} = 3$. Bodem H prochází tedy nejvýše jedna opěrná přímka o rovnici $y = 3x - 2$.

Abychom dokázali, že tato přímka je skutečně opěrná, musíme odůvodnit, že všecky body $[x, x^3]$ pro $x \geqq 0$ leží v téže polorovině s hranicí p. Za tím účelem vypočteme rozdíl $x^3 - (3x - 2)$ a použijeme k tomu rozkladu (16).

$$x^3 - (3x - 2) = x^3 - 3x + 2 = (x - 1)(x^2 + x - 2) = \\ = (x - 1)^2 (x + 2).$$

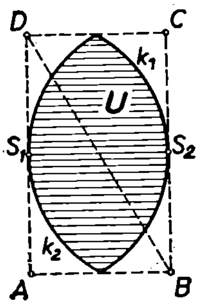
Odtud je vidět, že pro všecka $x \geqq 0$ je $x^3 - (3x - 2) \geqq \geqq 0$, a tím je dokázáno, že přímka p je skutečně opěrná.

Jak ukazuje názor, našli jsme takto tečnu v bodě ke křivce o rovnici $y = x^3$, zvané *kubická parabola* (viz úlohu 6).

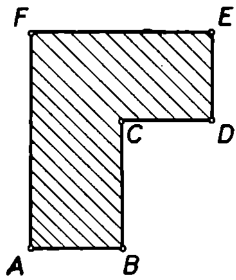
Úloha 22. Je dán útvar U omezený oblouky k_1, k_2 dvou shodných kružnic, jejichž středy jsou po řadě body S_1, S_2 (viz obr. 17), ležící vždy na druhém z oblouků. Útvaru U je opsán obdélník $ABCD$. Dokažte, že útvar U je konvexní a sestrojte všecky opěrné přímky rovnoběžné s úhlopříčkou BD (jsou dvě — jak ukazuje názor). Vyjádřete vzdálenost těchto dvou opěrných přímek pomocí poloměru r obou shodných kružnic. [Vyjde $r\,(2 - \frac{1}{2}\sqrt{3})$.]

Úloha 23. Na obr. 18 je nekonvexní šestiúhelník $ABCD$

EF; o jeho stranách platí $AB = CD = DE$, $BC = \frac{3}{2} AB$. Sestrojte opěrné polopřímky šestiúhelníka *ABCDEF* rovnoběžné s přímkou *AE* a vypočtěte jejich vzdálenost. [Položte $AB = 1$.]



Obr. 17



Obr. 18

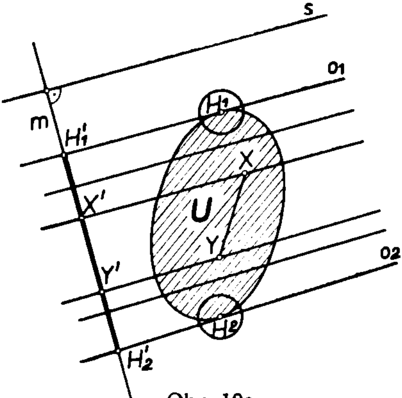
V úlohách 22 a 23 jsme viděli, že se nám podařilo uzavřít útvar konvexní či nekonvexní mezi dvě rovnoběžné opěrné přímky. Možnost této konstrukce vyplývá z jisté obecné věty, kterou nyní uvedeme.

IV. *Nechť je* U *útvar v rovině, s libovolná přímka této roviny. Pak existují nejvýše dvě opěrné přímky útvaru* U, *rovnoběžné s přímkou s.*

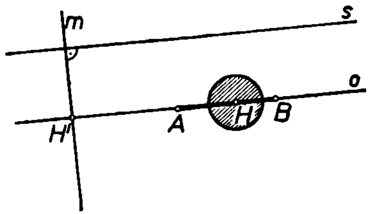
Dvě vysvětlivky: Slovo „nejvýše" znamená, že počet opěrných přímek směru *s* je buď 2 nebo 1 nebo 0. Věta IV platí pro jakýkoli útvar v rovině — tedy i nekonvexní, jak nasvědčuje ukázka z úlohy 23.

Příklad 11. Máme dokázat větu IV pro konvexní útvary v rovině.

Řešení (obr. 19a). Promítneme všecky body konvexního útvaru U směrem s na pevnou přímku m kolmou k přímce s. Jsou X', Y' průměty dvou bodů X, Y útvaru U a je-li



Obr. 19a



Obr. 19b

$X' \not\equiv Y'$, pak každý bod úsečky $X'Y'$ je průmětem některého bodu úsečky XY, tj. některého bodu útvaru U, který je konvexní. Z toho vyplývá, že množina U′ průmětů všech bodů útvaru U*) je konvexní útvar na přímce m. Je tedy U′ podle věty II buď jediný bod nebo úsečka nebo polopřímka nebo přímka m sama.

Je-li útvar U′ jediný bod H' (to může nastat např., když U je úsečka rovnoběžná s přímkou s), pak přímka $o \parallel s$ procházející bodem H', obsahuje aspoň jeden bod H útvaru U, který je hraniční. Tato situace je na obr. 19b;

*) Stručně bychom mohli nazvat množinu U′ *průmětem útvaru* U.

vysvětlete sami, proč je bod H hraničním bodem útvaru U. Přímka o je v tomto případě zřejmě opěrná.

Je-li útvar U′ úsečka — např. na obr. 19a úsečka $H_1'H_2'$, pak každá z přímek $o_1 \parallel s$, $o_2 \parallel s$ procházejících po řadě body H_1', H_2' buď obsahuje bod útvaru U nebo neobsahuje žádný bod útvaru U. Obsahuje-li např. přímka o_1 bod H_1 útvaru U, je tento bod hraničním bodem útvaru U; přímka o_1 je pak opěrnou přímkou útvaru, neboť celý útvar U leží v polorovině o_1H_2'. Zcela obdobné tvrzení platí i o přímce o_2.

V druhém případě, když o_1 neobsahuje žádný bod útvaru U, není to opěrná přímka. Jiné opěrné přímky mimo o_1, o_2 útvar U mít nemůže; proč? Jsou tedy v případě, že U′ je úsečka, opět nejvýše dvě opěrné přímky.

Obdobně vyšetříme další případy: je-li U′ polopřímka, má útvar U nejvýše jednu opěrnou polopřímku směru s, která prochází počátkem polopřímky U′. Je-li přímka U′, nemá útvar U žádnou opěrnou přímku směru s.

Úloha 24. Postupem z příkladu 11 vyhledejte všecky opěrné přímky daného útvaru U rovnoběžné s danou přímkou s.

a) Útvar U je polopřímka AB; $s \equiv AB$.
b) Útvar U je úsečka AB; $s \not\equiv AB$.
c) Útvar U je dán (v kartézských souřadnicích) nerovností $y \geqq x^2$; přímka s je osa y.
d) Útvar U je dán nerovnostmi $y \geqq |\operatorname{tg} x|$, $-\frac{1}{2}\pi < x < \frac{1}{2}\pi$; přímka s je osa y.
e) Útvar U je dán nerovnostmi $x > 0, y \geqq \frac{1}{x}$; přímka s je jednak osa x, jednak přímka $x + y = 0$.

Věty IV užíváme obyčejně v případě, kdy útvar U je jednak omezený, jednak když má aspoň jeden vnitřní bod; podle úmluvy ze str. 21 je také uzavřený. Takové jsou např. útvary z úloh 22 a 23.

Pro stručnější vyjadřování nazveme útvar v rovině, který má aspoň jeden vnitřní bod, *útvarem dvojrozměrným*. Je tedy např. čtverec útvar dvojrozměrný, naproti tomu jeho obvod nebo úsečka není útvar dvojrozměrný.

Větu IV pak lze nahradit určitější větou, která zní:

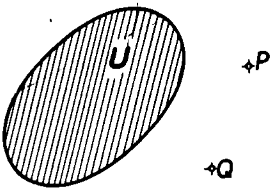
IV'. *Nechť je* U *omezený dvojrozměrný útvar, s libovolná přímka jeho roviny. Pak existují právě dvě (různé) opěrné přímky útvaru* U, *rovnoběžné s přímkou s.*

Větu IV' nebudeme dokazovat, neboť k jejímu důkazu nemáte potřebné znalosti. Hlavní obtíž při jejím dokazování je tato: musíme odůvodnit, že průmětem uzavřeného útvaru je uzavřený útvar, což vyžaduje jistý složitější postup.

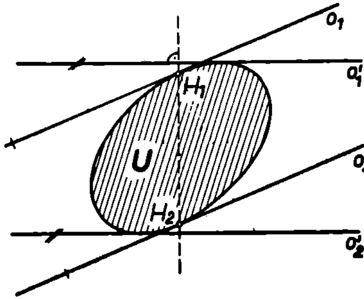
Větu IV' jsme už objasnili v úlohách 22 a 23; uvedeme ještě jednu ukázku.

Úloha 25.*Útvar U je omezen oválem z úlohy 3 (obr. 4a, b). Sestrojte v obou případech opěrné přímky rovnoběžné α) s přímkou AB, β) s přímkou GH. Vyjádřete vzdálenosti rovnoběžných opěrných přímek pomocí délek stran čtyřúhelníka $ABDE$.

Každé dvě navzájem rovnoběžné opěrné přímky omezeného dvojrozměrného útvaru mají určitou kladnou vzdálenost. Všecky tyto vzdálenosti tvoří jistou množinu čísel, která sice může být konečná (vzpomeňte na kruh!), ale zpravidla je nekonečná. Dá se dokázat, že mezi všemi vzdálenostmi rovnoběžných opěrných přímek je jedna největší a jedna nejmenší. To není samozřejmé: nekonečná množina kladných čísel nemusí obsahovat ani nejmenší ani největší číslo. Např. v množině $\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{4}{5}, \dots\right\}$ není žádné nejmenší ani žádné největší číslo, ačkoli všecka čísla jsou v intervalu (0, 1); dovedete to dokázat?



Obr. 20



Obr. 21

Zavedeme si názvy: největší vzdálenost dvou rovnoběžných opěrných přímek omezeného dvojrozměrného útvaru nazveme jeho *průměrem*, nejmenší takovou vzdálenost nazveme jeho *šířkou.*

Jaký je názorný význam těchto dvou pojmů? Představme si, že útvar U je vystřižen z papíru (viz obr. 20). Na podložce jsou vyznačeny křížky dva body P, Q. Dáme dvě otázky:

1. Zda lze vystřižený útvar U položit na podložku tak, aby zakryl oba body P, Q.

2. Zda lze vystřižený útvar U „provléci“ mezi body P, Q bez deformací.

Odpověď na první otázku zní: Je to možné jen v případě, že *průměr* útvaru U je větší nebo roven vzdálenosti PQ. Odpověď na druhou otázku zní: Je to možné jen v případě, že *šířka* útvaru U je menší nebo rovná vzdálenosti PQ.

Dříve než začneme vyšetřovat průměr a šířku některých útvarů, uvedeme ještě jednu větu, která nám při tomto vyšetřování pomůže.

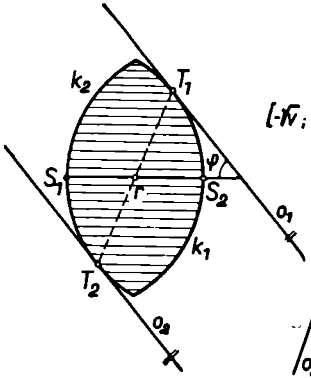
V. *Je-li vzdálenost dvou rovnoběžných opěrných přímek o_1, o_2 rovna průměru útvaru* U, *pak na každé z těchto přímek leží jediný hraniční bod a spojnice těchto dvou hraničních bodů je kolmá k přímkám o_1, o_2.*

Příklad 12. Máme dokázat (nepřímo) větu V.

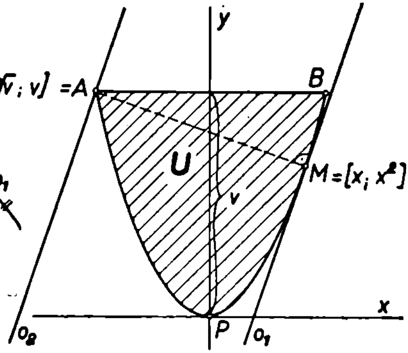
Řešení. Předpokládejme, že na opěrných přímkách o_1, o_2 lze najít po řadě hraniční body H_1, H_2 tak, že přímka H_1H_2 není kolmá k o_1 (obr. 21). Sestrojme obě opěrné přímky o_1', o_2' útvaru U, které jsou kolmé k přímce H_1H_2. Body H_1, H_2 náležejí pásu roviny omezenému přímkami o_1', o_2'; proto vzdálenost těchto dvou přímek je $d' \geqq H_1H_2$. Protože přímka H_1H_2 není kolmá k o_1, platí pro vzdálenost d přímek o_1, o_2 nerovnost $d < H_1H_2$. Spojením obou nerovností dostaneme vztah $d < d'$, což znamená, že d není průměr útvaru U. Tím jsme nalezli spor s předpokladem.

Úloha 26. a) Najděte průměr a šířku libovolného trojúhelníka. [Průměr je délka největší jeho strany, šířka je velikost nejmenší jeho výšky.]
b) Strany rovnoběžníka mají délky a, b, jeho výška na stranu a je v; přitom platí $a < b$. Vyjádřete průměr rovnoběžníka pomocí a, b, v a sestrojte obě opěrné přímky, jejichž vzdálenost je rovna průměru. Vyjádřete šířku rovnoběžníka pomocí proměnných a, b, v.

Úloha 27. Dokažte tuto větu: Je-li U omezený útvar v rovině a jsou-li A, B takové jeho dva body, že platí $AB \geqq XY$, kde X, Y jsou libovolné dva body útvaru U, pak vzdálenost AB je průměr útvaru U. [Návod: veďte opěrné přímky kolmé k přímce AB.]



Obr. 22



Obr. 23

Úloha 28. Vyšetřte průměr a šířku útvaru U z úlohy 22. Vyjádřete vzdálenost jeho dvou rovnoběžných opěrných přímek o_1, o_2 pomocí r, φ (viz obr. 22). [Vyjde $r\,(2 - \sin\varphi)$.]

Příklad 13. Útvar U je množina všech bodů v rovině, jejichž kartézské souřadnice splňují nerovnosti $y \geqq x^2$, $|x| \leqq \sqrt{v}$, kde v je dané kladné číslo. Máme zjistit průměr tohoto útvaru.

Řešení. Útvar U je úseč paraboly o rovnici $y = x^2$ načrtnutá na obr. 23. Jedna dvojice opěrných přímek navzájem rovnoběžných je přímka AB a osa x. Ty však neurčují podle věty V průměr útvaru, neboť přímka AB obsahuje nekonečně mnoho hraničních bodů. Průměr je tedy buď délka AB nebo vzdálenost dvou rovnoběžných opěrných přímek, z nichž jedna je tečna paraboly, druhá prochází bodem A. Nechť opěrná přímka o_1 je tečna v bodě $M = [x, x^2]$; pak její směrnice je — jak je známo z analytické geometrie — rovna $2x$. Směrnice přímky AM je číslo $\dfrac{x^2 - v}{x + \sqrt{v}} = x - \sqrt{v}$. Podmínka pro kolmost přímek o_1, AM zní $2x(x - \sqrt{v}) + 1 = 0$ neboli

$$2x^2 - 2\sqrt{v}\,x + 1 = 0. \tag{15}$$

Diskriminant rovnice (15) je roven $(4v - 2)$. Je-li tedy $v < 2$, nemá rovnice (15) reálný kořen; průměr útvaru U musí pak být délka $AB = 2\sqrt{v}$.

Je-li $v \geqq 2$, má rovnice (15) dva reálné kořeny dané vzorcem

$$x = \frac{1}{2}(\sqrt{v} \pm \sqrt{v - 2}). \tag{16}$$

Vypočteme pro oba kořeny vzdálenost AM. Platí

$$\begin{aligned} AM^2 &= (x^2 - v)^2 + (x + \sqrt{v})^2 = \\ &= (x + \sqrt{v})^2\,[1 + (x - \sqrt{v})^2]. \end{aligned} \tag{17}$$

Ze vzorce (16) dostaneme

$$x + \sqrt{v} = \frac{1}{2}(3\sqrt{v} \pm \sqrt{v - 2}),$$

$$x - \sqrt{v} = \frac{1}{2}(-\sqrt{v} + \sqrt{v-2});$$

dále je

$$\begin{aligned}(v + \sqrt{v})^2 &= \frac{1}{2}[5v - 1 \pm 3\sqrt{v(v-2)}],\\ 1 + (x - \sqrt{v})^2 &= \frac{1}{2}[v + 1 \mp \sqrt{v(v-2)}].\end{aligned} \tag{18}$$

Přitom platí zároveň buď obě horní znaménka nebo obě dolní znaménka. Ze (17) a (18) dostaneme po úpravě

$$AM^2 = [2v^2 + 10v - 1 \mp 2(v-2)\sqrt{v(v-2)}]. \tag{19}$$

Protože je $v \geqq 2$, je větší z obou čísel (19) dáno dolním znaménkem (plus). Průměr d útvaru U je tedy dán poměrně složitou formulí

$$d = \sqrt{2v^2 + 10v - 1 + 2(v-2)\sqrt{v(v-2)}}.$$

Připomeňme si, že jsme v kapitole 1. dokazovali konvexitu kruhu (i jiných útvarů) tím, že jsme ho vytvořili jako průnik jeho opěrných polorovin. Tento postup je východiskem k zavedení dalšího důležitého pojmu.

Má-li útvar U ležící v rovině aspoň jednu opěrnou polorovinu (to však nemusí nastat, viz úlohu 29), je průnik $\overline{\mathrm{U}}$ všech jeho opěrných polorovin podle věty I′ konvexní útvar. Průnik $\overline{\mathrm{U}}$ zřejmě obsahuje útvar U; přitom je $\overline{\mathrm{U}}$ jakýsi „nejmenší" konvexní útvar obsahující daný útvar U. Dá se totiž dokázat, že jakýkoli konvexní útvar V, který obsahuje daný útvar U, obsahuje také útvar $\overline{\mathrm{U}}$.

Zavedeme název:

Průnik všech opěrných polorovin daného útvaru U ležícího v rovině (tj. konvexní útvar $\overline{\mathrm{U}}$) nazýváme *konvexním obalem útvaru* U.

Nemá-li útvar U žádnou opěrnou polorovinu, pokládáme za jeho konvexní obal celou rovinu.

Úloha 29. V rovině je dána soustava kartézských souřadnic x, y. Útvar U se skládá ze všech bodů $[x, y]$, pro jejichž souřadnice platí $|xy| \leqq 1$. Načrtněte útvar U, dokažte, že je nekonvexní a že nemá žádnou opěrnou přímku (polorovinu).

Je-li daný útvar U omezený, má aspoň jednu opěrnou polorovinu, jeho konvexní obal není celá rovina — dokonce lze dokázat, že i jeho konvexní obal je omezený.

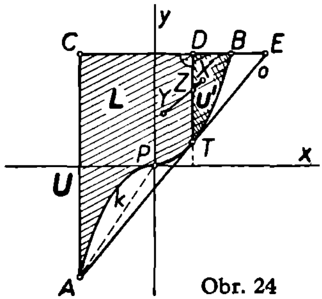
Úloha 30.*Dokažte, že konvexní obal omezeného útvaru je omezený útvar. Dokažte, že konvexní obal konvexního útvaru U je útvar U.

Úloha 31. Určete konvexní obal a) nekonvexního čtyřúhelníka $ABCD$ z obr. 1, b) nekonvexního šestiúhelníka $ABCDEF$ z obr. 18. Výsledky odůvodněte.

Příklad 14. V rovině je dána soustava kartézských souřadnic. Útvar U je množina všech bodů $[x, y]$, jejichž souřadnice splňují nerovnosti $|x| \leqq 1$, $x^3 \leqq y \leqq 1$. Máme načrtnout útvar U a zjistit, zda je konvexní či nekonvexní, po případě najít jeho konvexní obal.

Řešení. Na obr. 24 je načrtnuta část kubické paraboly k o rovnici $y = x^3$; dále je tu vyšrafován útvar U. Názor napovídá, že útvar U není konvexní; skutečně, např. bod $[-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}]$ náleží sice úsečce AP, ale nenáleží útvaru U, neboť je $(-\frac{1}{2})^3 > -\frac{1}{2}$.

Odhadneme konvexní obal. Vedeme-li bodem A opěrnou přímku, která mimo A obsahuje jediný hraniční bod



Obr. 24

T ležící v prvním kvadrantě na křivce k, pak útvar V složený z lichoběžníka L $\equiv ACDT$ a vyšrafovaného obrazce U' omezeného úsečkami DT, BD a obloukem BT křivky k má tyto vlastnosti:

a) je konvexní;

b) obsahuje útvar U;

c) je obsažen v konvexním obalu $\overline{\text{U}}$.

Z těchto tří vlastností můžeme usoudit podle poznámky na str. 44, že V je hledaný obal $\overline{\text{U}}$.

a) Důkaz konvexity útvaru V: Protože lichoběžník L i obrazec U' jsou konvexní (odůvodněte s pomocí úlohy 6), stačí dokázat, že úsečka XY, jejíž krajní bod X náleží obrazci U' a krajní bod Y lichoběžníku L, náleží celá útvaru U. Úsečka XY náleží trojúhelníku ACE, body X, Y jsou odděleny přímkou DT; proto úsečky DT, XY

mají společný jistý bod Z. Úsečka XZ náleží do U′ (U′ je konvexní), a tedy i do U. Úsečka YZ náleží do L (L je konvexní) a tedy i do U. *Závěr:* úsečka XY náleží skutečně celá útvaru U. Vlastnost b) je zřejmá, stejně tak i vlastnost c). Obal $\overline{\mathsf{U}}$ obsahuje totiž jednak útvar U′ (část útvaru U), jednak body A, C, D, T, tedy i lichoběžník L.

Zbývá určit bod T. Opěrná přímka o má rovnici

$$y = t(x + 1) - 1,$$

neboť prochází bodem $A = [-1, -1]$. S křivkou k má mimo A společný bod jediný T. Jeho souřadnice x je kořenem rovnice $x^3 = t(x + 1) - 1$, neboli

$$x^3 - tx + (1 - t) = 0. \tag{20}$$

Rovnice (20) má kořen $x = -1$ (přímka o prochází bodem A). Proto lze mnohočlen na levé straně (20) rozložit:

$$\begin{aligned} x^3 - tx + (1 - t) &= (x + 1)(x^2 + ax + b) = \\ &= x^3 + (a + 1)x^2 + (a + b)x + b. \end{aligned}$$

Z porovnání koeficientů u týchž mocnin x dostaneme $a = -1$, $b = 1 - t$. Souřadnice x bodu T je tedy kořenem rovnice

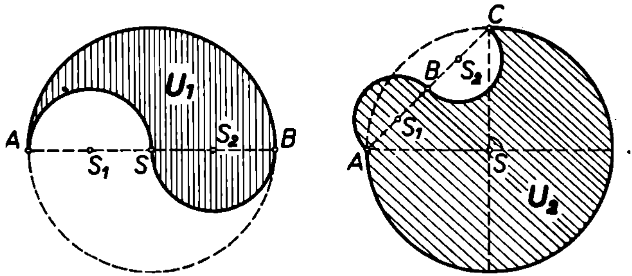
$$x^2 - x + (1 - t) = 0.$$

Tato rovnice musí mít kořen dvojnásobný, tj. platí $t - \frac{3}{4} = 0, t = \frac{3}{4}, T = \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{8}\right]$.

Tím je úloha úplně rozřešena.

Úloha 32. Určete průměr a šířku útvaru $\overline{\mathsf{U}}$ z příkladu 14.

Úloha 33.* V rovině je dána soustava kartézských souřadnic. Útvar U je množina všech bodů $[x, y]$, jejichž souřadnice splňují nerovnosti $|x| \leqq 2$, $0 \leqq y \leqq \dfrac{1}{1 + x^2}$. Načrtněte útvar U, zjistěte, zda je konvexní či nikoli, popřípadě odhadněte jeho konvexní obal.



a) Obr. 25 b)

Úloha 34.* Na obr. 25ab jsou vyšrafovány útvary U_1, U_2 omezené vesměs polokružnicemi. Dokažte, že oba útvary jsou nekonvexní, sestrojte jejich konvexní obaly a vypočtěte průměry i šířky těchto obalů.