

13. ročník matematické olympiády

IV. Riešenia úloh zo súťaže

In: Jan Vyšín (editor); Rudolf Zelinka (editor): 13. ročník matematické olympiády. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1963-1964. 6. Mezinárodní matematická olympiáda. (Slovak). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1965, pp. 32-123.

Terms of use:

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/404532>

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

IV. Riešenia úloh zo súťaže

1. ÚLOHY I. KOLA KATEGÓRIE A

1. Uďajte všetky prirodzené čísla n , pre ktoré číslo $n^8 - n^2$ nie je deliteľné číslom 504.

Riešenie. Číslo $N = n^8 - n^2$ je deliteľné číslom $504 = 7 \cdot 8 \cdot 9$ práve vtedy, keď je deliteľné každým z činiteľov 7, 8, 9, pretože každé dve z týchto čísel sú nesúdeliteľné. Pri vyšetrovaní deliteľnosti čísla N číslami 7, 8, 9 vyjadríme n postupne takto:

$$n = 7k_1 + z_1, \quad n = 8k_2 + z_2, \quad n = 9k_3 + z_3, \quad (1)$$

kde k_i, z_i ($i = 1, 2, 3$) sú nezáporné celé čísla a platí:

$$z_1 \leq 6, \quad z_2 \leq 7, \quad z_3 \leq 8.$$

Ak do N dosadíme z (1) za n , zistíme, že číslo N je deliteľné siedmimi (ôsmimi, deviatimi) práve vtedy, ak je týmto číslom deliteľné číslo $z_1^8 - z_1^2$ ($z_2^8 - z_2^2, z_3^8 - z_3^2$).

Prevedme rozklad

$$z^8 - z^2 = z^2 (z^3 - 1) \cdot (z^3 + 1)$$

a zostavme pomocou neho tabuľku (viď str. 33).

Z tejto tabuľky je vidieť, že každé z čísel $z^8 - z^2$ pre $0 \leq z \leq 8$ je deliteľné siedmimi a deviatimi; ôsmimi sú čísla $z^8 - z^2$ deliteľné len pre $z = 0, 1, 3, 4, 5, 7, 8$. To

z	$z^8 - z^2$
0	0
1	0
2	4 . 7 . 9
3	9 . 26 . 28
4	16 . 63 . 65

z	$z^8 - z^2$
5	25 . 124 . 126
6	36 . 215 . 217
7	49 . 342 . 344
8	64 . 511 . 513

znamená, že číslo N nie je deliteľné číslom 504 práve vtedy, keď má číslo n tvar

$$n = 8k + 2$$

alebo

$$n = 8k + 6,$$

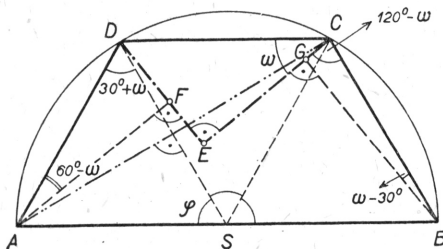
kde k je ľubovoľné celé nezáporné číslo.

2. Je dán rovnoramenný lichobežník $ABCD$, o jehož základňe AB platí $AB = 2BC = 2CD$. Uvnitř lichobežníku nad úsečkou CD jako přeponou sestrojíme pravoúhlý trojúhelník CDE , pro jehož úhel ω při vrcholu C platí $30^\circ < \omega < 60^\circ$. Označme F, G paty kolmic vedených po řadě body A, B k přímkám DE, CE .

Vypočítejte poměr obsahů obrazce $ABGEF$ a lichobežníku $ABCD$ použitím úhlu ω a vyšetřte, kdy je tento poměr minimální.

Řešení (obr. 1). Je-li S střed úsečky AB a φ velikosti shodných úhlů $\sphericalangle ASD, \sphericalangle BSC$, je $ASCD$ rovnoběžník (je $AS = CD, AS \parallel CD$); v něm platí $\sphericalangle SAD = 180^\circ - 2\varphi$ (úhel proti základně SD rovnoramenného trojúhelníku ASD , v němž podle textu úlohy je $AS = AD$), a tedy $\sphericalangle ASC = 2\varphi$ (jde o úhly přilehlé ke straně AS

rovnoběžníku $ASCD$). Je proto nutně $\sphericalangle CSD = \varphi$. Ze souměrnosti rovnoramenného lichoběžníku $ABCD$ vzhledem k jeho ose plyne, že i $\sphericalangle BCS = \varphi$; proto je $\varphi = \frac{1}{3} \cdot 180^\circ = 60^\circ$. Trojúhelníky ASD , BSC , SCD jsou proto vesměs rovnostranné a shodné. Bod E tedy vždy leží uvnitř trojúhelníku SCD a body F , G vždy po řadě padnou dovnitř úseček ED , EC .



Obr. 1.

Označme P obsah lichoběžníku $ABCD$, P_1 , P_2 , P_3 po řadě obsahy trojúhelníků CDE , ADF , BCG a P_4 obsah obrazce $ABGEF$ z textu úlohy. Je-li $\sphericalangle ECD = \omega$, potom snadno vypočteme, že $\sphericalangle CBG = \omega - 30^\circ$, $\sphericalangle ADF = \omega + 30^\circ$. Položme $CD = 1$, takže $AD = BC = 1$, $AB = 2$. Pak je

$$P = 3 \cdot \frac{1}{4} \sqrt{3} = \frac{3}{4} \sqrt{3}, \quad P_1 = \frac{1}{2} \sin \omega \cos \omega,$$

$$\begin{aligned} P_2 &= \frac{1}{2} \sin (\omega - 30^\circ) \cos (\omega - 30^\circ) = \\ &= \frac{1}{8} (\sin 2\omega - \sqrt{3} \cdot \cos 2\omega), \end{aligned}$$

$$P_3 = \frac{1}{2} \sin(\omega + 30^\circ) \cos(\omega + 30^\circ) = \\ = \frac{1}{8} (\sin 2\omega + \sqrt{3} \cdot \cos 2\omega).$$

Vypočteme poměr

$$x = \frac{1}{P} (P - P_1 - P_2 - P_3) = 1 - \frac{1}{P} (P_1 + P_2 + P_3) = \\ = 1 - \frac{1}{6\sqrt{3}} (2\sin 2\omega + \sin 2\omega - \sqrt{3} \cos 2\omega + \sin 2\omega + \sqrt{3} \cos 2\omega) = \\ = 1 - \frac{1}{6\sqrt{3}} \cdot 4 \sin 2\omega.$$

Hledaný poměr tedy je

$$x = 1 - \frac{2\sqrt{3}}{9} \sin 2\omega. \quad (1)$$

Minimum nastane, je-li druhý člen na pravé straně v (1) maximální, tj. je-li $\sin 2\omega = 1$ neboli je-li (jde o ostrý úhel ω)

$$\omega = 45^\circ;$$

pak je $x = 1 - \frac{2\sqrt{3}}{9} \doteq 0,6$. Tím je řešení provedeno.

Podle řešení Jiřího Kabele, 3. roč.
SVVŠ, Křesomyslova ul., Praha 4

3. V rovině je dán rovnoramenný trojúhelník ABC , jehož základna AB je menší než jeho rameno. Sestrojte uvnitř úseček CA , CB po řadě body X , Y a v polorovině XYC bod Z tak, aby platilo

$$\triangle XYZ \cong \triangle ABC.$$

Vyšetřte geometrické místo bodů Z .

Řešení (obr. 2). V trojúhelníku ABC označme $AC = BC = a$, $AB = c$, $\sphericalangle A = \sphericalangle B = \alpha$, $\sphericalangle C = \gamma$; je tedy

$$a > c, \quad \alpha > \gamma, \quad \alpha < 90^\circ, \quad \gamma < 90^\circ,$$

$$\alpha + \gamma = 180^\circ - \alpha > 90^\circ.$$

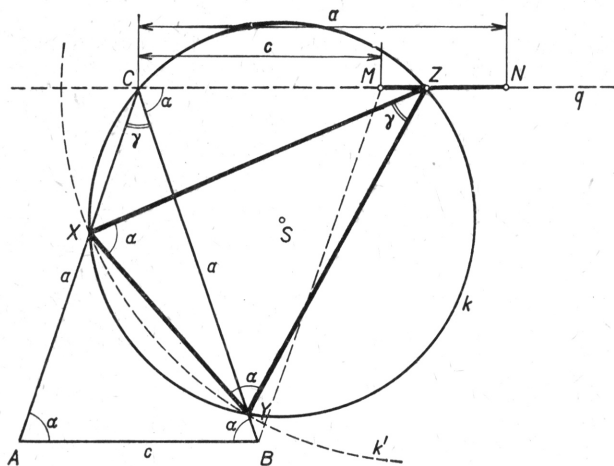
Je-li XYZ trojúhelník splňující požadavky textu úlohy, platí

$$ZX = ZY = a, \quad XY = c, \quad \sphericalangle X = \sphericalangle Y = \alpha, \quad \sphericalangle Z = \gamma.$$

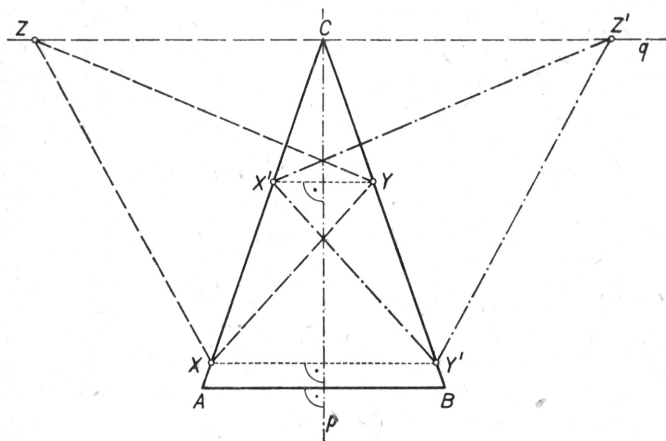
Body X, Y, Z, C jsou vesměs navzájem různé a platí $\sphericalangle XCY = \sphericalangle ACB = \gamma$. Podle textu úlohy leží body C, Z v téže polorovině vyřezané přímkou XY a platí $\sphericalangle XCY = \sphericalangle XZY$; proto body C, Z leží na větším oblouku jisté kružnice k , která prochází body X, Y . Jsou tedy X, Y, Z, C vrcholy jistého tětíkového čtyřúhelníku a jsou dvě možnosti:

a) Body X, Z jsou odděleny přímkou BC (obr. 2).

b) Body X, Z padnou do téže poloroviny vyřezané přímkou BC , a protože v tětíkovém čtyřúhelníku každá z úhlopříček odděluje jeden pár jeho protějších vrcholů, jsou nutně body Y, Z odděleny přímkou $AC \equiv XC$. Je-li p osa úsečky AB (obr. 3), označme $Y'X'CZ'$ obraz uvažovaného tětíkového čtyřúhelníku $XYCZ$ v souměrnosti o ose p , takže X, Y' a Y, X' jsou dvojice souměrně sdružených bodů a CA, CB souměrně sdružené přímky. Tu body X', Y' po řadě padnou dovnitř úseček CA, CB , trojúhelník $X'Y'Z'$ patří k případu a) a body X', Z' (což jsou obrazy bodů Y, Z) jsou odděleny přímkou BC . Tím je případ b) převeden na případ a). Postačí tedy omezit se v dalším na případ a) a na výsledky užít souměrnosti vzhledem k přímce p .



Obr. 2.



Obr. 3.

Bod Z čtyřúhelníku $XYZC$ leží v polorovině opačné k polorovině BCA . Úhly obvodové $\sphericalangle YXZ = \alpha$, $\sphericalangle YCZ$ v kružnici k leží v téže polorovině vyřezané přímkou YZ , takže jsou shodné, a proto jsou shodné i střídavé úhly $\sphericalangle ABC$, $\sphericalangle YCZ \equiv \sphericalangle BCZ$; odtud plyne, že je $CZ \parallel AB$ a že bod Z leží na jisté polopřímce q s počátkem C . Označme M ten bod polopřímky q , pro nějž platí

$$CM = c.$$

To znamená, že čtyřúhelník $ABMC$ je rovnoběžník. Dále sestrojme na polopřímce CM bod N tak, aby platilo

$$CN = a;$$

leží tedy bod M uvnitř úsečky CN .

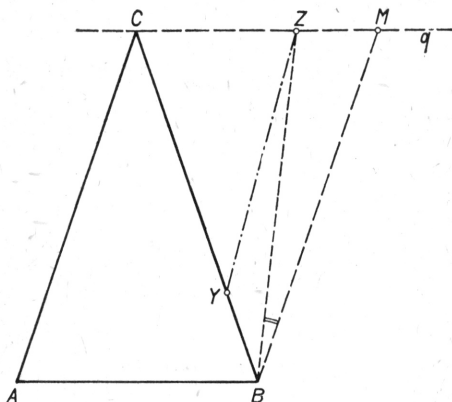
Dokážeme, že každý bod Z hledaného geometrického místa padne dovnitř úsečky MN (obr. 2). Důkaz provedeme sporem.

Předpokládejme nejprve, že bod Z náleží úsečce CM (obr. 4). Je-li $Z \equiv C$ nebo $Z \equiv M$, pak kružnice $k' \equiv (Z; a)$ prochází bodem B , tj. $Y \equiv B$ proti předpokladu. Leží-li bod Z mezi body C , M , je podle známé věty $ZB < CB = MB = a$; bod B — a ovšem i body C , M — leží uvnitř kružnice k' a vrchol Y nemůže náležet straně BC .

Předpokládejme za druhé, že bod Z náleží prodloužení úsečky CN za bod N . Je-li $Z \equiv N$, prochází kružnice k' vrcholem C a je tedy $X \equiv C$ proti předpokladu. Je-li $Z \neq N$, pak pro všechny body X strany AC platí $ZX > > ZC > a$ (úhel $\sphericalangle ZCA$ je totiž tupý) a kružnice k' nemá s úsečkou AC vůbec žádný společný bod.

Dokážeme nyní, že každý bod Z ležící mezi body MN je vrcholem jednoho z vyšetřovaných trojúhelníků XYZ (obr. 2). Sestrojíme opět kružnici $k' \equiv (Z; a)$; pro ni je vrchol C bodem vnitřním, neboť je $ZC < NC = a$.

Vrchol A je pro kružnici k' bodem vnějším; trojúhelník ACZ je totiž tupouhlý ($\sphericalangle ACZ > 90^\circ$), proto je $ZA > AC = a$. Kružnice k' protne tedy úsečku AC v jejím vnitřním bodě X . Trojúhelníku XCZ opišme kružnici k ; polopřímka CB prochází vnitřkem úhlu $\sphericalangle XCZ$, protíná úsečku XZ v jejím vnitřním bodě, a tudíž i kružnici k



Obr. 4.

v jistém bodě $Y \equiv C$. Body X, Y, Z, C kružnice k jsou vesměs navzájem různé a jsou vrcholy tětiového čtyřúhelníku; přitom X, Z jsou přímkou BC odděleny; vznikne tedy čtyřúhelník $XYZC$, takže C, Z jsou sousedními vrcholy tohoto čtyřúhelníku. Proto je $\sphericalangle XZY = \sphericalangle XCY = \gamma$ (obvodové úhly v kružnici k nad tětivou XY); stejně platí $\sphericalangle YXZ = \sphericalangle YCZ = \alpha$. Je tedy $XZ = AC$, $\sphericalangle YXZ = \sphericalangle BAC$, $\sphericalangle XZY = \sphericalangle ACB$, a proto je $\triangle XYZ \cong \triangle ABC$. Odtud plyne $ZY = CB = a$. Protože je $ZY = a$, leží bod Y na kružnici k' . Bod B je však vnějším bodem kružnice k' ; protože $\sphericalangle BZN > \sphericalangle BMN >$

$> 90^\circ$, je $ZB > BM = a$. Trojúhelník XYZ je tedy skutečně jedním z vyšetřovaných trojúhelníků.

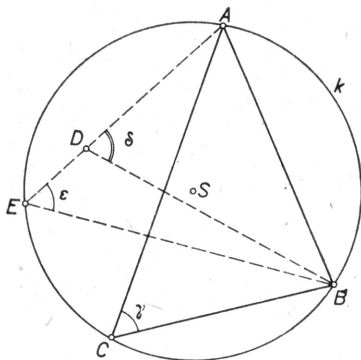
Závěr. Geometrickým místem bodů Z jsou dvě úsečky MN , $M'N'$ souměrně sdružené podle osy p úsečky AB , přičemž konstrukce úsečky MN je v tomto řešení popsána.

Podle řešení Jaroslava Zemánka, 3. d roč.
SVVŠ, Křesomyslova, Praha 4

4. V rovině je dáno n bodů, z nichž žádné tři neleží v téže přímce.

Dokažte, že lze najít kružnici, která obsahuje alespoň tři z daných bodů a že přitom žádný z daných bodů neleží uvnitř této kružnice.

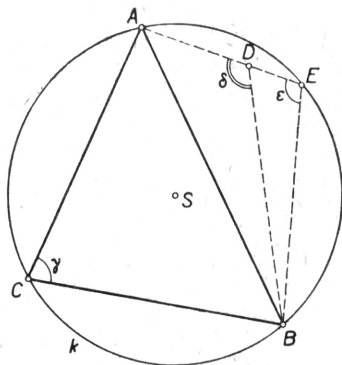
Řešení. Podle textu úlohy žádné tři z daných bodů neleží v téže přímce; proto žádné dva z daných n bodů nesplyvají. Označme A, B ($A \neq B$) takové dva z daných



Obr. 5.

bodů, pro které vzdálenost AB není větší než vzdálenost kterékoli dvojice z daných n bodů (jsou-li M, N dva libovolné různé body dané n -tice, platí tedy $MN \geq AB$); označme U množinu $n - 2$ bodů, která se skládá z těch daných n bodů, od nichž jsme odňali body A, B . Je-li X bod množiny U , potom vzniká trojúhelník ABX s ostrým úhlem $\xi \equiv$

$\equiv \sphericalangle AXB$, neboť žádná ze stran AX , BX není menší než strana AB ; vzniká tak množina $n - 2$ takových ostrých zorných úhlů ξ , pod nimiž je vidět úsečku AB z bodů X . Označme γ ten z $(n - 2)$ úhlů ξ , který není větší než kterýkoli zbývajících; příslušný bod X označme C . Buď k kružnice opsaná trojúhelníku ABC . Uvnitř této kruž-



Obr. 6.

nice již neleží žádný z bodů množiny U . To dokážeme sporem: Jestliže je D bod množiny U , který padne dovnitř kružnice k , potom je $\sphericalangle ADB > \gamma$. Toto tvrzení je patrné z obr. 5, pokud bod D leží v polorovině ABC (o vnějším úhlu $\delta \equiv \sphericalangle ADB$ trojúhelníku ABE platí $\delta > \varepsilon = \gamma$). Jestliže bod D leží v polorovině opačné k polorovině ABC (obr. 6), platí $\delta > \varepsilon = 180^\circ - \gamma > 90^\circ$ (protější úhly v tětiovém čtyřúhelníku), tj. $\delta > 90^\circ$, což však vzhledem k tomu, že zorné úhly ξ jsou ostré, nemůže vůbec nastat. Tím je důkaz proveden a žádný z daných n bodů tedy nepadne dovnitř kružnice k .

Podle řešení Jaroslava Zemánka, 3. d roč.
SVVŠ, Křesomyslova, Praha 4

5. SÚ dané dve kvadratické nerovnosti

$$\left. \begin{aligned} x^2 + p_1x + q_1 &< 0, \\ x^2 + p_2x + q_2 &> 0, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

kde p_1, p_2, q_1, q_2 sú dané reálne čísla a platí $q_1 < 0, q_2 < 0$. Dokážte túto vetu:

Ak dané nerovnosti nemajú spoločné riešenie, potom platí:

$$(p_2 - p_1) \cdot (p_1 q_2 - p_2 q_1) \leq (q_1 - q_2)^2. \quad (2)$$

Udajte príklad štyroch čísel p_1, p_2, q_1, q_2 tak, aby platila nerovnosť (2) a aby nerovnosti (1) mali spoločné riešenie.

Riešenie. (V ďalšom hovoríme len o reálnych číslach.) Funkcia $y = x^2 + p_1 x + q_1$ nadobúda hodnotu nula pre dve rôzne čísla $x_1 < x_2$, pretože diskriminant $D = p_1^2 - 4q_1$ rovnice $x^2 + p_1 x + q_1 = 0$ je kladný, pretože $q_1 < 0$. Z podobných dôvodov nadobúda funkcia $y = x^2 + p_2 x + q_2$ hodnotu nula pre dve rôzne čísla $x_3 < x_4$.

Sústava (1) je neriešiteľná práve vtedy, keď celý interval $\langle x_1, x_2 \rangle$ je obsiahnutý v intervale $\langle x_3, x_4 \rangle$ *); potom je

$$x_3 \leq x_1, \quad x_2 \leq x_4$$

čiže

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(-p_2 - \sqrt{D'}) &\leq \frac{1}{2}(-p_1 - \sqrt{D}), \\ \frac{1}{2}(-p_1 + \sqrt{D}) &\leq \frac{1}{2}(-p_2 + \sqrt{D'}), \end{aligned} \quad (3)$$

kde $D' = p_2^2 - 4q_2$ je diskriminant rovnice $x^2 + p_2 x + q_2 = 0$. Z nerovností (3) vyplýva:

$$\sqrt{D'} - \sqrt{D} \geq p_1 - p_2, \quad \sqrt{D'} - \sqrt{D} \geq p_2 - p_1. \quad (4)$$

Spojením vzťahov (4) dostávame

$$\sqrt{D'} - \sqrt{D} \geq |p_1 - p_2|. \quad (5)$$

*) Ako sa ľahko presvedčíme napr. z grafov kvadratických funkcií.

Teda, ak je sústava (1) neriešiteľná, platí vzťah (5) a tým aj

$$D + D' - 2\sqrt{DD'} \geq p_1^2 - 2p_1p_2 + p_2^2$$

čiže

$$p_1^2 - 4q_1 + p_2^2 - 4q_2 \geq p_1^2 - 2p_1p_2 + p_2^2 + 2\sqrt{DD'},$$

skadiaľ

$$\sqrt{DD'} \leq p_1p_2 - 2(q_1 + q_2), \quad (6)$$

kde je na oboch stranách kladné číslo.

Umocnením vzťahu (6) dostaneme

$$DD' \leq [p_1p_2 - 2(q_1 + q_2)]^2,$$

skadiaľ po dosadení za $D = p_1^2 - 4q_1$, $D' = p_2^2 - 4q_2$ a po jednoduchéj úprave vyplýva nerovnosť (2).

Tým je veta dokázaná.

Príklad, kedy túto vetu nemožno obrátiť, je tento:
Pre

$$p_1 = 0, \quad q_1 = -1, \quad D = 4; \quad p_2 = -\frac{1}{3}, \quad q_2 = -\frac{1}{2},$$

$$D' = \frac{19}{36}$$

nie je splnenie nerovnosti (2) postačujúcou podmienkou pre neriešiteľnosť sústavy (1). V tomto prípade totiž sústava (1) má riešenie $-\frac{3}{4}$ aj napriek tomu, že je vzťah (2) splnený.

6. Je dán rotační kužel, jehož podstava má poloměr 1 a jehož strana má od roviny podstavy odchylku 2ω , kde

$\omega < \frac{1}{4} \pi$. Kuželi je vepsána koule K , která se dotýká pláště kužele i podstavy.

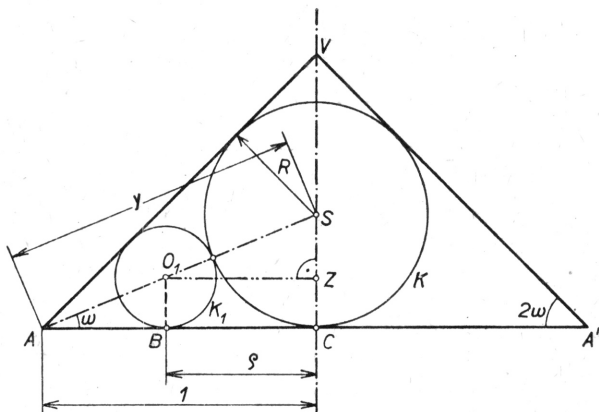
Dále je sestrojeno n shodných koulí, o nichž platí:

(1) Každá z nich se dotýká pláště a podstavy kužele i koule K (vnější dotyk).

(2) Každá z nich se dotýká dvou z těchto n koulí.

Najděte vztah mezi čísly n a ω a zjistěte, pro která n a ω může tato situace nastat.

Řešení. Označme S střed a R poloměr koule K , dále C střed podstavy a V vrchol daného kužele. Je-li A bod hrany kužele, je osovým řezem kužele vedeným tímto bodem rovnoramenný trojúhelník VAA' (viz obr. 7), ve kterém



Obr. 7.

je C střed jeho základny AA' . Označme y délku přepony AS pravoúhlého trojúhelníku ASC a ω velikost ostrého úhlu $\angle SAC$.

Platí

$$CS = R = \operatorname{tg} \omega, \quad y = AS = \frac{1}{\cos \omega}. \quad (1)$$

Koule K_1 , jedna z n uvažovaných shodných koulí, má poloměr r a střed O_1 uvnitř úsečky SA . Z vnějšího dotyku koulí K, K_1 plyne

$$O_1S = R + r. \quad (1')$$

Z vnějšího dotyku dvou sousedních shodných koulí K_1, K_2 o středech O_1, O_2 plyne vztah

$$O_1O_2 = 2r,$$

takže středy uvažovaných n shodných koulí jsou vrcholy pravidelného n -úhelníku $O_1O_2 \dots O_n$ o středu Z , délce strany $2r$ a o středovém úhlu velikosti $2\varepsilon = \frac{360^\circ}{n}$ (viz obr. 8). Je-li U dotykový bod koulí K_1, K_2 , je ZU osa rovnoramenného trojúhelníku ZO_1O_2 , přičemž platí

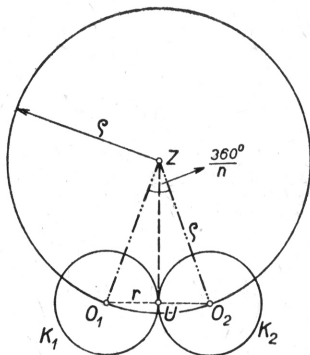
$$\sin \varepsilon = \frac{r}{\varrho}, \quad (2)$$

kde $\varrho = ZO_1$.

Z trojúhelníku ABO_1 , kde B je dotykový bod koule K_1 s rovinou podstavy daného kužele (viz obr. 7), dostáváme $\operatorname{tg} \omega =$

$$= \frac{r}{1 - \varrho} \text{ neboli}$$

$$\varrho = \frac{\operatorname{tg} \omega - r}{\operatorname{tg} \omega}.$$



Obr. 8.

Dále je $\sin \omega = \frac{BO_1}{AO_1}$ neboli

$$\sin \omega = \frac{r}{AS - O_1S}.$$

Dosadíme-li sem z (1) a (1'), pak po úpravě obdržíme

$$r = \frac{\operatorname{tg} \omega (1 - \sin \omega)}{1 + \sin \omega}.$$

Ze vztahu (2) postupně dostáváme

$$\sin \varepsilon = \frac{r}{\varrho} = \frac{r \operatorname{tg} \omega}{\operatorname{tg} \omega - r} = \frac{1 - \sin \omega}{2 \cos \omega}.$$

Položme pro stručnost $\sin \varepsilon = x$, přičemž je nutně $x > 0$; z předchozího vztahu vypočteme, že

$$x^2 = \frac{(1 - \sin \omega)^2}{4(1 - \sin^2 \omega)} = \frac{1 - \sin \omega}{4(1 + \sin \omega)}$$

a odtud

$$\sin \omega = \frac{1 - 4x^2}{1 + 4x^2}. \quad (3)$$

Vzhledem ke geometrickému významu úhlu $\sphericalangle VAC$ zřejmě platí vztah

$$0 < \omega < 45^\circ,$$

a proto o čísle $\sin \omega$ ze (3) nutně platí vztahy

$$0 < \frac{1 - 4x^2}{1 + 4x^2} < \frac{1}{2} \sqrt{2}.$$

Odtud pro číslo $x > 0$ dostáváme snadným výpočtem omezení

$$\frac{1}{2} > x > \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}}}$$

neboli

$$\frac{1}{2} > x > \frac{1}{2} \sqrt{3 - 2\sqrt{2}}. \quad (4)$$

Odtud ze vztahu $\frac{1}{2} > \sin \varepsilon$ plyne $\varepsilon = \frac{180^\circ}{n} < 30^\circ$ nebo

$$n > 6;$$

skutečně pro $n > 6$ je $\sin \frac{180^\circ}{n} < \frac{1}{2}$. Z druhé nerovnosti (4) dostaneme postupně

$$\begin{aligned} x &> \frac{1}{2} \sqrt{3 - 2\sqrt{2}} > \frac{1}{2} \sqrt{3 - 2 \cdot 1,415} = \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{0,17} > \frac{1}{2} \cdot 0,4 = 0,2 \end{aligned} \quad (5)$$

a pomocí tabulek hodnot funkce sinus dostaneme

$$\frac{180^\circ}{n} > 11,5^\circ$$

neboli

$$n < \frac{180}{11,5} < 16,$$

a tedy $n < 16$.

Pro $n = 15$ je $\varepsilon = \frac{180^\circ}{15} = 12^\circ$ a z tabulek dostaneme $\sin 12^\circ > 0,207$.

Protože (viz tabulky druhých mocnin)

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \sqrt[3]{3 - 2\sqrt{2}} &< \frac{1}{2} \sqrt[3]{3 - 2 \cdot 1,414} = \\ &= \frac{1}{2} \sqrt[3]{0,172} < \frac{1}{2} \sqrt[3]{0,172 \cdot 225} = \frac{1}{2} \cdot 0,415 \doteq 0,207,\end{aligned}$$

je vztah (5) již pro $n = 15$ skutečně splněn.

Přípustné hodnoty pro číslo n jsou tedy přirozená čísla 7 až 15. Příslušný kužel je pak dán poloměrem r a hodnotou ω , určenou vztahem (3) a požadavkem $0 < \omega < 45^\circ$.

Podle řešení Břetislava Vernerá, 3. d roč.
SVVŠ, Křesomyslova, Praha 4

2. ÚLOHY II. KOLA KATEGORIE A

1. Je dána funkce

$$y = \frac{x(1 - 2x)}{2 - 3x}. \quad (1)$$

Načrtněte její graf a výpočtem zjistěte, kterých reálných hodnot y tato funkce nenabývá.

Řešení. I. Z dané rovnice (1) plyne, že pro $2 - 3x = 0$ neboli pro

$$x = \frac{2}{3} \quad (2)$$

není y definováno. V dalším proto je $x \neq \frac{2}{3}$.

Abychom mohli načrtnout graf, vyšetříme především, kdy je $y = 0$; z (1) plyne, že $y = 0$ pro $x(1 - 2x) = 0$, a tedy

$$x = 0 \text{ nebo } x = \frac{1}{2}.$$

Máme tedy dva body grafu

$$[0, 0], \left[\frac{1}{2}, 0 \right].$$

Těchto hodnot užijeme nyní ke zkoumání znaménka čísla y , a to tak, že určíme znaménka čísel

$$x; 1 - 2x; 2 - 3x \quad (3)$$

a budeme na základě toho zkoumat znaménko zlomku na pravé straně v (1):

[1] Necht' je $x < 0$, a tedy $1 - 2x > 0$, $2 - 3x > 0$;
pak je $y < 0$.

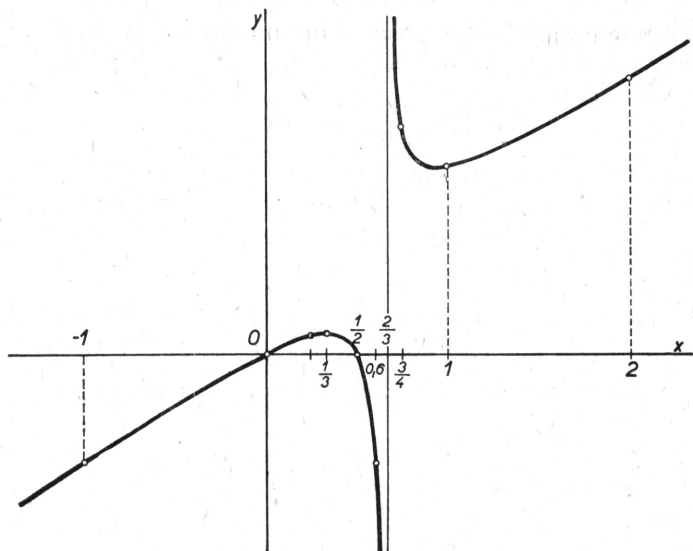
[2] Necht' je $0 < x < \frac{1}{2}$; pak je $1 - 2x > 0$;
 $2 - 3x > 0$, a tedy $y > 0$.

[3] Necht' je $\frac{1}{2} < x < \frac{2}{3}$; pak je $x > 0$; $1 - 2x < 0$;
 $2 - 3x > 0$, a tedy $y < 0$.

[4] Necht' je $\frac{2}{3} < x$; pak je $x > 0$; $1 - 2x < 0$;
 $2 - 3x < 0$, a tedy $y > 0$.

Těchto výsledků užijeme k načrtnutí grafu (obr. 9); dříve však ještě sestavme tuto tabulku hodnot dané funkce:

x	-2	-1	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$0,6$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	1	2
y	$\frac{-5}{4} = -1,25$	$\frac{-3}{5} = -0,6$	0	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{9} > 0,1$	0	$-0,6$	není defino- váno	$\frac{6}{5} = 1,2$	1	$\frac{3}{2} = 1,5$
	[1] záporné y		[2] kladné y		[3] záporné y		[4] kladné y				



Obr. 9.

II. Pro $x \neq \frac{2}{3}$ dostaneme znásobením obou stran rovnice (1) číslem $2 - 3x$ po úpravě kvadratickou rovnicí

$$2x^2 - (3y + 1)x + 2y = 0.$$

Hledáme taková y , pro která neexistuje příslušné x ; to nastane právě tehdy, když diskriminant D této rovnice je záporný. Tu platí

$$\begin{aligned} D &= (3y + 1)^2 - 16y = 9y^2 - 10y + 1 = \\ &= (y - 1)(9y - 1). \end{aligned}$$

Tento rozklad jsme získali řešením kvadratické rovnice $9y^2 - 10y + 1 = 0$. Diskriminant D je záporný pro y z intervalu

$$\frac{1}{9} < y < 1. \quad (4)$$

Závěr. Daná funkce nenabývá hodnot y z intervalu (4).

2. Najdite všechny x z intervalu $0^\circ \leq x < 360^\circ$, které vyhovují nerovnosti

$$2(\cos^2 x - \sqrt{3} \sin^2 x) \geq (\sqrt{3} - 1) \sin 2x.$$

Riešenie. Danú nerovnosť postupne upravme takto:

$$2 \cos^2 x - 2 \sqrt{3} \sin^2 x - 2 \sqrt{3} \sin x \cos x + \\ + 2 \sin x \cos x \geq 0,$$

$$\cos x (\sin x + \cos x) - \sqrt{3} \sin x (\sin x + \cos x) \geq 0, \\ (\sin x + \cos x) \cdot (\cos x - \sqrt{3} \sin x) \geq 0. \quad (1)$$

Sú dve možnosti [1], [2].

Prípad [1]. Z (1) vyplýva, že súčasne platí

$$\sin x + \cos x \geq 0, \cos x - \sqrt{3} \sin x \geq 0. \quad (2)$$

a) Nech je $\sin x > 0$. Tým sa obmedzujeme na interval $(0^\circ, 180^\circ)$. Vynásobením nerovností (2) číslom $\frac{1}{\sin x}$ dostaneme, že o číslach x platí súčasne

$$\cotg x \geq -1, \cotg x \geq \sqrt{3}. \quad (3)$$

Prvej z týchto nerovností vyhovujú čísla z intervalu $(0^\circ, 135^\circ)$, druhej čísla z intervalu $(0^\circ, 30^\circ)$; spoločnou časťou oboch uvedených intervalov je interval $(0^\circ, 30^\circ)$.

Vzhľadom na to, že nerovnostiam (3) vyhovuje i $x = 0^\circ$, je riešenie danej nerovnosti v tomto prípade určené intervalom

$$\langle 0^\circ, 30^\circ \rangle. \quad (4)$$

b) Nech je $\sin x < 0$, čiže nech x leží v intervale $(180^\circ, 360^\circ)$. Rovnako ako v predchádzajúcom prípade dostaneme nerovnosti

$$\cotg x \leq -1, \cotg x \leq \sqrt{3},$$

ktoré majú riešenia v intervaloch $\langle 315^\circ, 360^\circ \rangle$, resp. $\langle 210^\circ, 360^\circ \rangle$, a riešenie danej nerovnosti je určené intervalom

$$\langle 315^\circ, 360^\circ \rangle. \quad (5)$$

Prípád [2]. Z (1) vyplýva, že súčasne platí

$$\sin x + \cos x \leq 0, \cos x - \sqrt{3} \sin x \leq 0. \quad (6)$$

a) Pre $\sin x > 0$, t.j. pre x z intervalu $(0^\circ, 180^\circ)$, dostaneme z nerovností (6) nerovnosti

$$\cotg x \leq -1, \cotg x \leq \sqrt{3}$$

a hľadané riešenie je spoločná časť intervalov $\langle 135^\circ, 180^\circ \rangle$, $\langle 30^\circ, 180^\circ \rangle$, k čomu možno pripojiť i $x = 180^\circ$. Máme teda interval

$$\langle 135^\circ, 180^\circ \rangle. \quad (7)$$

b) Pre $\sin x < 0$, t.j. pre x z intervalu $(180^\circ, 360^\circ)$, sa od nerovností (6) dostaneme k nerovnostiam

$$\cotg x \geq -1, \cotg x \geq \sqrt{3}$$

a hľadané riešenie je spoločná časť intervalov $\langle 180^\circ, 315^\circ \rangle$, $\langle 180^\circ, 210^\circ \rangle$, ku ktorej pripojíme aj $x = 180^\circ$ a dostaneme interval

$$\langle 180^\circ, 210^\circ \rangle. \quad (8)$$

Záver. Danej nerovnosti vyhovujú všetky čísla z intervalov [viď (4), (7), (8), (5)] :

$$\langle 0^\circ, 30^\circ \rangle, \langle 135^\circ, 210^\circ \rangle, \langle 315^\circ, 360^\circ \rangle.$$

Podľa riešenia Pavla Hella, 4. tr.
SPŠ hutnícka, Košice

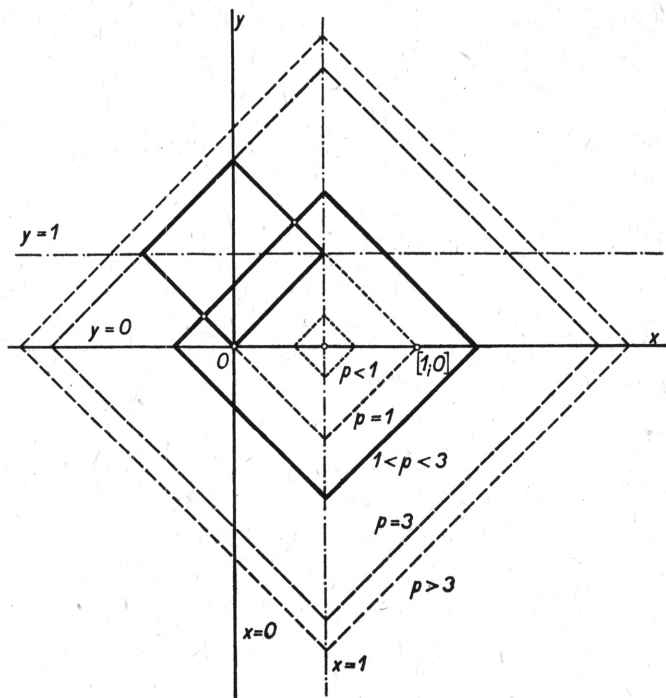
3. V soustavě pravoúhlých souřadnic x, y znázorněte množinu všech bodů $[x, y]$, jejichž souřadnice splňují rovnici $|x| + |y - 1| = 1$, a dále množinu všech bodů $[x, y]$, jejichž souřadnice splňují rovnici $|x - 1| + |y| = p$, kde p je reálný parametr. Užitím výsledku grafického znázornění pak výpočtem řešte soustavu rovnic

$$|x| + |y - 1| = 1, |x - 1| + |y| = p. \quad (1)$$

Řešení. I. Množina bodů příslušná k první rovnici je obvod čtverce, jehož úhlopříčky leží v přímkách $x = 0$, $y = 1$ a mají délku 2. Množina bodů příslušná k druhé rovnici pro $p > 0$ je obvod čtverce, jehož úhlopříčky leží v přímkách $x = 1$, $y = 0$ a mají délku $2p$. Řešením soustavy (1) jsou souřadnice bodů společných oběma obvodům. Pro kladné hodnoty p lze z grafu vyčíst tento výsledek (obr. 10):

- a) $p < 1$: úloha nemá řešení;
- b) $p = 1$: úloha má nekonečně mnoho řešení;
- c) $1 < p < 3$: úloha má dvě řešení;
- d) $p = 3$: úloha má nekonečně mnoho řešení;
- e) $p > 3$: úloha nemá řešení.

II. Početní řešení soustavy. Pro $p \leq 0$ je úloha neřešitelná: pro $p < 0$ nemá druhá rovnice (1) řešení; pro $p = 0$ má druhá rovnice (1) jediné řešení $x = 1$, $y = 0$, to však nevyhovuje první rovnici (1). V dalším budeme předpokládat, že je $p > 0$.



Obr. 10.

Z první rovnice (1) vyplývá, že pro každé řešení soustavy platí $x \leq 1$, $y \geq 0$. (Kdyby bylo $x > 1$, bylo by $|x| > 1$; kdyby bylo $y < 0$, bylo by $|y - 1| > 1$.) Je tedy $x - 1 \leq 0$, $y \geq 0$ a druhou rovnici (1) lze psát ve tvaru

$$1 - x + y = p$$

neboli

$$y = x + p - 1. \quad (1')$$

Odtud vyjádříme $y - 1$ a dosadíme do první rovnice (1); vyjde

$$|x| + |x + p - 2| = 1. \quad (2)$$

Nyní rozlišíme čtyři případy:

$$[1] \quad x + p - 2 \geq 0, \quad x \geq 0$$

$$[2] \quad x + p - 2 \geq 0, \quad x \leq 0$$

$$[3] \quad x + p - 2 \leq 0, \quad x \geq 0$$

$$[4] \quad x + p - 2 \leq 0, \quad x \leq 0$$

V případě [1] rovnice (2) zní $2x + p - 2 = 1$ a odtud plyne

$$x = \frac{1}{2}(3 - p), \quad y = \frac{1}{2}(p + 1) \quad (3)$$

[vzorec pro y jsme dostali z (1')].

V případě [2] rovnice (2) zní $p - 2 = 1$; je tedy

$$p = 3, \quad y = x + 2. \quad (4)$$

V případě [3] rovnice (2) zní $2 - p = 1$; je tedy

$$p = 1, \quad y = x. \quad (5)$$

V případě [4] rovnice (2) zní $-2x - p + 2 = 1$, odtud

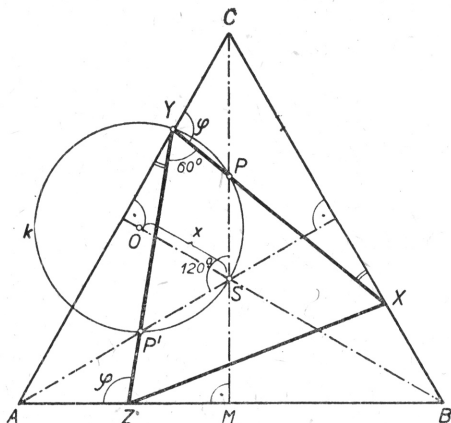
$$x = \frac{1}{2}(1 - p), \quad y = \frac{1}{2}(p - 1). \quad (6)$$

Nyní probereme případy a) až e) pro parametr p a provedeme zkoušku.

V případě a) nevyhovuje žádné z řešení (3) až (6). V případě b) vyhovují řešení (5) a řešení (3), (6) — ovšem jen pro $p = 1$. V případě c) vyhovuje i řešení (3) i řešení (6) a jsou navzájem různá. V případě d) vyhovují

řešení (4) a řešení (3), (6) -- ovšem jen pro $p = 3$.
V případě $p > 3$ nevyhovuje žádné z řešení (3), (6).

4. Je dán rovnostranný trojúhelník ABC o straně délky 1 a bod P , který leží mezi průsečíkem výšek trojúhelníku ABC a bodem C .



Obr. 11.

Sestrojte rovnostranný trojúhelník XYZ vepsaný trojúhelníku ABC tak, že vrcholy X, Y, Z leží po řadě na úsečkách BC, CA, AB a že strana XY prochází bodem P . Stanovte podmínku řešitelnosti.

Řešení (obr. 11). Označme $\sphericalangle CYP = \sphericalangle CYX = \varphi$; pak je $\sphericalangle CXY = 120^\circ - \varphi$, $\sphericalangle AYZ = 180^\circ - 60^\circ - \varphi = 120^\circ - \varphi$, tj. $\sphericalangle CXY = \sphericalangle AYZ$. Protože je $XY = YZ$, $\sphericalangle YCX = \sphericalangle ZAY = 60^\circ$, je podle věty usu $\triangle XYC \cong \triangle YZA$, tj.

$$CY = AZ. \quad (1)$$

Dále je $\sphericalangle CYP = \sphericalangle AZP' = \varphi$; přitom P' je průsečík strany YZ s přímkou AS , kde S je průsečík výšek trojúhelníku ABC . Protože je $\sphericalangle YCP = \sphericalangle ZAP' = 30^\circ$, je vzhledem k (1) podle věty usu $\triangle YCP \cong \triangle ZAP'$, tj. $CP = AP'$, a tedy i

$$SP = SC - CP = SA - AP' = SP'. \quad (2)$$

Z toho vyplývá, že bod P' vznikne z bodu P otočením kolem bodu S o úhel velikosti 120° . Bod Y náleží geometrickému místu bodů, z nichž je vidět úsečku PP' pod úhlem velikosti 60° , a to tomu oblouku, který leží v polorovině opačné k $PP'S$. Protože je $\sphericalangle PSP' = 120^\circ$, náleží bod Y kružnici k opsané trojúhelníku $PP'S$.

• V diskusi je třeba vyšetřit, za jakých podmínek má kružnice k s přímkou AC aspoň jeden společný bod. Střed O kružnice k je vrcholem kosočtverce $PSP'O$, složeného ze dvou rovnostranných trojúhelníků. Proto je $OS = SP = x$. Vzdálenost bodu O od přímky AC je dána výrazem

$$\left| \frac{\sqrt{3}}{6} - x \right|,$$

neboť vzdálenost bodu S od přímky AC je $\frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$. Podmínka řešitelnosti úlohy je

$$\left| \frac{\sqrt{3}}{6} - x \right| \leq x,$$

tj.

$$\frac{1}{12} - \frac{\sqrt{3}}{3}x + x^2 \leq x^2$$

neboli

$$x \geq \frac{\sqrt{3}}{12}.$$

Střední příčka trojúhelníku ABC , spojující středy stran AC , BC , protíná výšku CM právě v bodě, jehož vzdálenost od bodu S je

$$\frac{1}{12} \sqrt{3} \left(= \frac{1}{3} \sqrt{3} - \frac{1}{4} \sqrt{3} \right).$$

3. ÚLOHY III. KOLA KATEGÓRIE A

1. Dokážte, že číslo $11^{100} - 1$ má dekadický zápis ukončený štvorčíslom 6000 a je deliteľné číslom 6000.

Riešenie. Keďže je $6\,000 = 3 \cdot 2\,000$, musíme o čísle $N = 11^{100} - 1$ dokázať, že je deliteľné oboma nesúdeliteľnými číslami 2000 a 3.

Podľa binomickej vety platí

$$N = (10 + 1)^{100} - 1 = M + z, \quad (1)$$

kde M , z sú prirodzené čísla a platí (musíme si uvedomiť, že kombinačné čísla sú celé čísla)

$$\begin{aligned} M &= 10^{100} + \binom{100}{1} 10^{99} + \dots + \binom{100}{96} 10^4 + \\ &+ \binom{100}{97} 10^3 = 10^{100} + \binom{100}{1} 10^{99} + \dots + \\ &+ \binom{100}{4} 10^4 + \binom{100}{3} 10^3 = \\ &= 10^4 \cdot a + 100 \cdot 33 \cdot 49 \cdot 10^3 = 10^4 \cdot b \end{aligned} \quad (2)$$

(pritom a , b sú celé čísla),

$$\begin{aligned} z &= \binom{100}{98} 10^2 + \binom{100}{99} 10 = \binom{100}{2} 10^2 + \binom{100}{1} 10 = \\ &= 50 \cdot 99 \cdot 100 + 1000 = 496\,000. \end{aligned} \quad (3)$$

Dekadický zápis čísla M končí podľa (2) štyrmi nulami a podľa (3) je teda posledným štvorčíslím čísla N číslo 6000, takže je N deliteľné číslom 2000.

Ďalej platí

$$N = (12 - 1)^{100} - 1 = 12^{100} - \binom{100}{1} 12^{99} + \dots - \binom{100}{1} 12 + 1 - 1 = 12P = 3 \cdot 4P,$$

kde číslo P je celé (kombinačné čísla sú celé čísla). Číslo N je teda deliteľné tiež tromi.

Tým je dôkaz prevedený.

Podľa riešenia Petra Neuwirtha, 3. d tr.
SVŠ, Šrobárova 46, Košice

2. Jsou dány dvě mimoběžky $p = PP'$, $q = QQ'$. Bod X s počáteční polohou P se pohybuje po polopřímce PP' konstantní rychlostí c_1 a bod Y s počáteční polohou Q se pohybuje po polopřímce QQ' konstantní rychlostí c_2 . Oba body se dají do pohybu současně.

Dokažte, že střed Z úsečky XY vždy leží na jisté polopřímce RR' , kde R je střed úsečky PQ .

Řešení. V dalším užijeme známé věty V: „Jsou-li α , β dvě různé rovnoběžné roviny a X , Y libovolné body po řadě v těchto rovinách ležící, potom množinou všech středů Z úseček XY , když body X , Y po řadě probíhají roviny α , β , je rovina $\varrho // \alpha$, která má od každé z rovin α , β stejnou vzdálenost.”

Je-li R střed úsečky PQ , vedme jím rovinu ϱ , kde $\varrho // PP'$, $\varrho // QQ'$ (obr. 12). Označme X , Y polohu uvažovaných bodů v čase $t > 0$ a X_1 , Y_1 polohu těchto bodů v čase $t = 1$; potom snadno sestojíme rovnoběžnostěn

bod Z_1 zřejmě leží v rovině ϱ . Sestrojíme rovnoběžníky $PXX'R$, $PX_1X_1'R$, $QYY'R$, $QY_1Y_1'R$, přičemž první dva leží v rovině $\alpha//\varrho$, druhé dva v rovině $\beta//\varrho$; platí tedy

Přitom trojúhelníky $RX_1'Y_1'$, $RX'Y'$ leží v rovině ϱ a platí $XX' \parallel PR$, $PR \parallel YY'$, takže je $XX' \parallel YY'$ a vedle toho $XX' = YY'$; v konvexním čtyřúhelníku $XX'YY'$ s průsečíkem Z úhlopříček jsou dvě protější strany XX' , YY'

shodné a rovnoběžné; pak se snadno dokáže (např. užitím souměrnosti o středu Z), že $XX'YY'$ je rovnoběžník a že tedy platí $X'Z = Y'Z$, takže Z je středem úsečky $X'Y'$. Rovněž bod Z_1 je středem úsečky $X'_1Y'_1$. Snadno usoudíme, že platí

$$RX' = c_1 t, RY' = c_2 t, RX'_1 = c_1, RY'_1 = c_2,$$

takže trojúhelníky $RX'_1Y'_1$, $RX'Y'$, a tím i středy Z_1 , Z jejich stran $X'_1Y'_1$, $X'Y'$ jsou stejnohlé vzhledem k bodu R při konstantě stejnohllosti $t > 0$. Odtud plyne, že je $RZ = RZ_1 \cdot t$ a že bod Z leží na polopřímce RZ_1 pro každé $t > 0$, což jsme měli dokázat.

3. Určete všechny hodnoty parametru α z intervalu $\langle 0, 2\pi \rangle$, pro které má rovnice

$$(2 \cos \alpha - 1) x^2 + 4x + 4 \cos \alpha + 2 = 0 \quad (1)$$

kladný kořen x_1 , kdežto druhý kořen x_2 , pokud existuje a pokud je různý od x_1 , není kladný.

Řešení. I. Je-li v (1)

$$2 \cos \alpha - 1 = 0,$$

tj.

$$\alpha = 60^\circ, \alpha = 300^\circ, \quad (1')$$

pak, jak se snadno přesvědčíme, má rovnice jediný kořen $x = -1$. Hodnoty (1') nejsou tedy řešením úlohy.

II. Dále nechť je $\alpha \neq 60^\circ, \alpha \neq 300^\circ$, a tedy $2 \cos \alpha - 1 \neq 0$. Kvadratická rovnice (1) pak má diskriminant $D = 8(3 - 4 \cos^2 \alpha)$. Reálné kořeny má právě tehdy, je-li $D \geq 0$, tj. $3 - 4 \cos^2 \alpha \geq 0$, tj.

$$|\cos \alpha| \leq \frac{1}{2} \sqrt{3};$$

to nastane právě tehdy, náleží-li α jednomu z intervalů
 $\langle 30^\circ, 150^\circ \rangle, \langle 210^\circ, 330^\circ \rangle$. (2)

Rovnice (1) má jeden kořen kladný a druhý kořen záporný právě tehdy, když je $x_1 x_2 < 0$. Platí

$$x_1 x_2 = \frac{4 \cos \alpha + 2}{2 \cos \alpha - 1}. \quad (3)$$

Jsou možnosti [1], [2].

Případ [1]. Nechť $2 \cos \alpha - 1 > 0$ neboli nechť je α v jednom z intervalů $\langle 0^\circ, 60^\circ \rangle, \langle 300^\circ, 360^\circ \rangle$; pak podle (3) je $2 \cos \alpha + 1 < 0$, tj. $\cos \alpha < -\frac{1}{2}$ a α je z intervalu $\langle 120^\circ, 240^\circ \rangle$. Uvedené intervaly nemají společné číslo. Případ [1] nedává tedy žádné řešení.

Případ [2]. Nechť $2 \cos \alpha - 1 < 0$, tj. α je z intervalu $\langle 60^\circ, 300^\circ \rangle$ a vzhledem ke (2) z intervalů

$$\langle 60^\circ, 150^\circ \rangle, \langle 210^\circ, 300^\circ \rangle. \quad (4)$$

Protože $x_1 x_2$ je číslo záporné, je podle (3) $2 \cos \alpha + 1 > 0$, tj. $\cos \alpha > -\frac{1}{2}$, takže α je v jednom z intervalů

$$\langle 0^\circ, 120^\circ \rangle, \langle 240^\circ, 360^\circ \rangle. \quad (5)$$

Průnik intervalů (4), (5) jsou intervaly

$$\langle 60^\circ, 120^\circ \rangle, \langle 240^\circ, 300^\circ \rangle, \quad (6)$$

které dávají řešení úlohy.

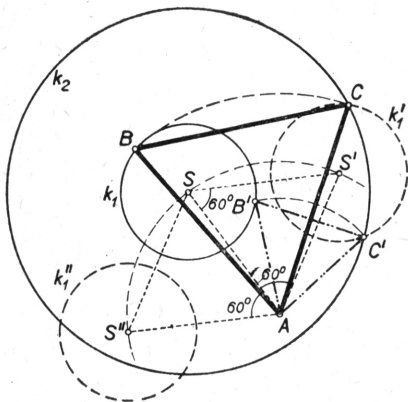
Zbývá vyřídit případ, kdy je jeden kořen kladný a druhý roven nule. To nastane právě tehdy, když je $x_1 x_2 = 0$

a zároveň $x_1 + x_2 > 0$. Z (3) pak plyne $2 \cos \alpha + 1 = 0$, tj.

$$\alpha = 120^\circ \text{ nebo } \alpha = 240^\circ; \quad (7)$$

přítom vskutku je $2 \cos \alpha - 1 = -2 \neq 0$. Dále je $x_1 + x_2 = 2$, což je kladné číslo. Spojením (1'), (6), (7) dostáváme, že řešením úlohy jsou všechna α z intervalů $(60^\circ, 120^\circ), (240^\circ, 300^\circ)$.

4. V rovině jsou dány body A, S o dané vzdálenosti $a > 0$. Dále jsou dána kladná čísla b, c , pro která platí $b < a < c$.



Obr. 13.

Sestrojte rovnostranný trojúhelník ABC tak, aby jeho vrcholy B, C měly od bodu S po řadě vzdálenosti b, c . Udejte podmínky řešitelnosti pomocí čísel a, b, c .

Řešení. I. *Rozbor* (obr. 13). Vrcholy B, C každého z hledaných trojúhelníků ABC leží po řadě na kružnicích

$k_1 \equiv (S; b)$, $k_2 \equiv (S, c)$. Otočení O kolem středu A o úhel velikosti 60° ve vhodném smyslu (kladném nebo záporném) převede vrchol B ve vrchol C ; toto otočení O převede kružnici k_1 v jistou kružnici $k'_1 \equiv \equiv (S', b)$. Bod C pak náleží dvěma geometrickým místům bodů: kružnici k_2 a kružnici k'_1 (resp. kružnici k''_1 ; kružnice k'_1, k''_1 vzniknou z k_1 otočením kolem bodu A o úhel velikosti 60° v kladném a záporném smyslu). Tím je rozbor úlohy proveden.

Z rozboru vyplývá *konstrukce*; je-li C libovolný společný bod kružnic k_2, k'_1 , je $C \equiv A$ (neboť $c > a$). Bod B dostaneme otočením bodu C kolem A o úhel velikosti 60° ve vhodném smyslu. Trojúhelník ABC je rovno-ramenný se základnou BC ; úhel proti základně má velikost $\sphericalangle BAC = 60^\circ$. Je tedy $\triangle ABC$ rovnostranný a splňuje zřejmě podmínky úlohy.

Diskuse. Úloha má tolik různých řešení, kolik různých společných bodů mají kružnice k_2, k'_1 a k_2, k''_1 (u obou těchto dvojic jsou počty společných bodů stejné, neboť obě dvojice jsou souměrně sdruženy podle přímky AS). Protože trojúhelník ASS' je rovnostranný, je $SS' = AS = a$. Podmínka pro existenci společných bodů obou kružnic tedy zní

$$b + c \geq a \geq c - b \quad (1)$$

(neboť $c > a > b$). Platí-li v (1) rovnost, má úloha dvě řešení, neplatí-li v (1) žádná rovnost, má úloha čtyři řešení.

4. ÚLOHY I. KOLA KATEGORIE B

1. Šesticiferné přirozené číslo, které je v dekadické soustavě zapsáno ve tvaru $(xyxyxy)$, kde x, y jsou některé z cifer 0, 1, 2, ..., 9, nemá většího prvočinitele než 97; dokažte.

Řešení. Hledané číslo N zapsané znakem $(xyxyxy)$ je

$$\begin{aligned} N &= 10^5x + 10^4y + 10^3x + 10^2y + 10x + y = \\ &= (10x + y)(10^4 + 10^2 + 1) = \\ &= 10101(10x + y) = \\ &= 3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 37(10x + y). \end{aligned}$$

Číslo $10x + y$ je dvojciferné (je $x \neq 0$) a největší prvočíselný dělitel čísla N bude $10x + y$, je-li $10x + y$ prvočíslo alespoň rovné 37; největší dvojciferné prvočíslo je 97. To vede k řešení pro $x = 9, y = 7$. Takové číslo je jediné, a to

$$979797,$$

o němž platí $979797 = 97 \cdot 10101 = 97 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 37$; každé jiné číslo uvažovaného typu má největšího prvočíselného dělitele menšího než 97.

2. V rovině je daný lichobežník $ABCD$ s větší základnou AB .

Zostrojte priamku $p \parallel AB$ takú, že úsečky AD, AC, BD, BC ju pretínajú postupne v navzájom rôznych bodoch M, N, P, Q tak, že platí $MN = NP = PQ$.

Riešenie. Označme u vzdialenosť priamok AB, p a v vzdialenosť priamok CD, p . Ďalej postupne označme a, c dĺžky základní AB, CD . Z podobnosti trojuholníkov (obr. 14)

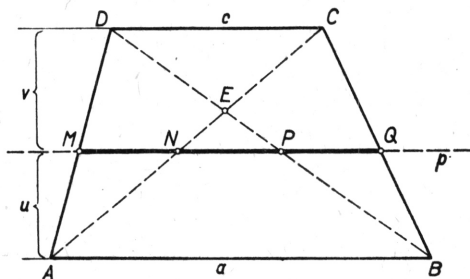
$$\triangle AMN \sim \triangle ADC$$

dostaneme rovnosť

$$MN = c \frac{u}{u + v}. \quad (1)$$

Z podobnosti trojuholníkov

$$\triangle BPQ \sim \triangle BDC$$



Obr. 14.

dostaneme rovnosť

$$PQ = c \frac{u}{u + v}. \quad (2)$$

Z podobnosti trojuholníkov

$$\triangle DMP \sim \triangle DAB$$

dostaneme rovnosť

$$MP = a \frac{v}{u + v}. \quad (3)$$

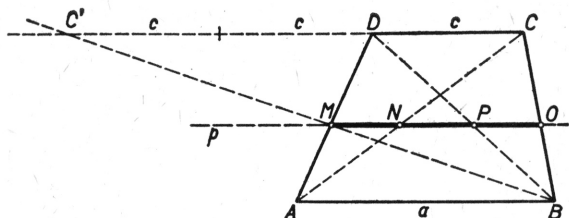
Podľa (1), (2) platí teda pre každú priamku p rovnosť $MN = PQ$. Ak platí ešte $MN = NP$, je $MP = 2MN$, t. j. podľa (1), (3)

$$av = 2cu. \quad (4)$$

K rozriešeniu úlohy stačí teda zostrojiť medzi bodmi A, D bod M tak, aby platilo [podľa (4)]

$$\frac{AM}{DM} = \frac{u}{v} = \frac{a}{2c}.$$

Konstruktoria hľadaneho bodu M je naznačená na obr. 15. Bod M je stred rovnoláhlosti, v ktorej body D , C' sú obrazmi bodov A , B .



Obr. 15.

3. Užitím výpočtu sestrojte trojúhelník ABC o obvodu 130 mm, který má tu vlastnost, že dotykové body kružnice jemu vepsané dělí strany AB , AC v obou případech v poměru 1 : 3.

Vypočtete poměr stran trojúhelníku ABC .

Řešení (obr. 16—18). Pro stručnost položíme

$$AB = c, AC = b, BC = a, 2s = a + b + c;$$

tu je z planimetrie známo, že

$$AC' = s - a, BC' = s - b, CB' = s - c \dots \quad (1)$$

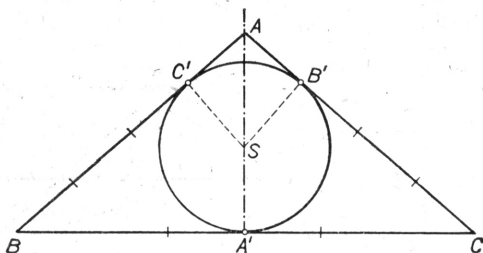
(viz označení v obr. 17).

Vzhledem k textu úlohy jsou tři možnosti: Buď je (obr. 16)

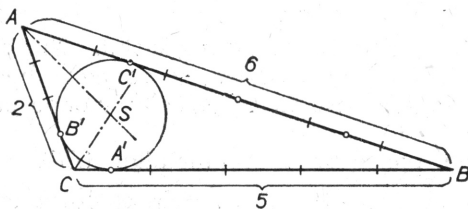
$$\frac{AC'}{BC'} = \frac{AB'}{CB'} = \frac{1}{3} \quad (2a)$$

anebo je (obr. 17)

$$\frac{AC'}{BC'} = \frac{CB'}{AB'} = \frac{1}{3}, \quad (2b)$$



Obr. 16.



Obr. 17.

anebo je (obr. 18)

$$\frac{AC'}{BC'} = \frac{AB'}{CB'} = 3. \quad (2c)$$

Zdánlivá čtvrtá možnost se dá vyloučit záměnou označení bodů B , C .

Případ [1]. Vzhledem ke vztahům (1), (2a) platí

$$\frac{s-a}{s-b} = \frac{1}{3}, \quad \frac{s-a}{s-c} = \frac{1}{3}, \text{ tj.}$$

$$a = \frac{3}{2}b, \quad b = c.$$

Je tedy

$$a : b : c = 3 : 2 : 2. \quad (3)$$

Protože pro tento poměr délek a , b , c platí

$$\begin{aligned} a + b &> c, \quad b + c > a, \\ c + a &> b, \end{aligned} \quad (4)$$

proto trojúhelníky se stranami splňujícími (3) skutečně existují (viz obr. 16).

Případ [2]. Vzhledem ke vztahům (1), (2b) platí (obr. 17)

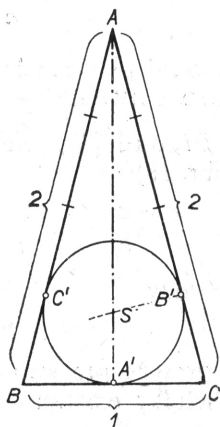
$$\frac{s-a}{s-b} = \frac{1}{3}, \quad \frac{s-c}{s-a} = \frac{1}{3}$$

neboli

$$s-b = 3(s-a), \quad s-c = \frac{1}{3}(s-a). \quad (5)$$

Protože je

$$\begin{aligned} a &= (s-b) + (s-c), \text{ dostaneme po dosazení z před-} \\ &\text{chozích vztahů } a = 3(s-a) + \frac{1}{3}(s-a) \text{ neboli } a = \\ &= \frac{10}{13}s. \end{aligned}$$



Obr. 18.

Odtud a z (5) dostaneme

$$b = 3a - 2s = \frac{4}{13}s; \quad c = \frac{1}{3}(2s + a) = \frac{12}{13}s.$$

Je tedy

$$a : b : c = 5 : 2 : 6, \quad (6)$$

přičemž platí vztahy (4) a trojúhelníky s poměrem těchto stran existují.

Případ [3]. Vzhledem k vztahům (1), (2c) platí (obr. 18)

$$\frac{s-a}{s-b} = 3, \quad \frac{s-a}{s-c} = 3 \quad \text{neboli} \quad b = c, \quad b = 2a.$$

Je tedy

$$a : b : c = 1 : 2 : 2 \quad (7)$$

a protože pro tato čísla platí vztahy (4), příslušné trojúhelníky existují.

Konstrukci v jednotlivých případech provedeme tak, že daný obvod $2s = 130$ mm rozdělíme v předepsaném poměru [viz (3), (6), (7)] a sestrojíme z takto vzniklých úseček trojúhelník, který — jak jsme dříve dokázali — existuje.

Pomocí vzorců (1) snadno provedeme zkoušku, která nás přesvědčí o tom, že příslušné dotykové body kružnice vepsané takto sestrojenému trojúhelníku dělí strany AB , AC v poměru $1 : 3$ (bez ohledu na pořadí úseků).

Úloha má tedy právě 3 řešení (pokud připustíme výměnu bodů B , C).

4. V rovine je daných 6 rôznych bodov tejto vlastnosti: každá štvorica vybraná spomedzi nich obsahuje aspoň tri body, ktoré ležia na priamke.

Dokážte, že aspoň 5 z daných šiestich bodov leží na priamke.

Riešenie. Kvôli jednoduchosti označíme dané body číslami 1, 2, 3, 4, 5, 6. Vo štvorici 1 2 3 4 existujú podľa predpokladu tri body, ktoré ležia na priamke. Označíme ich 1, 2, 3 a priamku, na ktorej ležia, označíme p . Ak mimo priamky p leží najviac jeden z bodov 4 až 6, je veta dokázaná. Pripustíme teda, že aspoň dva body (označíme ich 5, 6) ležia mimo priamky p . Vo štvorici 1 2 5 6 existuje trojica bodov ležiacich na priamke. Nemôže to byť trojica 1 2 5 ani trojica 1 2 6, pretože body 5, 6 neležia na priamke $p \equiv 1\ 2$. Trojicou bodov ležiacich na priamke je teda buď 1 5 6, alebo 2 5 6. Označenie bodov 1, 2 upravíme tak*), aby to bola trojica 1 5 6. Vo štvorici 2 3 5 6 existuje aspoň jedna trojica bodov ležiacich na priamke. Nie je ňou trojica 2 3 5 ani 2 3 6, pretože 5, 6 neležia na priamke $p \equiv 2\ 3$, no ani 2 5 6, ani 3 5 6, pretože priamka $56 \neq p$ pretína priamku p v bode 1, ktorý je rôzny od 2, 3. Tým je dokázané, že mimo priamky p nemôžu ležať dva z daných šiestich bodov, t. j. aspoň päť z daných bodov leží na p .

5. Najdte všechna celá čísla x , pro něž výraz

$$-6x^2 + 167x + 4\,823 \quad (1)$$

je roven:

- a) prvočíslu;
- b) co největšímu přirozenému číslu;
- c) co nejmenšímu přirozenému číslu.

Řešení. Daný trojčlen (1) označme y a jeho diskriminant D .

*) T. j. vymeníme případne ich označenie.

Je

$$\begin{aligned} D &= 167^2 + 4 \cdot 6 \cdot 4\,823 = 27\,889 + 115\,752 = \\ &= 143\,641 = 379^2 > 0. \end{aligned}$$

Proto rovnice $-6x^2 + 167x + 4\,823 = 0$ má dva různé reálné kořeny

$$x_1 = -\frac{53}{3}, \quad x_2 = \frac{91}{2} \quad (2)$$

a trojčlen (1) lze rozložit:

$$y = -6 \left(x + \frac{53}{3} \right) \left(x - \frac{91}{2} \right)$$

neboli

$$y = (3x + 53)(-2x + 91). \quad (3)$$

Je patrné, že pro x z intervalu

$$x_1 = -\frac{53}{3} < x < \frac{91}{2} = x_2 \quad (4)$$

je $y > 0$. Pro hranice x_1, x_2 tohoto intervalu je $y = 0$; pro ostatní x je $y < 0$.

Obraťme se nyní k jednotlivým úlohám.

a) Má-li pro celé číslo x být y prvočíslo, musí jeden z činitelů na pravé straně (3) být ± 1 . Rozlišíme možnosti:

[1]. Pro číslo 1 je jediná možnost: $-2x + 91 = 1$ neboli $x = 45$; tu je $3x + 53 = 188$, což však není prvočíslo.

[2]. Pro číslo -1 jsou dvě možnosti:

(1) Je $3x + 53 = -1$, tj. $x = -18$ a $y = -127$, což není prvočíslo.

(2) Je $-2x + 91 = -1$, tj. $x = 46$ a $y = -191$, což také není prvočíslo.

Odpověď na otázku a): Požadované číslo x neexistuje.

Pro další vyšetřování si uvědomíme, že grafem funkce (3) v pravoúhlých souřadnicích je parabola, která protne osu x souřadnic v bodech

$$X_1 \equiv \left[-\frac{53}{3}; 0 \right], \quad X_2 \equiv \left[\frac{91}{2}; 0 \right], \quad (5)$$

její vrchol V je nad osou x ; abychom stanovili souřadnice vrcholu, upravíme daný kvadratický trojčlen na tvar:

$$y = -6 \left(x^2 - 2 \cdot \frac{167}{12} x + \frac{167^2}{12^2} \right) + 4\,823 + 6 \cdot \frac{167^2}{12^2}$$

neboli

$$y = -6 \left(x - \frac{167}{12} \right)^2 + \frac{1}{24} \cdot 143\,641. \quad (6)$$

Pro vrchol V paraboly je souřadnice y maximální; ze vztahu (6) je patrné, že maximum y nastane pro

$$x - \frac{167}{12} = 0, \text{ tj. pro } x = \frac{167}{12}.$$

$$\text{Je tedy } V \equiv \left[\frac{167}{12}; \frac{143\,641}{24} \right].$$

Víme, že funkce (6) je v intervalu $\left[-\frac{53}{3}, \frac{167}{12} \right]$ rostoucí, v intervalu $\left[\frac{167}{12}; \frac{91}{2} \right]$ klesající; na základě toho zodpovíme otázky b), c).

b) Hledané celé číslo x , pro které je y v (6) co největší přirozené číslo, musí vzhledem k předchozímu být buď nejbližší přirozené číslo menší než $\frac{167}{12}$, anebo nejbližší větší přirozené číslo k číslu $\frac{167}{12}$; tj. buď je $x = 13$, anebo $x = 14$, neboť je

$$13 < \frac{167}{12} < 14.$$

Pro $x = 13$ je podle (3) $y = 92 \cdot 65 = 5980$; pro $x = 14$ je $y = 95 \cdot 63 = 5985$. Je tedy hledaným číslem číslo $x = 14$.

c) Hledané celé x , pro které je y co možná nejmenší přirozené číslo, musí být jedno z těchto čísel: buď nejbližší větší celé číslo než $x_1 = -\frac{53}{3}$, tj. $x_3 = -17$, anebo nejbližší menší celé číslo, než je $x_2 = \frac{91}{2}$, tj. $x_4 = 45$.

Pro $x = x_3$ ze (3) dostaneme

$$y = (-51 + 53)(34 + 91) = 2 \cdot 125 = 250.$$

Pro $x = x_4$ ze (3) dostaneme

$$y = (135 + 53)(-90 + 91) = 188.$$

Hledané číslo je tedy $x = 45$.

Tím je úloha úplně rozřešena.

6. Jsou dány rovnice

$$x^2 - x - 1 = 0, \quad (1)$$

$$x^2 + px - 1 = 0, \quad (2)$$

kde p je dané reálné číslo.

Dokažte, že obě rovnice mají reálné kořeny, a vyšetřte, jak jsou tyto kořeny uspořádány podle velikosti, jestliže parametr p probíhá všechna reálná čísla.

Řešení. Rovnice (2) má diskriminant $p^2 + 4 > 0$, takže má dva reálné různé kořeny; rovnici (1) dostaneme ze (2) pro $p = -1$. Každá z rovnic (1), (2) má tedy dva různé reálné kořeny. Pro $p = -1$ jsou kořeny rovnice (2) rovny po řadě kořenům rovnice (1); nechť v dalším je $p \neq -1$ a označme x_1, x_2 kořeny rovnice (1), x_3, x_4 kořeny rovnice (2). Podle známé věty o kvadratické rovnici platí:

$$x_1 + x_2 = 1 \quad (3)$$

$$x_1 x_2 = -1 \quad (3')$$

$$x_3 + x_4 = -p \quad (4)$$

$$x_3 x_4 = -1 \quad (4')$$

O kořenech lze při vhodné volbě indexů předpokládat, že je

$$x_1 > x_2, \quad x_3 > x_4; \quad (5)$$

protože však platí vztah (3'), jsou x_1, x_2 různých znamének a tedy vzhledem k (5) je $x_1 > 0, x_2 < 0$; podobně $x_3 > 0, x_4 < 0$. Platí tedy

$$x_1 > 0; \quad x_3 > 0; \quad x_2 = -\frac{1}{x_1} < 0; \quad x_4 = -\frac{1}{x_3} < 0. \quad (6)$$

Řešením (1) dostaneme

$$x_1 = \frac{1}{2} (1 + \sqrt{5}), \quad x_2 = \frac{1}{2} (1 - \sqrt{5}); \quad (7)$$

řešením rovnice (2) dostaneme

$$x_3 = \frac{1}{2} (-p + \sqrt{p^2 + 4}), \quad x_4 = \frac{1}{2} (-p - \sqrt{p^2 + 4}). \quad (8)$$

Zkoumejme, pro které hodnoty p platí $x_3 > x_1$. Podle (7), (8) dostaneme podmínku

$$-p + \sqrt{p^2 + 4} > 1 + \sqrt{5}$$

a odtud po umocnění a úpravě

$$p < -1. \quad (9)$$

Obrácením postupu zjistíme, že pro každé $p < -1$ je $x_3 > x_1$.

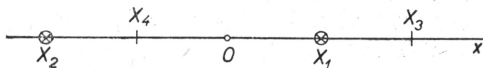
Zkoumejme obdobně, pro které hodnoty p platí $x_4 > x_2$. Podle (7), (8) dostaneme podmínku

$$-p - \sqrt{p^2 + 4} > 1 - \sqrt{5}$$

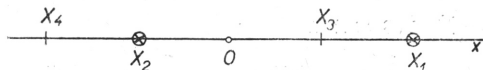
a odtud po umocnění a úpravě opět

$$p < -1. \quad (9')$$

Také zde dostaneme obrácením postupu, že pro každé $p < -1$ je $x_4 > x_2$.



Obr. 19.



Obr. 20.

Odtud vyplývá, že pro $p < -1$ nastane situace zakreslená na obr. 19, pro $p > -1$ situace zakreslená na obr. 20.

Závěr. Znázorníme-li kořeny první rovnice body x_1, x_2 a (pro $p \neq -1$) kořeny druhé rovnice body x_3, x_4 , potom je $x_1 \neq x_2, x_3 \neq x_4$ a platí: a) Obraz O nuly leží uvnitř úseček x_1x_2, x_3x_4 ; b) každá dvojice x_3, x_4 , kterou dostaneme pro $p \neq -1$, odděluje dvojici x_1, x_2 .

5. ÚLOHY II. KOLA KATEGORIE B

1. Najděte všechna nezáporná čísla a, b, c , pro která platí rovnost

$$\sqrt{a - b + c} = \sqrt{a} - \sqrt{b} + \sqrt{c}. \quad (1)$$

Řešení. Úkolem je najít všechna řešení rovnice (1). Umocnění dá

$$a - b + c = a + b + c - 2\sqrt{ab} - 2\sqrt{bc} + 2\sqrt{ac},$$

po úpravě

$$b + \sqrt{ac} = \sqrt{b} (\sqrt{a} + \sqrt{c}).$$

Další umocnění dá

$$b^2 + 2b\sqrt{ac} + ac = b(a + 2\sqrt{ac} + c),$$

po úpravě

$$b^2 - (a + c)b + ac = 0. \quad (2)$$

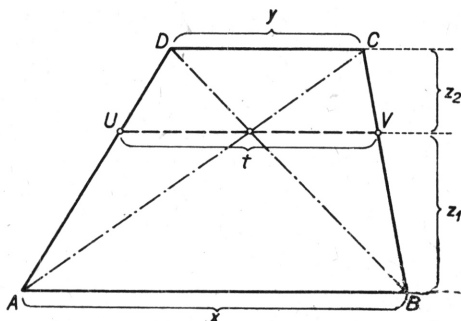
Rovnice (2) je kvadratická pro neznámou b a podle známé věty má za kořeny jediné čísla $b_1 = a, b_2 = c$; platí tedy nutně $a = b$ anebo $b = c$.

Zkouška. Např. pro libovolné nezáporné $a = b$ a libovolné nezáporné c je levá strana (1) rovna $\sqrt{c}$ a pravá rovněž $\sqrt{c}$.

2. V lichobežníku $ABCD$ sú dané dĺžky x, y základní AB, CD . Rovnobežka so základňami vedená priesečníkom uhlopriečok tohto lichobežníka pretne ramená AD, BC postupne v bodoch U, V .

Nájdite pomer obsahov lichobežníkov $ABVU, UVCD$.

Riešenie. Použijeme označenie z obr. 21. Pre obsahy P_1, P_2 lichobežníkov $ABVU, UVCD$ platí



Obr. 21.

$$P_1 = \frac{1}{2} (x + t) z_1, \quad P_2 = \frac{1}{2} (y + t) z_2,$$

takže

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{(x + t) z_1}{(y + t) z_2}. \quad (1)$$

Z rovnobežnosti úsečiek AB, UV podľa stredu O vyplýva

$$OU = x \frac{z_2}{z_1 + z_2}.$$

Z rovnolehlosti úsečiek AB , VO podľa stredu C vyplýva opäť

$$VO = x \frac{z_2}{z_1 + z_2}.$$

Stadiaľ

$$t = \frac{2xz_2}{z_1 + z_2}. \quad (2)$$

Z rovnolehlosti úsečiek AB , CD podľa stredu O vyplýva

$$\frac{x}{y} = \frac{z_1}{z_2}. \quad (3)$$

Ak zo vzťahu (3) vyjadríme z_1 a dosadíme do (2), dostaneme

$$t = \frac{2xy}{x + y}. \quad (4)$$

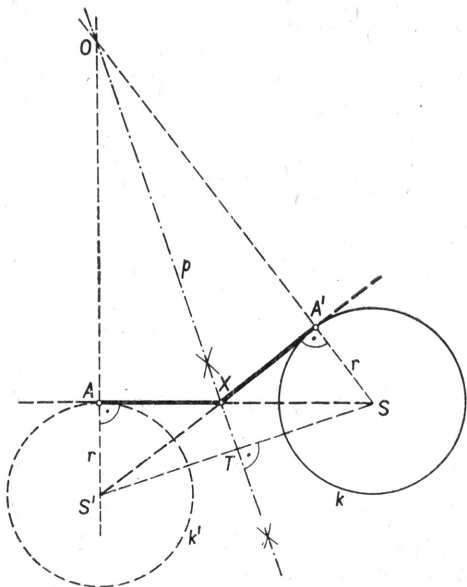
Ďalej vyjadríme pomocou vzťahu (4) dvojčleny $x + t$, $y + t$ a dosadíme do (1); dostaneme

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{(x + 3y) x^2}{(3x + y) y^2}.$$

3. Vnĕ dané kružnice $k \equiv (S, r)$ je dán bod A . Uvnitř úsečky AS sestrojte bod X tak, aby délka tečny vedené z bodu X ke kružnici k byla rovna délce úsečky AX .

Poznámka. U této úlohy uvádíme několik řešení, z nichž čtenář vidí, že některou úlohu lze řešit velmi odlišnými způsoby.

Řešení č. 1 (obr. 22). Označme A' dotkový bod hledané tečny $A'X$, kde X je bodem úsečky AS a leží vnĕ kružnice k , přičemž platí $XA' = XA$. Osa p úsečky AA' prochází bodem X (bod X je hlavním vrcholem



Obr. 22.

rovnoramenného trojúhelníku XAA'). Osová souměrnost o ose p převádí úsečku AX v úsečku $A'X$, trojúhelník SXA' (kde $\sphericalangle A' = 90^\circ$) v trojúhelník $S'XA$ a kružnici k v jistou kružnici $k' \equiv (S', r)$, která se dotýká přímky AS v bodě A . Odtud tato konstrukce:

Na kolmici vedené bodem A k přímce AS sestrojme S' tak, aby $AS' = r$ (z obou možností volme jednu), a sestrojme kružnici $k' \equiv (S', r)$. Osa p úsečky SS' má s úsečkou AS společný bod X , který je hledaným bodem.

Důkaz a diskuse. Kružnice k, k' jsou podle konstrukce souměrně sdružené vzhledem k přímce p . Je $r < AS$

Podle řešení Josefa Prokeše, 2. b roč.
SVVŠ, České Budějovice

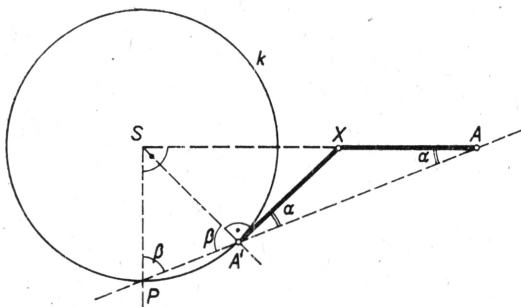


6

SA' . Platí $\triangle OXA' \cong \triangle OXA$ (usu), a tedy $OA = OA'$. Bod O je středem kružnice m , která se dotýká přímky SA v bodě A a s kružnicí k má vnější dotyk.

Konstrukci (obr. 23) provedeme převedením úlohy na sestrojení kružnice m' , která je s m soustředná, prochází bodem S a dotýká se přímky $n \parallel SA$, která má od přímky SA vzdálenost r : Jestliže bod A_1 leží na kolmici vedené bodem A k přímce SA tak, že $AA_1 = r$, sestrojíme osu q úsečky SA_1 a označíme O průsečík přímek q, AA_1 . Hledaná kružnice $m \equiv (O, OA)$ se zřejmě dotýká kružnice k vně v hledaném bodě A' ; bod X je společný bod přímek q, SA, A_1A' .

Podle řešení Václava Pištěka, 2. b roč.
SVVŠ, Pelhřimov



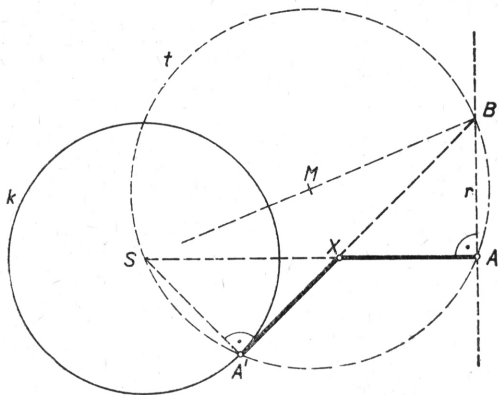
Obr. 24.

Řešení č. 3 (obr. 24). Úhel $\sphericalangle SA'A$, kde A' je hledaný dotykový bod, je tupý, neboť bod X leží uvnitř úsečky SA a je $\sphericalangle SA'X = 90^\circ$. Proto polopřímka AA' má s kružnicí k společný bod $P \equiv A'$. Označme α, β úhly při základnách AA', PA' rovnoramenných troj-

úhelníků XAA' , SPA' . Protože je $\sphericalangle SA'X = 90^\circ$, je $\sphericalangle PA'S + \sphericalangle AA'X = 90^\circ$ neboli $\alpha + \beta = 90^\circ$ a v trojúhelníku APS je nutně $\sphericalangle S = 90^\circ$. Odtud *konstrukce*:

Sestrojme kolmici k přímce SA bodem S a označme P jeden z jejích průsečíků s kružnicí k . Další průsečík přímky PA s kružnicí k označme A' (snadno se dokáže, že skutečně padne dovnitř úsečky PA); tečna v bodě A' ke kružnici k má s úsečkou společný hledaný bod X . Důkaz a diskusi provede čtenář.

Podle řešení Viliama Kozenčuka, 2. tr.
SVŠ, Trenčianske Teplice



Obr. 25.

Řešení č. 4 (obr. 25). Označme vzhledem k předchozím řešením B průsečík přímky XA' a kolmice vedené bodem A k přímce AS . Potom je $\triangle XBA \cong \triangle XSA'$ ($XA = XA'$ a shodnost ve všech úhlech) a tedy $BA = SA' = r$. Bod A' tedy leží na Thaletově kružnici t opsané nad BS jako průměrem.

Odtud plyne snadno *konstrukce*: Na kolmici vedené bodem A k přímce AS označme B jeden z obou bodů, které mají od přímky AS vzdálenost r . Nad úsečkou BS jako průměrem sestrojme kružnici t se středem M . Kružnice k , t mají zřejmě dva různé průsečíky; ten, který leží v polovině SBA , označme A' a průsečík úseček BA' , AS je hledaný bod X . Diskusi si provede čtenář.

Podle řešení Karola Trnovského, 2. tr.
SVŠ, Ružomberok

4. V rovině pravoúhlých souřadnic x, y sestrojte graf funkce

$$y = \sqrt{\frac{1}{2} (|x^2 - 32| - |x^2 - 18|)}. \quad (1)$$

Řešení. Je-li $[x, y]$ bodem grafu funkce, je i bod $[-x, y]$ bodem grafu; proto se omezíme na $x \geq 0$, přičemž je stále $y \geq 0$. Graf funkce je tedy souměrný podle osy y .

Rozlišme vzhledem k $x \geq 0$ možnosti:

[1] Necht' je $x^2 - 18 \leq 0$, tj.

$$0 \leq x \leq 3\sqrt{2} \doteq 4,2.$$

Tu je $|x^2 - 18| = -(x^2 - 18)$, $|x^2 - 32| = -(x^2 - 32)$, takže (1) zní

$$y = \sqrt{\frac{1}{2} [-x^2 + 32 + x^2 - 18]} = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot 14} = \sqrt{7},$$

tj. $y = \sqrt{7}$.

V intervalu $\langle 0, 3\sqrt{2} \rangle$ je grafem úsečka YX s krajními body $Y \equiv [0, \sqrt{7}]$, $X \equiv [3\sqrt{2}, \sqrt{7}]$.

[2] Necht' je $x^2 - 18 \geq 0$, $x^2 - 32 \leq 0$, tj.

$$3\sqrt{2} \leq x \leq 4\sqrt{2}, \quad (2)$$

pak

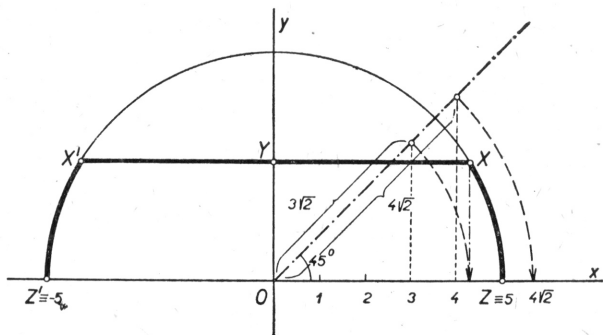
$$y = \sqrt{\frac{1}{2} [-x^2 + 32 - (x^2 - 18)]} = \sqrt{-x^2 + 25}, \quad (3)$$

takže musí platit $-x^2 + 25 \geq 0$, tj. $x \leq 5$ a spolu se (2) tedy nutně platí (je totiž $5 < 4\sqrt{2}$)

$$3\sqrt{2} \leq x \leq 5. \quad (4)$$

Ze vztahu (3) dostáváme $y^2 = -x^2 + 25$ neboli $x^2 + y^2 = 25$ a příslušné body $[x, y]$ leží na kružnici o středu O (počátek souřadnic) a poloměru 5; z této kružnice vzhledem ke (4) přichází v úvahu jen menší oblouk $\widehat{XZ}$, kde $Z \equiv [5, 0]$.

[3] Necht' je $x^2 - 32 \geq 0$ a tím i $x^2 - 18 \geq 0$, takže $|x^2 - 32| = x^2 - 32$, $|x^2 - 18| = x^2 - 18$ a $x \geq 4\sqrt{2}$. Pak pod odmocninou v (1) je -7 ; takže odmocnina ani graf neexistuje.



Obr. 26.

Graf dané funkce (obr. 26) je tedy souměrný podle osy y a skládá se ze dvou menších kruhových oblouků XZ , $X'Z'$ a z úsečky XX' , kde

$$X \equiv [3\sqrt{2}, \sqrt{7}], \quad X' \equiv [-3\sqrt{2}, \sqrt{7}], \quad Z \equiv [5, 0], \\ Z' \equiv [-5, 0].$$

6. ÚLOHY I. KOLA KATEGORIE C

1. V rovině pravoúhlých souřadnic x, y zobrazte množinu všech bodů $Z \equiv [x, y]$, o jejichž souřadnicích platí zároveň všechny tři nerovnosti:

$$|x - y| \leq 1 \quad (1)$$

$$|x + y| \leq 1 \quad (2)$$

$$x + |y| \leq 1 \quad (3)$$

Řešení. a) Zjistíme nejprve, jaký útvar je množinou bodů, jejichž souřadnice splňují nerovnost (1). Tato nerovnost platí zároveň s nerovností, kterou dostaneme jejím umocněním dvěma, tj. s nerovností

$$(x - y)^2 \leq 1. \quad (1')$$

Nerovnost (1') upravíme

$$(x - y)^2 - 1 \leq 0, \\ (x - y - 1)(x - y + 1) \leq 0. \quad (1'')$$

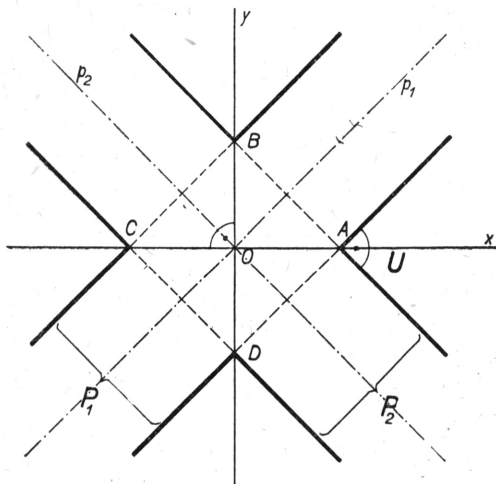
Nerovnost (1'') je splněna právě tehdy, platí-li buď zároveň

$$x - y - 1 \leq 0, \\ x - y + 1 \geq 0, \quad (4)$$

nebo zároveň

$$\begin{aligned}x - y - 1 &\geq 0, \\ x - y + 1 &\leq 0.\end{aligned}\tag{5}$$

Nerovnosti (4) vyjadřují společnou část polorovin s vyjádřením $x - y \geq -1$ a $x - y \leq 1$, tj. pás P_1 roviny, omezený přímkami o rovnicích $y = x + 1$, $y = x - 1$; obě poloroviny obsahují totiž počátek souřadnic (viz obr. 27).



Obr. 27.

Nerovnosti (5) si odporují, proto jim nevyhovují souřadnice žádného bodu.

Závěr. Množina všech bodů, jejichž souřadnice vyhovují nerovnosti (1), je pás P_1 .

Pro snazší vyjádření označíme A, B, C, D průsečíky hraničních přímk pásu P_1 s osami souřadnic, a to tak, aby platilo

$$A \equiv [1, 0], \quad B \equiv [0, 1], \quad C \equiv [-1, 0], \quad D \equiv [0, -1].$$

b) Obdobně vyšetříme množinu bodů, jejichž souřadnice vyhovují nerovnosti (2). Dostaneme postupně

$$\begin{aligned} (x + y)^2 - 1 &\leq 0, \\ (x + y - 1)(x + y + 1) &\leq 0. \end{aligned}$$

Odtud plyne buď zároveň

$$\begin{aligned} x + y - 1 &\leq 0, \\ x + y + 1 &\geq 0, \end{aligned}$$

nebo zároveň

$$\begin{aligned} x + y - 1 &\geq 0, \\ x + y + 1 &\leq 0. \end{aligned}$$

Tyto poslední dvě nerovnosti si odporují. První dvě nerovnosti vyjadřují opět pás P_2 roviny, omezený přímkami o rovnicích $y = -x + 1$, $y = -x - 1$, tj. přímkami AB, CD .

Závěr. Množina všech bodů, jejichž souřadnice vyhovují nerovnosti (2), je pás P_2 (viz obr. 27).

c) Při vyšetřování množiny bodů, jejíž vyjádření je nerovnost (3), dostaneme postupně

$$\begin{aligned} |y| &\leq 1 - x, \\ y^2 &\leq (1 - x)^2, \\ (1 - x - y)(1 - x + y) &\geq 0. \end{aligned} \tag{6}$$

Nerovnost (6) je splněna právě tehdy, platí-li buď zároveň

$$\begin{aligned} 1 - x - y &\geq 0, \\ 1 - x + y &\geq 0, \end{aligned} \quad (7)$$

nebo zároveň

$$\begin{aligned} 1 - x - y &\leq 0, \\ 1 - x + y &\leq 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Nerovnosti (7) vyjadřují poloroviny s hraničními přímkami o rovnicích $y = 1 - x$, $y = x - 1$, jež obě obsahují počátek souřadnic. Společná část těchto polorovin je pravý úhel $\sphericalangle BAD$. Nerovnosti (8) vyjadřují společnou část polorovin opačných k oběma předcházejícím, tj. pravý úhel U vrcholový k úhlu $\sphericalangle BAD$.

Závěr. Nerovnost (3) vyjadřuje dvojici vrcholových úhlů; úhel $\sphericalangle BAD$ a úhel U k němu vrcholový (viz obr. 27).

Průnik pásů P_1, P_2 je čtverec $ABCD$, který leží v pravém úhlu $\sphericalangle BAD$. Tento čtverec má s úhlem U jediný společný bod, tj. bod A .

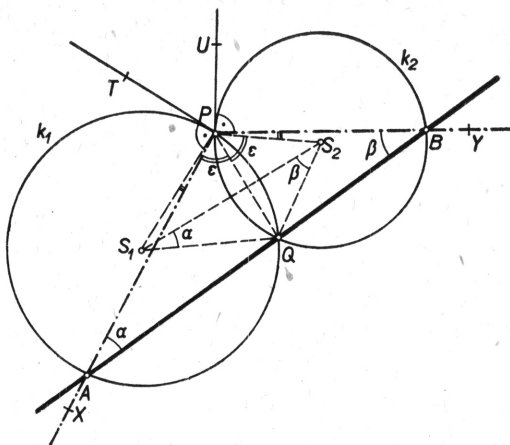
Výsledek. Množina všech bodů, jejichž souřadnice vyhovují zároveň nerovnostem (1), (2), (3), je čtverec $ABCD$.

2. SÚ dané dve kružnice k_1, k_2 so spoločnou tetivou PQ , ktorá oddeľuje ich stredy.

Nájdite na kružnici k_1 bod A a na kružnici k_2 bod B tak, aby bod Q ležal vo vnútri úsečky AB a aby platilo $\sphericalangle APQ = \sphericalangle BPQ$.

Riešenie (obr. 28). *Rozbor.* Označíme

$$\alpha = \sphericalangle PAQ, \beta = \sphericalangle PBQ, \varepsilon = \sphericalangle APQ = \sphericalangle BPQ.$$



Obr. 28.

Z trojuholníkov APQ , BPQ vyplýva podľa vety o vonkajšom uhle trojuholníka

skadiaľ

$$(\alpha + \varepsilon) + (\beta + \varepsilon) = 180^\circ,$$

$$\varepsilon = 90^\circ - \frac{1}{2}(\alpha + \beta). \quad (1)$$

Podľa vety o stredovom a obvodovom uhle je

$$\sphericalangle PS_1Q = 2\alpha, \quad \sphericalangle PS_2Q = 2\beta.$$

Pretože priamka S_1S_2 rozpoluje oba uhly $\sphericalangle PS_1Q$, $\sphericalangle PS_2Q$, je

a ďalej

$$\sphericalangle PS_1S_2 = \alpha, \quad \sphericalangle PS_2S_1 = \beta$$

$$\sphericalangle S_1PS_2 = 180^\circ - (\alpha + \beta). \quad (2)$$

Porovnaním vzťahov (1), (2) dostaneme

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \sphericalangle S_1 P S_2. \quad (3)$$

Zo vzťahu (3) vyplýva táto *konštrukcia*: Zostrojíme polpriamky PX , PY ležiace postupne v polrovinách PQS_1 , PQS_2 tak, aby platilo

$$\sphericalangle QPX = \sphericalangle QPY = \varepsilon.$$

Ak pretnú polpriamky PX , PY postupne kružnice k_1 , k_2 v bodoch $A \equiv P$, $B \equiv P$, je $\sphericalangle PAQ = \alpha$, $\sphericalangle PBQ = \beta$. Preto platí

$$\sphericalangle AQP = 180^\circ - (\alpha + \varepsilon),$$

$$\sphericalangle BQP = 180^\circ - (\beta + \varepsilon),$$

t. j. podľa (1)

$$\sphericalangle AQP + \sphericalangle BQP = 360^\circ - (\alpha + \beta + 2\varepsilon) = 180^\circ.$$

Body A , B , Q ležia teda na priamke.

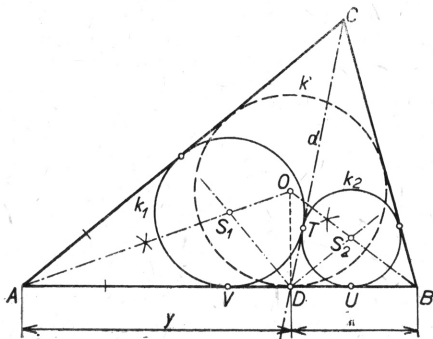
Diskusia. Zostáva rozhodnúť, za akých podmienok má úloha riešenie; riešenie je potom jediné. Pretože priamka PQ oddeľuje stredy S_1 , S_2 , prislúchajú obvodové uhly α , β k menším oblúkom PQ a sú obidva ostré.

Označíme PT , PU polpriamky, ktoré ležia postupne v dotýčniciach kružníc k_1 , k_2 v bode P a postupne v polrovinách PQS_1 , PQS_2 . Uhly $\sphericalangle QPT$, $\sphericalangle QPU$ sú obidva tupé. Ak sú PX , PY polpriamky, o ktorých bola reč v skúške konštrukcie, je $\sphericalangle QPX = \sphericalangle QPY = \varepsilon$ a podľa (3) je $\varepsilon < 90^\circ$, pretože uhol $\sphericalangle S_1 P S_2$ je dutý. Preto pretnú polpriamky PX , PY postupne kružnice k_1 , k_2 v bodoch $A \equiv P$, $B \equiv P$.

Výsledok diskusie: Úloha má vždy jediné riešenie.

3. V rovine je daný trojuholník ABC . Použitím výpočtu určite medzi bodmi A, B taký bod D , aby sa kružnice vpísané trojuholníkom ACD a BCD dotýkali priamky CD v tom istom bode.

Riešenie. Rozbor. Označme strany trojuholníka ABC obvyklým spôsobom: $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$; ďalej označme $d = CD$, $x = BD$, $y = AD$ (obr. 29), T spo-



Obr. 29.

ločný dotykový bod oboch vpísaných kružníc, ležiaci na strane CD . Potom platí podľa známeho vzorca

$$DT = \frac{1}{2} (x + d - a) \text{ (z trojuholníka } BCD),$$

$$DT = \frac{1}{2} (y + d - b) \text{ (z trojuholníka } ACD).$$

Porovnaním dostávame $x + d - a = y + d - b$ čiže

$$x - y = a - b. \quad (1)$$

Okrem toho je

$$x + y = c. \quad (2)$$

Z (1) a (2) vyplýva sčítaním

$$x = \frac{1}{2} (a + c - b) = s - b, \quad (3)$$

kde $s = \frac{1}{2} (a + b + c)$. Podľa známej vety je teda bod D bodom dotyku kružnice vpísanej trojuholníku ABC .

Skúška. Zostrojíme bod D ako bod dotyku kružnice vpísanej trojuholníku ABC ležiaci na strane AB . Trojuholníkom ACD , BCD vpíšeme postupne kružnice k_1 , k_2 , ktoré sa dotýkajú strany CD postupne v bodoch T_1 , T_2 . Vypočítame podľa známeho vzorca

$$DT_1 = \frac{1}{2} (d + y - b), \quad DT_2 = \frac{1}{2} (d + x - a). \quad (4)$$

Pretože je podľa (3) $x = s - b$, je $y = s - a$. Dosadením do (4) dostaneme

$$DT_1 = \frac{1}{2} (d + s - a - b) = DT_2. \quad (5)$$

Pretože oba body T_1 , T_2 ležia na polpriamke DC , je podľa (5) $T_1 \equiv T_2$ a kružnice k_1 , k_2 splňujú požiadavky úlohy.

Úloha má zrejme vždy jediné riešenie.

4. Najdzte všechna celá čísla x , pro která je výraz

$$V = \frac{6(x^2 - 3px - x + 3p)}{x^3 - 3px^2 - x + 3p}$$

roven celému číslu.

Proveďte diskusi řešitelnosti vzhledem k danému celému číslu p .

Řešení. Rozložme jmenovatele a čitatele v daném zlomku:

$$6(x^2 - 3px - x + 3p) = 6[(x^2 - x) - 3p(x - 1)] = \\ = 6(x - 1)(x - 3p);$$

$$x^3 - 3px^2 - x + 3p = x^2(x - 3p) - (x - 3p) = \\ = (x - 1)(x + 1)(x - 3p).$$

Platí tedy

$$V = \frac{6(x - 1)(x - 3p)}{(x - 1)(x + 1)(x - 3p)}. \quad (1)$$

Výraz V má tedy význam pro všechna reálná čísla x s výjimkou čísel

$$-1; 1; 3p. \quad (2)$$

Nechť je tedy dále x různé od čísel (2). Zkrátíme zlomek na pravé straně (1) a dostaneme

$$V = \frac{6}{x + 1}. \quad (3)$$

Tento zlomek má být roven celému číslu, tj. číslo $x + 1$ musí být dělitelem čísla 6 neboli číslo $x + 1$ musí být rovno některému z čísel

$$-6; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 6.$$

Odtud pro x dostáváme po řadě tyto hodnoty:

$$-7; -4; -3; -2; 0; 1; 2; 5.$$

Podle (2) je vyloučena možnost $x = 1$ a možnosti $x = -3$, $x = 0$, které dostaneme ve (2) pro $p = -1$

a $p = 0$. Zbývá těchto 5 případů, k nimž pomocí (3) určíme hned příslušnou hodnotu V :

x	-7	-4	-2	2	5
V	-1	-2	-6	2	1

5. Žák měl najít objem kváдру z jeho daných rozměrů, což byla přirozená čísla. Když žák objem vypočetl, zjistil, že dojde k témuž výsledku, když sečte všechny tři rozměry.

Ukažte, že pomocí těchto údajů lze s jediným výsledkem vypočítat rozměry daného kváдру.

Řešení. Označme x, y, z rozměry kváдру tak, aby platilo

$$x \geq y \geq z. \quad (1)$$

Objem je $V = xyz$; podle textu úlohy platí

$$xyz = x + y + z. \quad (2)$$

Avšak vzhledem k (1) je $x + y + z \leq 3x$ a ze (2) vyplývá, že nutně platí

$$xyz \leq 3x$$

a po dělení obou stran číslem x

$$yz \leq 3.$$

Pro přirozená čísla y, z máme vzhledem k (1) tyto tři případy:

$$[1] y = 3, z = 1, [2] y = 2, z = 1, [3] y = 1, z = 1.$$

Dosaďme za y, z do (2) a hledejme příslušné x , přičemž má platit (1):

Případ [1]. Pro $y = 3, z = 1$ ze (2) dostaneme $3x = x + 4$, tj. $x = 2$, což je spor se vztahy (1); nedostáváme žádné řešení.

Případ [2]. Pro $y = 2, z = 1$ ze (2) dostaneme $2x = x + 3$, tj. $x = 3$, což vyhovuje (1). Skutečně $V = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ a $x + y + z = 6$.

Případ [3]. Pro $y = z = 1$ dostaneme $x = x + 2$, takže není žádné řešení.

Odpověď. Rozměry kváдру jsou 3, 2, 1.

6. Je dán pravoúhlý rovnoramenný trojúhelník ABC s přeponou AB délky 1 a kladné číslo d . Světelný paprsek vyslaný z bodu X , který leží mezi body A, B , se odrazí na odvěsni BC v bodě Y a dopadne právě do středu M odvěsny AC .

Sestrojte bod X tak, aby dráha $XY + YM$ paprsku měla danou délku d . Provedte diskusi vzhledem k číslu d .

Řešení. Použijeme zákona o odrazu světelného paprsku: musí být $\sphericalangle CYM = \sphericalangle BYX$. Proto při překlopení trojúhelníku ABC kolem odvěsny BC přejde úsečka YM v úsečku YM' tak, že body X, Y, M' leží v přímce. Přitom M' je střed překlopené odvěsny $A'C$. Má-li být $XY + YM = d$, musí být $XY + YM' = XM' = d$, tj. bod X musí ležet na kružnici $k \equiv (M'; d)$ a uvnitř úsečky AB . Tato podmínka je nejen nutná, ale i postačující.

Vzdálenost bodu M' od přímky AB je dána délkou kolmice $M'Q \parallel A'B$ (viz obr. 30); $M'Q = \frac{3}{4}$. Úloha má tedy tyto možnosti řešení:

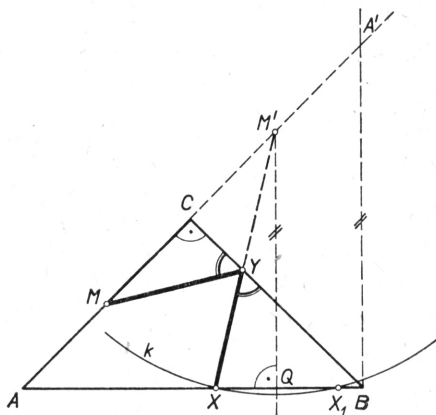
Žádné řešení pro $d < \frac{3}{4}$,

1 řešení pro $d = \frac{3}{4}$,

2 řešení pro $\frac{3}{4} < d < M'B$,

1 řešení pro $M'B \leq d < M'A$,

žádné řešení pro $d \geq M'A$.



Obr. 30.

Vzdálenosti $M'B$, $M'A$ se vypočtou snadno: $M'A = \frac{3}{4} \sqrt{2} \doteq 1,06$ a podle Pythagorovy věty je

$$M'B = \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{10}{16}} = \frac{\sqrt{10}}{4} \doteq 0,79.$$

7. ÚLOHY II. KOLA KATEGÓRIE C

1. Riešte rovnicu

$$\frac{1}{x-p} + \frac{1}{x-2p} + \frac{1}{x+3p} = \frac{3}{x}, \quad (1)$$

kde x je neznáma a p dané reálne číslo.

Riešenie. Vynásobme obidve strany danej rovnice (1) číslom $x(x-p)(x-2p)(x+3p)$ a postupne upravujeme:

$$x(x-2p)(x+3p) + x(x-p)(x+3p) + \\ + x(x-p)(x-2p) = 3(x-p)(x-2p)(x+3p),$$

$$3x^3 + (3p - 2p + 3p - p - 2p - p)x^2 + \\ + (-6p^2 - 3p^2 + 2p^2)x = 3x^3 + (3p - 2p - p)x^2 + \\ + 3(2p^2 - 6p^2 - 3p^2)x + 18p^3,$$

$$14p^2x = 18p^3,$$

$$7p^2x = 9p^3. \quad (2)$$

Rozoznávajme dve možnosti:

[1] Nech je $p = 0$. Potom rovnica (1) je splnená pre každé $x \neq 0$. Vtedy totiž skutočne platí rovnosť

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x} = \frac{3}{x}.$$

[2] Nech je $p \neq 0$. Potom z rovnice (2) dostaneme

$$x = \frac{9p}{7}. \quad (3)$$

Prevedme skúšku dosadením. Pre ľavú stranu rovnice (1) dostaneme postupne:

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{\frac{9p}{7} - p} + \frac{1}{\frac{9p}{7} - 2p} + \frac{1}{\frac{9p}{7} + 3p} = \\ &= \frac{7}{(9-7)p} + \frac{7}{(9-14)p} + \frac{7}{(9+21)p} = \\ &= \frac{7}{p} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5} + \frac{1}{30} \right) = \\ &= \frac{7}{p} \cdot \frac{15-6+1}{30} = \frac{7}{3p}. \end{aligned}$$

Predchádzajúci výpočet platí pre každé $p \neq 0$. Pre pravú stranu rovnice (1) dostaneme

$$P = \frac{3 \cdot 7}{9p} = \frac{7}{3p}.$$

Je teda skutočne $L = P$ a číslo (3) je pre $p \neq 0$ jediným koreňom danej rovnice.

2. Odvesna pravouhlého trojuholníka má veľkosť 1. Ťažnica prislúchajúca k druhej odvesne je kolmá k ťažnici prislúchajúcej k prepone.

Vypočítajte dĺžku ostatných dvoch strán.

Riešenie (obr. 31). V danom trojuholníku ABC označme $\sphericalangle C = 90^\circ$, $a = BC$, $b = CA = 1$, $c = AB$, takže podľa Pythagorovej vety platí:

$$a^2 + 1^2 = c^2. \quad (1)$$

Nech sú ďalej A' , C' postupne stredy strán BC , AB . Ťažnice AA' , CC' majú spoločný bod T , ťažisko troj-

uholníka. Preto platí $2 \cdot TA' = TA$, $2 \cdot TC' = TC$. Položme

$$TA' = x, TC' = y. \quad (2)$$

Je teda

$$TC = 2y, TA = 2x, C'A = CC' = 3y. \quad (3)$$

Z pravouhlých trojuholníkov ACT , $AC'T$ dostaneme pomocou Pythagorovej vety

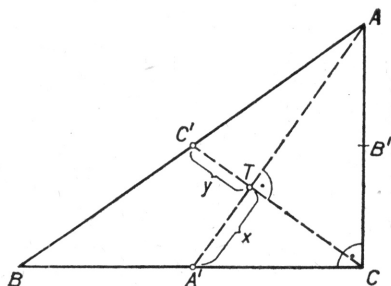
$$(2x)^2 + (2y)^2 = 1,$$

$$(2x)^2 + y^2 = (3y)^2$$

čiže

$$4x^2 + 4y^2 = 1,$$

$$x^2 = 2y^2.$$



Obr. 31.

Z oboch posledných rovníc dostaneme $6x^2 = 1$, $12y^2 = 1$, t. j.

$$x = \frac{1}{\sqrt{6}}, \quad y = \frac{1}{\sqrt{12}}.$$

Pretože $c = 6y$, je $c = \frac{6}{\sqrt{12}} = \sqrt{3}$. Pomocou tohto výsledku a vzťahu (1) dostaneme

$$a^2 = c^2 - b^2 = 3 - 1 = 2,$$

t. j.

$$a = \sqrt{2}.$$

Trojuholník má teda tieto dĺžky strán:

$$a = \sqrt{2}, \quad b = 1, \quad c = \sqrt{3}. \quad (4)$$

Dokážeme naviac: Ak sú dĺžky strán (pravouhlého) trojuholníka dané rovnosťami (4), má trojuholník vlastnosť vyslovenú v texte úlohy.

Skúška. O týchto číslach platí vzťah (1), takže trojuholník so stranami uvedených dĺžok (podľa obrátenej Pythagorovej vety) je pravouhlý. Jeho ťažnice AA' , CC' majú dĺžky (použijeme pravoúhlý trojuholník $AA'C$ a vzťah $CC' = \frac{1}{2}AB$):

$$(AA')^2 = (3x)^2 = \left(\frac{1}{2}a\right)^2 + b^2, \quad 3y = CC' = \frac{1}{2}\sqrt{3}.$$

Po dosadení

$$9x^2 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}, \quad x^2 = \frac{1}{6}.$$

Tým

$$x = \frac{1}{\sqrt{6}}, \quad y = \frac{1}{6}\sqrt{3} = \frac{1}{\sqrt{12}}.$$

Dokážeme, že je $CC' \perp AA'$, t. j. že pre trojuholník ACT platí Pythagorova veta, t. j. že $TA^2 + TC^2 = 1$:

$$(2x)^2 + (2y)^2 = 4 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{36} \cdot 3 = \frac{4}{6} + \frac{2}{6} = 1.$$

Tým je dôkaz prevedený.

Pekne túto úlohu vyriešil Michal Maruščák,
1. b tr. SVŠ Stropkov

3. V soustavě pravoúhlých souřadnic x, y znázorněte množinu všech bodů $[x, y]$, jejichž souřadnice splňují

rovnici $y = |x - 3|$ a dále množinu všech bodů $[x, y]$, jejichž souřadnice splňují rovnici $|x| + |y| = 6$. Užitím grafického znázornění a pak výpočtem řešte soustavu rovnic

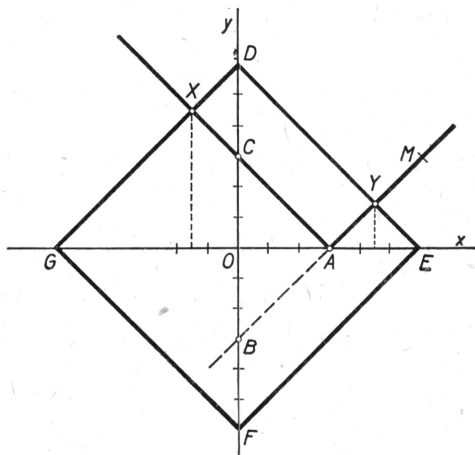
$$y = |x - 3|, \quad (1)$$

$$|x| + |y| = 6. \quad (2)$$

Řešení. I. Nejprve vyšetříme graf funkce (1), o níž zřejmě platí $y \geq 0$.

[1]. Je-li $x - 3 \geq 0$, je $|x - 3| = x - 3$; rovnice (1) pak zní

$$y = x - 3 \text{ (pro } x \geq 3\text{)}.$$



Obr. 32.

Grafem (obr. 32) je polopřímka AM opačná k polopřímce AB , určené počátkem $A \equiv [3, 0]$ a bodem $B \equiv [0, -3]$.

[2]. Je-li $x - 3 \leq 0$, je $|x - 3| = -x + 3$, rovnice (1) pak zní

$$y = -x + 3 \quad (\text{pro } x \leq 3).$$

Grafem je polopřímka AC určená počátkem A a bodem $C \equiv [0, 3]$.

Graf funkce (1) se skládá z polopřímek AM , AC .

II. Protože platí $|x| = |-x|$, $|y| = |-y|$, pak je-li bod $[x, y]$ bodem grafu rovnice (2), jsou i body $[x, -y]$, $[-x, y]$, $[-x, -y]$ body grafu této rovnice, tj. graf je souměrný podle obou os souřadnic. Stačí se tedy omezit na vyšetření grafu v I. kvadrantu. Pro $x \geq 0$, $y \geq 0$ rovnice (2) zní $x + y = 6$ neboli

$$y = -x + 6 \quad (\text{pro } x \geq 0, y \geq 0). \quad (5)$$

Grafem je úsečka DE s krajními body $D \equiv [0, 6]$, $E \equiv [6, 0]$. Grafem rovnice (2) je pak čtverec $DEFG$ se středem O .

III. Z obou grafů je patrné, že hledáme souřadnice těchto dvou průsečíků:

a) polopřímky AM a úsečky DE (označíme je Y);

b) polopřímky AC a úsečky DG (označíme je X).

Výpočet provedeme z daných dvou rovnic (1), (2).

Z rovnice (1) pak plyne

$$|y| = |x - 3|; \quad (3)$$

dosadíme-li z (3) do (2), dostaneme

$$|x| + |x - 3| = 6. \quad (4)$$

Při řešení rovnice (4) rozlišíme tři případy:

1. $x \leq 0$; pak je $|x| = -x$, $|x - 3| = 3 - x$. Rovnice (4) pak zní

$$3 - 2x = 6,$$

odtud plyne $x = -\frac{3}{2}$, $y = \frac{9}{2}$.

2. $0 \leq x \leq 3$; pak je $|x| = x$, $|x - 3| = 3 - x$. Rovnice (4) pak zní

$$x + 3 - x = 6$$

a je neřešitelná.

3. $x \geq 3$; pak je $|x| = x$, $|x - 3| = x - 3$. Rovnice (4) pak zní

$$2x - 3 = 6;$$

odtud plyne $x = \frac{9}{2}$, $y = \frac{3}{2}$.

Souřadnice obou bodů $X \equiv \left[-\frac{3}{2}, \frac{9}{2}\right]$, $Y \equiv \left[\frac{9}{2}, \frac{3}{2}\right]$ vyhovují rovnicím (1), (2); tím jsou body X , Y určeny výpočtem.

4. Kvádr $ABCD A'B'C'D'$ o rozměrech $AB = a$, $BC = b$, $AA' = c$ je zkosen dvěma rovinnými řezy. Na hraně BB' jsou sestrojeny body M , N tak, že $BM = MN = NB' = \frac{1}{3}c$. Zkosení je provedeno rovinami $C'D'M$ a $A'D'N$.

Načrtněte ve volném rovnoběžném promítání obraz výsledného tělesa a vypočtěte, jakou částí objemu daného kvádru je objem tohoto tělesa.

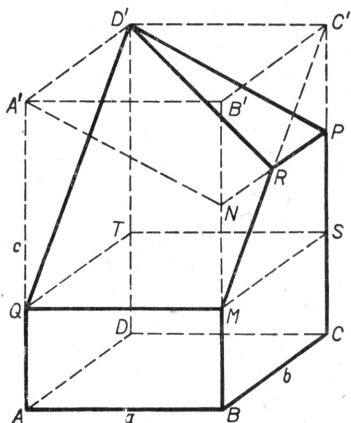
Řešení. Z obrazu 33 ve volném rovnoběžném promítání, kde $QMST$ je obdélník shodný s obdélníkem

$ABCD$ a leží v rovině rovnoběžné s rovinou ABC , je vidět, že kvádr $QMSTA'B'C'D'$ (o rozměrech $a, b, \frac{2}{3}c$) je rovinou $QMC'D'$ rozpůlen; objem této poloviny je $V_1 = \frac{1}{2}ab \cdot \frac{2}{3}c = \frac{1}{3}abc$. Objem kvádru $ABCDQMST$ (o rozměrech $a, b, \frac{1}{3}c$) je $V_2 = \frac{1}{3}abc$. Objem větší části tělesa zkoseného rovinou $C'D'M$ je tedy roven $V_3 = V_1 + V_2 = \frac{2}{3}abc$.

Objem tělesa po dalším zkosení rovinou $A'D'N$ dostaneme tak, že od čísla V_3 odečteme objem V_4 trojbokého jehlanu s podstavou $RC'P$ (kde $\sphericalangle P = 90^\circ$) a s tělesovou výškou $C'D' = a$. Přitom je $PS = PC' = \frac{1}{3}c$, takže úsečka RP je střední příčka trojúhelníku MSC' a tedy platí $RP = \frac{1}{2}b$; obsah x trojúhelníku $RC'P$ tedy je

$$x = \frac{1}{2}RP \cdot PC' = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}b \cdot \frac{1}{3}c = \frac{1}{12}bc.$$

Objem $V_4 = \frac{1}{3}x \cdot C'D'$ neboli



Obr. 33.

$$V_4 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{12} bc \cdot a = \frac{1}{36} abc.$$

Objem V výsledného tělesa pak je

$$\begin{aligned} V = V_3 - V_4 &= \frac{2}{3} abc - \frac{1}{36} abc = \frac{1}{36} (24 - 1) abc = \\ &= \frac{23}{36} abc. \end{aligned}$$

Je tedy $V = \frac{23}{36} abc$; protože $\frac{23}{36} \doteq 0,64$, je to asi 64% objemu původního kváдру.

8. ÚLOHY I. KOLA KATEGORIE D

1. Najděte všechna přirozená čísla n , pro která je číslo $10^n + 8$ dělitelné číslem 72.

Řešení. Protože je číslo $72 = 8 \cdot 9$, kde 8, 9 jsou nesoudělná čísla, musíme najít všechna přirozená čísla n , pro něž je $10^n + 8$ dělitelné devíti a osmi. Číslo $10^n + 8$ má ciferný součet $1 + 8 = 9$, takže je dělitelné devíti.

Dále je $10^n = (2 \cdot 5)^n = 2^n \cdot 5^n$. Je tedy 10^n dělitelné osmi tehdy, je-li 2^n dělitelné osmi neboli číslem 2^3 ; to nastane právě pro $n \geq 3$. Pak je $10^n + 8$ součtem dvou čísel dělitelných osmi a je tudíž dělitelné osmi.

Závěr. Dané číslo je dělitelné osmi pro všechna přirozená čísla $n \geq 3$ a pro žádná jiná.

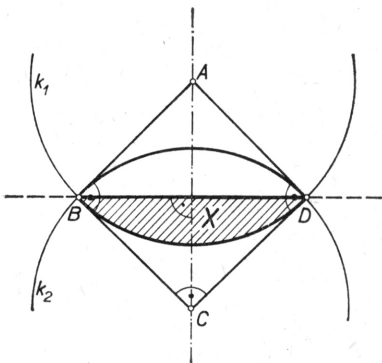
2. Je dán čtverec $ABCD$ o straně délky 1. Uvažujme dva kruhy o poloměrech délky 1 a o středech A , C . Nazveme M obrazec, který se skládá z bodů společných oběma kruhům, a V obrazec, složený z těch bodů, které náležejí alespoň jednomu z obou kruhů.

Vypočítejte v procentech, jakou částí obsahu obrazce V je obsah obrazce M .

Řešení (viz obr. 34). Označme P obsah shodných kruhů K_1, K_2 o středech A, C a poloměrech 1; je

$$P = \pi.$$

Dále označme X obsah úseče kruhu K_1 , která má středový úhel 90° ; příslušný čtvrtkruh leží v pravém úhlu $\sphericalangle BAD$. Tu X je rozdílem obsahu $\frac{1}{4}\pi$ zmíněného čtvrtkruhu a obsahu pravoúhlého trojúhelníku BDA , který se rovná $\frac{1}{2}$ (je to polovina obsahu čtverce $ABCD$, který má obsah 1); proto je



Obr. 34.

$$X = \frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}(\pi - 2).$$

Avšak $M = 2X$, tj.

$$M = \frac{1}{2}(\pi - 2). \quad (1)$$

Dále obrazec V je přímkou BD rozdělen ve dvě shodné úseče, z nichž každá má obsah Y roven obsahu P kruhu K_1 zmenšenému o obsah X dříve uvažované úseče; je

tedy $Y = P - X = \pi - \frac{1}{4}(\pi - 2) = \frac{1}{4}(3\pi + 2)$. Protože je $V = 2Y$, dostáváme

$$V = \frac{1}{2}(3\pi + 2). \quad (2)$$

Hledaný počet procent x je

$$x = 100 \cdot \frac{M}{V}.$$

Po dosazení z (1), (2) máme

$$x = 100 \cdot \frac{\pi - 2}{3\pi + 2}. \quad (3)$$

Vypočteme přibližnou hodnotu čísla x , a to tak, že položíme $\pi \doteq \frac{22}{7}$; po dosazení do vztahu (3) dostaneme

$$\begin{aligned} x &\doteq 100 \cdot \frac{\frac{22}{7} - 2}{3 \cdot \frac{22}{7} + 2} = 100 \cdot \frac{22 - 14}{66 + 14} = \\ &= 100 \cdot \frac{8}{80} = 10. \end{aligned}$$

Obsah obrazce M je asi 10 % obsahu obrazce V .

3. Je daný trojúhelník ABC .

Zostrojte body X , Y tak, aby bod X ležal na straně CA a bod Y na straně CB a aby platilo: $XY \parallel AB$, $AX + BY = XY$.

Riešenie (obr. 35). *Rozbor.* Predpokladajme, že sme našli priamku XY . Nanesme na polpriamku XY úsečku XA . Dostaneme úsečku XZ a platí $XZ = XA$. L'ahko zistíme, že vzhľadom na vzťah $AX + BY = XY$ je $YZ = YB$. Sú teda XAZ , YBZ rovnoramenné trojuholníky a v každom z nich sú oba uhly pri základni zhodné, t. j.

$$\sphericalangle XAZ = \sphericalangle XZA, \sphericalangle YBZ = \sphericalangle YZB. \quad (1)$$

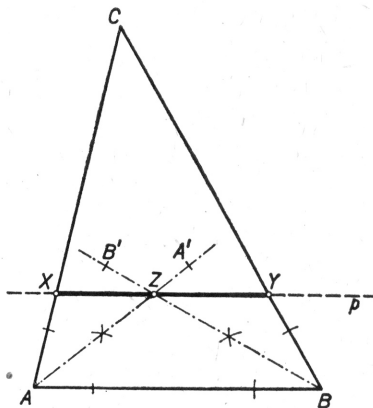
Pretože je $XY \parallel AB$, sú striedavé uhly pri týchto rovnobežkách zhodné. Platí teda:

$$\begin{aligned} \sphericalangle XZA &= \sphericalangle ZAB, \\ \sphericalangle YZB &= \sphericalangle ZBA. \end{aligned} \quad (2)$$

Porovnaním vzťahov (1), (2) dostaneme

$$\begin{aligned} \sphericalangle XAZ &= \sphericalangle ZAB, \\ \sphericalangle YBZ &= \sphericalangle ZBA. \end{aligned} \quad (3)$$

Polpriamky AZ , BZ sú teda postupne osami uhlov $\sphericalangle CAB$, $\sphericalangle CBA$ trojuholníka ABC .



Obr. 35.

Stadial' konštrukcia (obr. 35): Zostrojme postupne osi AA' , BB' uhlov $\sphericalangle A$, $\sphericalangle B$ trojuholníka ABC a ich spoločný bod označme Z (poznámka: jedná sa zrejme o stred kružnice vpísanej trojuholníku ABC). Ďalej vedme bodom Z priamku $p \parallel AB$ a označme X , Y postupne jej priesečníky s priamkami CA , CB . Potom je XY hľadaná priamka.

Skúška. Platia vzťahy (3) a podľa konštrukcie je bod Z stredom kružnice vpísanej trojuholníku ABC , takže

leží vo vnútri tohto trojuholníka. Preto body X, Y padnú postupne do vnútra úsečiek CA, CB , pričom podľa konštrukcie je $XY \parallel AB$, a preto platia vzťahy (2). Ale zo vzťahov (2), (3) vyplývajú vzťahy (1), t. j. trojuholníky XAZ, YBZ sú rovnoramenné a preto je $XA = XZ, YB = YZ$ a tým $AX + BY = XY$, čím je dôkaz prevedený.

Z prevedenej konštrukcie vyplýva, že úloha má práve jedno riešenie.

4. Rozhodnite, ktorý zo zlomkov

$$\frac{5\,555\,555\,553}{5\,555\,555\,557}, \quad \frac{6\,666\,666\,664}{6\,666\,666\,669}$$

je väčší.

Riešenie. Označme X, Y dané zlomky a kvôli stručnosti položíme

$$5\,555\,555\,557 = x, \quad 6\,666\,666\,669 = y.$$

Potom platí

$$X = \frac{x-4}{x}, \quad Y = \frac{y-5}{y}.$$

Utvorme rozdiel $X - Y$. Platí

$$X - Y = \frac{x-4}{x} - \frac{y-5}{y}.$$

Po úpravách pravej strany postupne dostaneme

$$X - Y = \frac{y(x-4) - x(y-5)}{xy} = \frac{5x-4y}{xy}. \quad (1)$$

Vypočítajme čísla $5x, 4y$; platí

$$5x = 27\,777\,777\,785,$$

$$4y = 26\,666\,666\,676.$$

Zrejme je $5x - 4y$ kladné číslo. Pretože aj čísla x, y sú kladné, je zlomok (1) kladný a preto je rozdiel $X - Y$ tiež kladný. Teda je $X > Y$.

Odpoveď. Prvý z daných zlomkov je väčší než druhý.

5. Klempířská pájka je slitina cínu a olova. Jeden druh pájky obsahuje 25 % cínu a druhý druh 60 %. Smiešením obou druhů pájek a přidáním 2 kg čistého olova máme vyrobiť 10 kg pájky obsahujúcej 30 % cínu.

Kolik kilogramů každého druhu pájky musíme přitom užít?

Řešení. Označme x počet kg pájky prvního druhu, takže pájky druhého druhu bylo vzato $(10 - 2 - x)$ kg neboli $(8 - x)$ kg. Porovnejme nyní váhy cínu v obou použitých pájkách a ve výsledné slitině;

$$x \cdot \frac{25}{100} + (8 - x) \cdot \frac{60}{100} = \frac{10 \cdot 30}{100}.$$

Upravme obě strany této rovnice; dostaneme

$$\frac{25x + 60(8 - x)}{100} = 3$$

neboli

$$\frac{480 - 35x}{100} = 3.$$

Po znásobení obou stran číslem 100 a po dalších úpravách postupně dostaneme

$$480 - 35x = 300,$$

$$180 = 35x,$$

$$\frac{36}{7} = x.$$

Pájky prvního druhu bylo vzato $5\frac{1}{7}$ kg, pájky druhého druhu $2\frac{6}{7}$ kg.

Zkouška. Obě užitá pájky se 2 kg čistého olova skutečně vážily 10 kg. Váha cínu v užitých pájkách v kg byla:

$$\begin{aligned}\frac{36}{7} \cdot \frac{25}{100} + \frac{20}{7} \cdot \frac{60}{100} &= \frac{6 \cdot 25}{700} (6 + 4 \cdot 2) = \\ &= \frac{6 \cdot 25}{700} \cdot 14 = \frac{6 \cdot 25}{100} \cdot 2 = \frac{300}{100} = 3;\end{aligned}$$

je však $\frac{3}{10} = \frac{30}{100}$, takže výsledná slitina obsahovala skutečně 30 % cínu.

6. Rovnoběžník $ABCD$ s ostrým úhlem při vrcholu A má strany $AB = 21$ cm, $AD = 13$ cm a jeho výška $DE \perp AB$ má délku 12 cm. Označme F patu výšky $DF \perp BC$.

Vypočtem dokažte, že body E, F padnou po řadě dovnitř stran AB, BC , a dále vypočtete délky obou úseček BD a EF .

Řešení (viz obr. 36). Délky úseček uvedeme v cm. Označme DE výšku v trojúhelníku ABD a DF výšku v trojúhelníku BCD . Nejprve dokážeme, že body E, F padnou po řadě dovnitř úseček AB, BC , přičemž též určíme délku BD ; potom vypočteme délky BF, DF .

a) Úhel $\sphericalangle DAB$ je podle textu úlohy ostrý; proto bod E padne dovnitř polopřímky AB . Vypočteme pomocí Pythagorovy věty délku AE z pravoúhlého trojúhelníku ADE (kde $\sphericalangle E = 90^\circ$): Je

$$\begin{aligned}AE^2 &= AD^2 - DE^2 = 13^2 - 12^2 = \\ &= (13 - 12)(13 + 12) = 25,\end{aligned}$$

a tedy

$$AE = 5, \quad BE = AB - AE = 16. \quad (1)$$

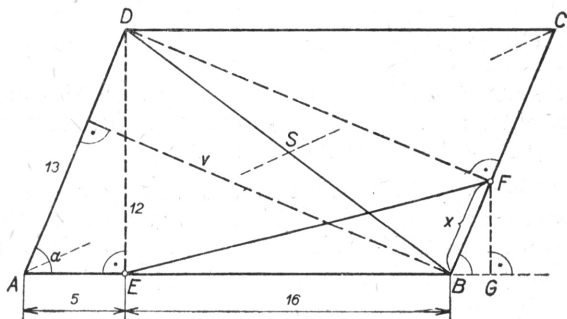
Je tedy $AE < AB$ a bod F padne dovnitř úsečky AB .

Nyní z pravoúhlého trojúhelníku BDE (kde $\sphericalangle E = 90^\circ$) vypočteme přeponu BD ; podle Pythagorovy věty platí:

$$\begin{aligned} BD^2 &= DE^2 + BE^2 = 12^2 + 16^2 = 4^2 (3^2 + 4^2) = \\ &= 4^2 \cdot 5^2 = 20^2, \end{aligned}$$

a tedy

$$BD = 20. \quad (2)$$



Obr. 36.

b) Výška DF trojúhelníku BCD je rovna výšce v trojúhelníku DAB , vedené bodem B (oba trojúhelníky jsou souměrně sdružené podle středu S rovnoběžníku $ABCD$, a tedy shodné). Obsah rovnoběžníku $ABCD$ vyjádříme dvojím způsobem:

$$AB \cdot DE = AD \cdot v, \quad \text{tj.} \quad 21 \cdot 12 = 13v,$$

a tedy

$$DF = v = \frac{21 \cdot 12}{13} = \frac{252}{13}. \quad (3)$$

Je ještě třeba dokázat, že bod F padne mezi body B , C . Z trojúhelníků ADE , BDE vypočteme pro úhly $\alpha = \sphericalangle DAE$, $\beta = \sphericalangle DBE$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{12}{5} = 2,5, \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{12}{16} = \frac{3}{4} = 0,75.$$

V tabulkách najdeme

$$\alpha > 66^\circ, \quad \beta > 36^\circ.$$

Je tedy $\alpha + \beta > 102^\circ$ a dále

$$\sphericalangle ADB = 180^\circ - (\alpha + \beta) < 180^\circ - 102^\circ = 78^\circ.$$

To znamená, že trojúhelník $\triangle ABD$ i $\triangle CDB$ s ním shodný je ostroúhlý. Proto pata každé výšky trojúhelníku CDB (tj. i bod F) leží uvnitř protější strany.

c) Zbývá vypočítat délku EF . Označme G patu kolmice spuštěné z bodu F na přímku AB . Vznikne pravoúhlý trojúhelník BFG , v němž je $\sphericalangle FBG = \alpha$. Označme $BF = x$; pak je

$$FG = x \sin \alpha, \quad EG = EB + x \cos \alpha = 16 + x \cos \alpha.$$

Podle Pythagorovy věty platí

$$EF^2 = FG^2 + EG^2 = x^2 \sin^2 \alpha + 16^2 + 32x \cos \alpha + x^2 \cos^2 \alpha,$$

$$EF^2 = x^2 (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) + 32x \cos \alpha + 16^2. \quad (4)$$

Z trojúhelníku ADE dostaneme

$$\sin \alpha = \frac{12}{13}, \quad \cos \alpha = \frac{5}{13}, \quad \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1.$$

Z (4) plyne po dosazení

$$EF^2 = x^2 + \frac{160}{13}x + 16^2. \quad (5)$$

Zbývá ještě vypočítat x z trojúhelníku BDF ; podle (3) je

$$\begin{aligned} x^2 &= BD^2 - DF^2 = 20^2 - \frac{252^2}{13^2} = \frac{4^2}{13^2} (5^2 \cdot 13^2 - 63^2) = \\ &= \frac{4^2}{13^2} (65 + 63) (65 - 63) = \frac{4^2 \cdot 16^2}{13^2}, \end{aligned}$$

a dále

$$x = \frac{64}{13}.$$

Dosadíme-li za x do (5), vyjde

$$\begin{aligned} EF^2 &= \frac{64^2}{13^2} + \frac{160}{13^2} \cdot 64 + 16^2 = \\ &= \frac{16^2}{13^2} (16 + 40 + 169) = \frac{16^2}{13^2} \cdot 15^2, \end{aligned}$$

a dále

$$EF = \frac{16 \cdot 15}{13} = \frac{240}{13} \doteq 18,5.$$

9. ÚLOHY II. KOLA KATEGORIE D

1. Jsou dány dvě různé rovnoběžky p , q o vzdálenosti d a přímka m k nim kolmá. Dále jsou dány dvě úsečky délek a , b .

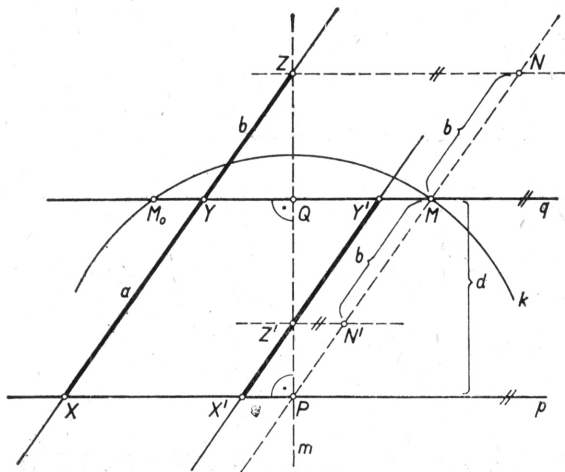
Na přímkách p , q , m sestrojte po řadě body X , Y , Z takové, aby všechny tři ležely na téže přímce a aby platilo:

$$XY = a, \quad YZ = b.$$

Udejte podmínku řešitelnosti úlohy jako vztah mezi čísly a, b, d .

Řešení (obr. 37). *Rozbor.* Označme P, Q průsečíky přímky m po řadě s přímkami p, q . Je-li XY přímka, která splňuje požadavky úlohy, vedme bodem P přímku $r \parallel XY$ a označme M její průsečík s přímkou q . Rovnoběžka s p bodem Z protne r v bodě N . Platí

$$XY = PM = a, \quad YZ = MN = b.$$



Obr. 37.

Bod M tedy leží na kružnici $k \equiv (P, a)$; bod Z leží na rovnoběžce vedené bodem N k přímce p .

Konstrukce. Opíšme kružnici $k \equiv (P, a)$ a označme M jeden společný bod kružnice k a přímky q . Na polopřímku opačnou k polopřímce MP nanese úsečku

délky b , čímž dostaneme bod N ; platí $MN = b$. Bodem N vedme rovnoběžku s přímkou p a označme Z její průsečík s přímkou m . Bodem Z vedme rovnoběžku k přímce PM a označme X, Y její průsečíky po řadě s přímkami p, q . Přímka XY vyhovuje požadavkům úlohy, jak snadno dokážeme. V obrázku 37 jsme bod N sestrojili na prodloužení úsečky PM za bod M ; potom bod Z leží na prodloužení úsečky XY za bod Y . Naproti tomu bod N' leží na polopřímce MP a vede k druhému řešení $X'Y'$.

Diskuse. Aby existoval bod M , musí být $a \geq d$ (pro $a < d$ není řešení). Pro $a = d$ zřejmě je $X \equiv P, Y \equiv Q$ a bod Z leží na prodloužení úsečky PQ za bod Q , kdežto bod Z' leží na polopřímce QP ; v tomto případě má úloha dvě řešení. Pro $a > d$ protne kružnice k přímku q v různých bodech M, M_0 a každý z nich poskytne dvě řešení, takže jsou 4 řešení; dvě a dvě jsou navzájem souměrně sdružená podle přímky m , stejně jako oba body M, M_0 .

2. V rovnoramenném lichoběžníku $ABCD$ má větš základna AB délku 4 cm; úhlopříčky lichoběžníku jsou navzájem kolmé a dělí se v poměru 2 : 1.

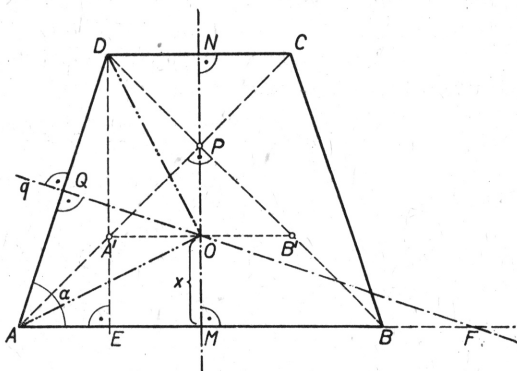
Vypočítejte poloměr kružnice lichoběžníku opsané.

Řešení. Označme P průsečík úhlopříček a M, N po řadě středy úseček AB, CD (viz obr. 38). Jsou-li A', B' středy úseček PA, PB , potom podle textu úlohy je $PA' = PC, PB' = PD$; ve středové souměrnosti o středu P si přísluší úsečky $A'B'$ a CD a je tedy $4 = AB = 2 \cdot A'B'$ ($A'B' \parallel AB$ střední příčka trojúhelníku PAB), $2 = A'B' = CD$ (středová souměrnost). Je tedy $CD = 2$. Trojúhelníky APM, DPN jsou rovnoramenné a pravoúhlé; je tedy $PM = AM = 2, PN = DN = 1$ a $MN = 3$.

Označme q osu ramena AD lichoběžníku. Průsečík O přímek MN, q je střed hledané kružnice $k \equiv (O, r)$

lichoběžníku opsané, tj. platí $OA = OD$. Sestrojíme-li v obrázku bod O , shledáme, že padne dovnitř úsečky MN . Správnost tohoto závěru ověříme výpočtem takto: Označme E patu kolmice DE k přímce AB ; tu je $AE = AM - ME = 2 - 1 = 1$; v pravoúhlém trojúhelníku ADE o přeponě AD podle Pythagorovy věty platí

$$AD^2 = AE^2 + DE^2 = 1^2 + 3^2 = 10, \quad AD = \sqrt{10}.$$



Obr. 38.

Proto je $AQ = \frac{1}{2} \sqrt{10}$, kde Q je střed úsečky AD . Přímky AB , AD , q omezují pravoúhlý trojúhelník AFQ , který má s trojúhelníkem ADE společný úhel $\alpha \equiv \angle DAE$. Pro $\cos \alpha$ tohoto úhlu z obou trojúhelníků dostaneme

$$\cos \alpha = \frac{AE}{AD} = \frac{AQ}{AF};$$

odtud dostaneme

$$AE \cdot AF = AD \cdot AQ$$

neboli

$$AF = AD \cdot \frac{AQ}{AE} = \sqrt{10} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{10} = 5.$$

Protože $AB = 4$, padne bod F do poloroviny MNB , kdežto bod Q do poloroviny MNA . Leží proto bod O úsečky QF spolu s bodem Q uvnitř poloroviny ABD , a tedy uvnitř úsečky MN .

Označme $MO = x$, takže $ON = MN - MO = 3 - x$. Z obou pravouhlých trojúhelníků OAM , ODN ($\sphericalangle M = \sphericalangle N = 90^\circ$) o přeponách OA , OD délky r pomocí Pythagorovy věty dostaneme:

$$AM^2 + OM^2 = OA^2, \quad OD^2 = ON^2 + DN^2 \quad (1)$$

neboli

$$4 + x^2 = r^2, \quad r^2 = (3 - x)^2 + 1. \quad (2)$$

Porovnejme oba tyto výsledky; dostaneme rovnici

$$4 + x^2 = (3 - x)^2 + 1$$

neboli

$$x = 1$$

(bod O je tedy střed úsečky $A'B'$). Podle (2) je $r^2 = 5$, tj.

$$r = \sqrt{5} \doteq 2,24.$$

Závěr. Vzhledem k (1) je $r = OA = OD = \sqrt{5}$.

Z úspěšných řešitelů úlohy uvádíme:

Erich Wint, 9. tr. ZDŠ, Banská Bystrica

Milan Šaling, 9. tr. ZDŠ, Podbrezová

3. Máme dva kusy klempířské pájky (slitina olova a cínu) o váhách 5 kg, $7\frac{1}{2}$ kg. Obsah cínu v prvním

kusu je $\frac{1}{4}$ jeho váhy, ve druhém kusu $\frac{1}{3}$ jeho váhy. Od každého z obou kusů oddělíme část stejné váhy a připojíme ji ke zbytku druhého kusu; po slití zbytku a nově připojené části dostaneme opět dva kusy o váze 5 kg a o váze $7\frac{1}{2}$ kg.

Vypočtete, jak těžké musí být oddělené části, aby nově slité kusy pájky obsahovaly stejné procento cínu. Proveďte zkoušku.

Řešení. V prvním kusu je 5 kg. $\frac{1}{4} = \frac{5}{4}$ kg cínu; ve druhém pak $7\frac{1}{2}$ kg. $\frac{1}{3} = \frac{5}{2}$ kg cínu. V obou kusech je $\frac{5}{4}$ kg + $\frac{5}{2}$ kg = $\frac{15}{4}$ kg cínu. Bude-li nakonec procento cínu v obou kusech stejné, bude poměr vah cínu v prvním a druhém kusu též jako poměr celkových vah těchto kusů, tj. $5 : \frac{15}{2} = \frac{2}{3}$. Celkové množství $\frac{15}{4}$ kg cínu rozdělíme v poměru $\frac{2}{3}$, tedy v prvním kusu bude $\left(\frac{15}{4} \text{ kg} \cdot \frac{1}{5}\right) 2 = \frac{3}{2}$ kg cínu, ve druhém $\left(\frac{15}{4} \text{ kg} \cdot \frac{1}{5}\right) 3 = \frac{9}{4}$ kg cínu.

V prvním kusu přibýlo o $\frac{3}{2}$ kg — $\frac{5}{4}$ kg = $\frac{1}{4}$ kg, ve druhém kusu ubylo o $\frac{5}{2}$ kg — $\frac{9}{4}$ kg = $\frac{1}{4}$ kg cínu (tedy skutečně stejná váhová množství). Jestliže jsme od každého kusu oddělili x kg pájky, pak v prvním kusu bylo v tomto

množství $\frac{x}{4}$ kg cínu, ve druhém kusu pak $\frac{x}{3}$ kg cínu.

Platí, že rozdíl $\frac{x}{3} - \frac{x}{4}$ je roven $\frac{1}{4}$ neboli $\frac{x}{12} = \frac{3}{12}$, tj. $x = 3$.

Z každého kusu jsme tedy oddělili 3 kg pájky a připojili vždy ke druhému kusu.

Zkouška. Z prvního kusu jsme odebrali 3 kg. $\frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ kg cínu, ze druhého 3 kg. $\frac{1}{3} = 1$ kg cínu. V prvním kusu zbylo $5 \text{ kg} - 3 \text{ kg} = 2 \text{ kg}$ pájky a v ní 2 kg. $\frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ kg cínu; po přidání 3 kg pájky 2. druhu k prvnímu kusu bylo v něm tedy $\frac{1}{2} \text{ kg} + 1 \text{ kg} = 1 \frac{1}{2} \text{ kg}$ cínu. Ve druhém kusu zbylo $7 \frac{1}{2} \text{ kg} - 3 \text{ kg} = 4 \frac{1}{2} \text{ kg}$ pájky a v ní bylo $\frac{9}{2} \text{ kg}$. $\frac{1}{3} = \frac{3}{2}$ kg cínu; po přidání 3 kg pájky prvního druhu ke druhému kusu v něm tedy bylo $\frac{3}{2} \text{ kg} + \frac{3}{4} \text{ kg} = \frac{9}{4} \text{ kg}$ cínu. Procenta cínu v jednotlivých kusech nakonec jsou

$$100 \cdot \left(\frac{3}{2} : 5 \right) = \frac{100 \cdot 3}{2 \cdot 5} = 30,$$

$$100 \cdot \left(\frac{9}{4} : 7 \frac{1}{2} \right) = \frac{100 \cdot 9 \cdot 2}{4 \cdot 15} = 30,$$

tedy stejná. Tím je zkouška provedena.

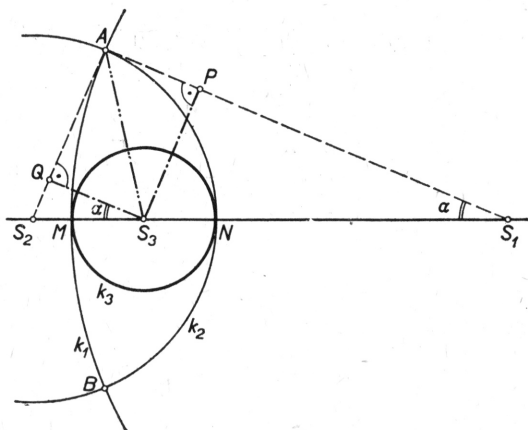
Řešil Jan Kastl, 9.b roč., 1. ZDŠ, Přeštice

4. Jsou dány kružnice $k_1 \equiv (S_1, r_1 = 12 \text{ cm})$, $k_2 \equiv (S_2, r_2 = 5 \text{ cm})$, které se protínají v bodech A, B tak,

že trojúhelník S_1S_2A má při vrcholu A pravý úhel. Kružnice $k_3 \equiv (S_3, x)$ leží uvnitř každé z kružnic k_1, k_2 a má s každou z nich vnitřní dotyk; přitom střed S_3 leží na přímce S_1S_2 .

Narýsujte obrázek a vypočítejte poloměr x a vzdálenost AS_3 .

Řešení. Délky jsou v cm. Konstrukce je patrna z obrázku 39; v něm jsou M, N body kružnic k_1, k_2



Obr. 39.

ležící uvnitř úsečky S_1S_2 , dále P, Q paty kolmic vedených bodem S_3 po řadě k přímkám AS_1, AS_2 a konečně α velikost úhlů $\sphericalangle S_2S_1A, \sphericalangle S_2S_3Q$. Trojúhelníky

$$S_1S_2A; S_1S_3P; S_3S_2Q \quad (1)$$

jsou pravoúhlé a podobné. Délku úsečky S_1S_2 najdeme pomocí Pythagorovy věty; platí

$$S_1S_2 = \sqrt{r_1^2 + r_2^2} = \sqrt{12^2 + 5^2} = \sqrt{169} = 13.$$

Pro body M, N, S_1, S_2, S_3 a délku x platí vztahy:

$$S_2M = S_1S_2 - r_1 = 13 - 12 = 1,$$

$$S_1N = S_1S_2 - r_2 = 13 - 5 = 8,$$

$$MN = 2x = S_1S_2 - S_2M - S_1N = 13 - 8 - 1 = 4;$$

$$\text{tedy} \quad x = 2.$$

Proto je

$$S_3S_1 = S_1N + x = 10, \quad S_3S_2 = S_2M + x = 3. \quad (2)$$

Úsečka AS_3 je přepona v pravoúhlém trojúhelníku AS_3P a platí

$$AS_3^2 = PS_3^2 + PA^2.$$

Musíme tedy vypočítat PS_3, PA . Vypočteme je z trojúhelníků S_1S_3P, S_3S_2Q [viz (1)], kde známe přepony (2). Platí:

$$PS_3 = S_1S_3 \sin \alpha, \quad QS_3 = S_3S_2 \cos \alpha; \quad (3)$$

pro $\sin \alpha, \cos \alpha$ plyne z trojúhelníku S_1S_2A :

$$\sin \alpha = \frac{AS_2}{S_1S_2} = \frac{5}{13}, \quad \cos \alpha = \frac{12}{13}. \quad (4)$$

Po dosazení ze (2), (4) do (3) dostaneme

$$PS_3 = \frac{50}{13}, \quad QS_3 = \frac{36}{13},$$

takže

$$\begin{aligned} AS_3 &= \sqrt{\frac{36^2 + 50^2}{13^2}} = \frac{1}{13} \sqrt{1296 + 2500} = \\ &= \frac{1}{13} \sqrt{3796} \doteq \frac{1}{13} \cdot 61,61 = 4,74. \end{aligned}$$

Odpověď. Poloměr $x = 2$ cm a vzdálenost $AS_3 \doteq 4,74$ cm.