Funkce komplexní proměnné

B. A. Fuks (author); B. V. Šabat (author); Oldřich Koníček (translator): Funkce komplexní proměnné. (Czech). Praha: Přírodovědecké nakladatelství, 1953.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/402735

Terms of use:

© Jednota československých mathematiků a fysiků

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://dml.cz

FUNKCE KOMPLEXNÍ PROMĚNNÉ

B. A. FUKS - B. V. ŠABAT

PŘÍRODOVĚDECKÉ VYDAVATELSTVÍ

B. A. FUKS - B. V. ŠABAT

FUNKCE KOMPLEXNÍ PROMĚNNÉ

PRAHA

PŘÍRODOVĚDECKÉ VYDAVATELSTVÍ

1953

Z ruského originálu Б. А. Фукс и Б. В. Шабат:
Функции комплексного переменного и некоторые их приложения Gostechizdat, Moskva 1949
přeložil Oldřich Koníček.

PŘEDMLUVA K ČESKÉMU VYDÁNÍ

Překlad knihy B. A. Fukse a B. V. Šabata „Funkce komplexní proměnné a jejich aplikace" má vyplnit mezeru v matematické literatuře tohoto oboru v českém jazyce. V knize je vyložen nejnutnější matematický aparát a methody analysy funkcí (jedné) komplexní proměnné. Větší část knihy je pak věnována aplikacím těchto method v technické a fysikální praxi. S hlediska matematické rigorosnosti výkladu by bylo možno leckdy leccos namítat, což je způsobeno tím, že výklad je zaměřen na předběžné matematické vzdělání a cíle inženýra-praktika. Pokud se týká podrobného rozvržení látky a plánu studia knihy, najde jej čtenář v předmluvě autorů a bylo by zbytečné jej zde opakovat. Překladatel doufá, že kniha bude platnou pomůckou při studiu našich aspirantů, studentů vysokých škol technického směru, výzkumníků a praktiků a pomůže jim prohloubit matematicko-theoretické znalosti.

Oldřich Koníček

PŘEDMLUVA

Iniciativa širokého uplatnění method theorie funkcí komplexní proměnné v mnoha aplikacích patří moskevské matematické škole a je navždy spojena se jménem Nikolaje Jegoroviče Žukovského.

Dále dosáhli těmito methodami G. V. Kolosov, S. A. Čaplygin, I. I. Privalov, V. V. Goluběv, N. I. Muschelišvili, M. A. Lavrentěv, M. V. Keldyš a mnozí jiní důležitých výsledků. V poslední době se s úspěchem používá method theorie funkcí komplexní proměnné v technických výpočtech.

Tato kniha je určena studentům a aspirantům vysokých škol technického směru a rovněž i inženýrům, kteří si hodlají prohloubit svoje theoreticko-vědecké znalosti.

Základem knihy jsou přednášky, které konali autoři pro studenty a aspiranty Moskevského Molotovova energetického institutu a pro studenty doplňovacího kursu Všesvazového energetického institutu pro učení na dálku. Materiál knihy byl doplněn řadou příkladů a aplikací z jiných, neenergetických technických oborů.

Zaměření knihy a její cíl určily též způsob výkladu. Autoři upustili sice od celé řady důkazů, nicméně se snažili, aby neproměnili knihu v pouhého technického průvodce. Proto byl kladen největší důraz na základní pojmy theorie funkcí komplexní proměnné. V těch případech, kde bylo upuštěno od důkazu té či oné věty, snažili se autoři vyjasnit její smysl a předpoklady vhodně volenými příklady.

Velký význam přikládají autoři též tomu, aby si čtenář osvojil konkretní aplikování method vyložených v knize. Proto byl text knihy doplněn mnoha příklady a na konci každé kapitoly byla připojena řada příkladů jako cvičení. U všech příkladů jsou uvedeny výsledky a u některých z nich návody k řešení. Autoři zdůrazňují, že samostatné řešení těchto příkladů*) je bezpodmínečně nutné pro osvojení a zvládnutí method vyložených v knize.

Kniha předpokládá znalost základů analysy. Pokud byly nutné odkazy na literaturu, byly provedeny v textu.

*) Kromě těch, které mají fakultativní charakter a jsou označeny hvězdičkou.

Pro ty čtenáře, kteří nemají možnost studia celé knihy, předkládají autoři tyto tři možné varianty studia.

Prvá varianta (úvod do základů theorie funkcí komplexní proměnné) obsahuje: Úvod, kap. I. (bez § 9), kap. II. (bez § 17), z kap. III. §§ 24—25 a 29—31, z kap. V. §§ 46—53, z kap. VI. §§ 58—61 a 64—67 a § 69 a jednotlivé příklady z kap. IV. a VII. podle vlastní volby.

Druhá varianta (pro ty, kteří se zajímají jen o theorii analytických funkcí, t. j. hodlají na př. dále studovat operátorové methody): Zde můžeme vypustit §§ 18—23 z kap. II. a z kap. III. vzít jen definice elementárních funkcí (začátky §§ 29—31), z kap. IV. §§ 34—37; v kap. V. vypustit §§ 55—57 a v kap. VI. vypustit § 70; kap. VII. vzít celou a konečně kap. VIII. možno vypustit.

Třetí varianta (pro ty, kteří se zajímají jen o theorii konformního zobrazení a jeho aplikace): Zde můžeme vypustit §§ 54—57 z kap. V. a §§ 66—68 z kap. VI. a celou kap. VII.

Nyní objasníme některé zvláštnosti našeho výkladu. (Obracíme se především k pedagogickým pracovníkům, kteří hodlají doporučit knihu ke studiu svým studentům.)

Úvod je věnován výkladu operací nad komplexními čísly. Autoři upouštějí od výkladu theorie komplexních čísel, obvyklého na střední škole, neboť tento výklad způsobuje, že si student vytvoří na komplexní čísla názor, že to jsou imaginární, ve skutečnosti neexistující objekty. V knize jsou komplexní čísla zavedena jako vektory nebo body roviny, pro které jsou definovány jisté operace. Autoři jsou si vědomi neúplnosti tohoto výkladu. Pokládají jej však vzhledem k poslání knihy za nejvýhodnější, neboť zavedení komplexních čísel jako elementů abstraktního algebraického tělesa s definovanými vlastnostmi by vyžadovalo od čtenáře přílišného a zbytečného studijního úsilí.

Kapitola I. je věnována výkladu základních pojmů analysy funkcí komplexní proměnné. Autoři, aby vybudovali u čtenáře konkretní představu, vykládají souběžně s pojmem funkce i pojem zobrazení, které funkce zprostředkuje. Také ostatní pojmy se ihned interpretují geometricky. Při výkladu je zdůrazněna ekvivalence konečných bodů a nekonečně vzdáleného bodu.

Pojmu konformního zobrazení je vzhledem k jeho důležitosti věno-

vána celá další (druhá) kapitola. Po základních definicích a větách je podrobně studováno lineární lomené zobrazení. Znalosti těchto zobrazení připraví čtenáře ke studiu posledního odstavce kapitoly, v němž jsou vyloženy obecné principy theorie konformního zobrazení.

Ve III. kapitole jsou probrány nejdůležitější elementární funkce. Autoři se zde snažili geometricky objasnit pojem regulární větve mnohoznačné funkce. Výklad je prováděn na konkretním materiálu. Obecný pojem regulární (jednoznačné) větve mnohoznačné analytické funkce a i sám pojem mnohoznačné analytické funkce je zaveden až v kap. VI. Druhý důležitý cíl, který si autoři kladou v III. kapitole (a v příkladech připojených za kapitolou), je naučit čtenáře konstrukci a výběru vhodných elementárních funkcí zprostředkujících konformní zobrazení daných oblastí.

Kapitola IV. je věnována komplexnímu potenciálu rovinného vektorového pole a aplikacím nejjednodušších method theorie funkcí komplexní proměnné na toto pole. Až do IV. kapitoly se ve výkladu téměř nevyskytují příklady, které by měly charakter aplikací. Autoři pokládají za vhodné, aby si čtenář před řešením takových příkladů nashromáždil určitou zásobu theoretických znalostí. Kromě toho shrnutí základních úvah o komplexním potenciálu v jeden souvislý celek usnadní čtenáři aplikaci method theorie funkcí komplexní proměnné na technické otázky. Od této kapitoly následuje proto vždy za výkladem matematických method několik příkladů — aplikací, které mají sloužit k ilustraci vyložené látky.

V V. a VI. kapitole je vyložen základní aparát theorie regulárních funkcí. V kapitole V. je vyložena theorie integrálního počtu a v kapitole VI. rozvoj regulární funkce v řadu. V kapitole VI. je ještě kromě toho vyložen pojem analytické funkce založený na konstrukci všech možných analytických pokračování dané regulární funkce.

Kapitoly VII. a VIII. jsou věnovány aplikacím theorie vyložené v předcházejících kapitolách, a to v kap. VII. analytickým a v kap. VIII. geometrickým aplikacím. V VII. kapitole jsou vyloženy základy theorie residuí a je zde uvedeno množství příkladů, které ilustrují obecné methody výpočtu integrálů pomocí residuí. Autoři nepokládají za vhodné uvádět jednotlivé lemmy, na kterých spočívá výpočet jednotlivých typů integrálů, jak se to dělá v některých učebnicích,

a doporučují vždy používat obecných method. V VII. kapitole je uvedeno též několik vyjádření jistých funkcí pomocí křivkových integrálů, které mají čtenáři ulehčit případné další studium operátorových method.

Během přípravy rukopisu k tisku dostali autoři mnoho cenných připomínek od svých kolegů z Moskevského energetického institutu, a to od profesorů V. I. Levina, V. J. Lomonosova a docenta J. I. Grosberga. Plán knihy a částečně i její obsah byl projednáván v semináři analytických funkcí Moskevské státní university; prof. A. I. Markuševič a ostatní členové semináře dali autorům řadu cenných připomínek. Autoři všem uvedeným děkují za jejich spolupráci.

Autoři zvláště děkují prof. A. F. Bermantovi, který pročetl celý rukopis a svými připomínkami pomohl na mnoha místech zlepšit způsob výkladu.

§ 1. Komplexní čísla. Pojem komplexního čísla zná čtenář již z kursu elementární algebry. V elementárních kursech algebry se obyčejně zavádí komplexní čísla při řešení rovnice $x^2 + 1 = 0$. Především se dokáže, že neexistuje reálné číslo, které by bylo kořenem této rovnice, a pak se zavede nové „imaginární" číslo $i = \sqrt{-1}$. Pomocí tohoto čísla se stane rovnice $x^2 + 1 = 0$ řešitelnou a její kořeny jsou $+i$ a $-i$.

Pak se zavedou „komplexní čísla" tvaru $x + iy$ jako součet reálných čísel x a čísel ryze imaginárních iy. Pravidla pro počítání s těmito čísly nám dávají možnost provádět s těmito čísly tytéž operace jako s čísly reálnými a ve výsledku vždy dosadit $i^2 = -1$. Zavedením komplexních čísel se stanou řešitelnými všechny kvadratické rovnice typu $x^2 + px + q = 0$ a dokonce obecně i všechny rovnice typu $x^n + p_1x^{n-1} + p_2x^{n-2} + \ldots + p_n = 0$ s libovolnými koeficienty.

Právě popsaný způsob zavedení komplexních čísel je neuspokojující, protože způsobuje, že se na komplexní čísla nazírá jako na reálně neexistující objekty, v doslovném slova smyslu „imaginární". Toto nazírání způsobuje, že ještě dnes existují inženýři, kteří mají strach před komplexními čísly a nedůvěřují jejich použití k praktickým výpočtům.

Půjdeme proto jinou cestou.

Mějme systém všech volných vektorů ležících v jisté rovině. *Volnými* budeme nazývat vektory s takto definovanou rovností: dva vektory jsou si *rovny*, je-li možno je ztotožnit rovnoběžným posunováním. V následujících paragrafech (§§ 2, 3 a 4) zavedeme některé operace pro vektory našeho systému. Tyto operace budou tvořit dvě skupiny.

Do prvé skupiny patří součet, rozdíl a násobení reálným číslem (skalárem) — operace, které se provádějí stejně jako v obyčejné vektorové algebře (viz § 2). Operace patřící do druhé skupiny naproti tomu podstatně odlišují algebru námi zkoumaných vektorů od obyčejné vektorové algebry. V obyčejné vektorové algebře se zavádí dva různé součiny — skalární a vektorový, ale ani jeden z nich nesplňuje všechny zákony pro součin reálných čísel. Tak na př. ani jeden z nich nedovo-

luje obrácení operace, t. j. ani skalární ani vektorové dělení. Čtenář uvidí v dalších paragrafech, že pro rovinný systém vektorů lze zavést operaci násobení a dělení (§ 3) i umocňování a odmocňování při zachování všech zákonů algebry reálných čísel. Tyto operace tvoří druhou skupinu, o níž už byla řeč výše. To, co jsme si právě řekli, nám dovoluje považovat rovinný systém vektorů s uvedenými dvěma skupinami vlastností za systém nového druhu čísel, které budeme nazývat čísla komplexní.

Tedy *množina všech čísel komplexních je tvořena rovinným systémem volných vektorů, pro které jsou definovány operace způsobem uvedeným v* §§ 2, 3 *a* 4.

Výše vyložený způsob zavedení komplexních čísel nemá nedostatky, o kterých jsme hovořili na začátku tohoto paragrafu. V jeho prospěch mluví i to, že vektorové veličiny se vyskytují ve značné části aplikací. Čtenář shledá (v § 9 a též v kap. IV. a i v jiných částech knihy), že takto zavedené operace nad komplexními čísly mají použití ve značném počtu aplikací.

Rovinu, v níž leží uvažované vektory, budeme nazývat *rovinou komplexních čísel*. Zvolíme si v této rovině libovolný bod O a používajíce toho, že vektory jsou volné, posuneme rovnoběžně počáteční body všech vektorů do bodu O. Pak je každý vektor (komplexní číslo) z jednoznačně určen svým koncovým bodem P. A naopak, každý bod P dané roviny je jednoznačně určen koncem vektoru (komplexního čísla) $z = \overrightarrow{OP}$. Existuje tedy jedno-jednoznačný vztah mezi komplexními čísly a body dané roviny.*)

Toto zjištění nám dovoluje interpretovat komplexní čísla jednak jako vektory, jednak jako *body v rovině*. V dalším výkladu budeme používat výrazu „bod z" stejně často jako výrazu „vektor z".

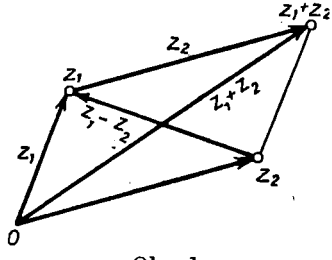
§ 2. Jednoduché operace. Definice: *Součtem* a *rozdílem* dvou komplexních čísel z_1 a z_2 budeme nazývat diagonály v rovnoběžníku sestrojeném z vektorů z_1 a z_2 (obr. 1).

Jinak řečeno, součet $z_1 + z_2$ je třetí doplňující stranou v trojúhelníku, jehož dvě prvé strany tvoří vektory z_1 a z_2. Rozdíl $z_1 - z_2$ je

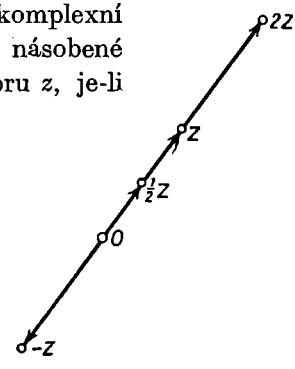
*) Bodu O odpovídá nulový vektor (komplexní číslo 0).

vektor spojující bod z_2 s bodem z_1 v tomto pořadí (viz obr. 1). Definice součtu se dá zřejmě bez obtíží rozšířit na konečný počet sčítanců.

Definice: *k-násobkem* komplexního čísla z, kde k je reálné číslo, budeme rozumět vektor (komplexní číslo) kz, jehož délka je rovna délce vektoru násobené číslem $|k|$ a jehož směr je tentýž jako vektoru z, je-li



Obr. 1.



Obr. 2.

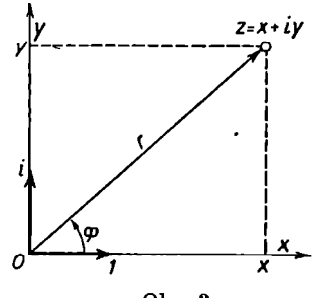
$k > 0$, a opačný, je-li $k < 0$. Pro $k = 0$ definujeme $kz = 0 \,.\, z = 0$ (viz obr. 2, kde jsou zobrazena čísla z, $2z$, $\frac{1}{2}z$, $-z$).

V každé učebnici vektorové algebry se dokazuje, že uvedené operace se řídí zákony algebry reálných čísel.

Zaveďme si nyní v rovině komplexních čísel pravoúhlý kartézský systém souřadnic xOy tak, že počátek položíme do bodu O (viz § 1). Označme si jednotkové vektory na ose Ox, resp. na ose Oy, 1, resp. i. Pak můžeme, používajíce našich definic a běžného vyjádření z vektorové algebry, vyjádřit libovolný vektor (komplexní číslo) z pomocí projekcí x a y takto*) (obr. 3):

$$z = x \,.\, 1 + y \,.\, \mathrm{i} = x + \mathrm{i}y. \qquad (1)$$

Výraz (1) se nazývá *kartézský tvar* komplexního čísla z. Jednotkové vektory 1,



Obr. 3.

*) Jak ukazuje rovnice (1), vypouštíme označení jednotkového vektoru osy Ox.

resp. i, se nazývají *reálná, resp. imaginární,***) *jednotka* a v souhlase s tím osy *Ox*, resp. *Oy*, *reálná, resp. imaginární, osa*. Projekce x, resp. y, se nazývají *reálná, resp. imaginární, část* komplexního čísla z a značí se

$$x = \operatorname{Re} z, \quad y = \operatorname{Im} z. \tag{2}$$

Leží-li konec vektoru z (s počátkem v bodě O) na reálné ose, budeme číslo $z = x + 0\mathrm{i}$ pokládat za totožné s reálným číslem x určeným koncovým bodem vektoru z. Z toho plyne: množina všech komplexních čísel obsahuje množinu všech reálných čísel jako podmnožinu. Bude-li koncový bod vektoru z ležet na imaginární ose, budeme komplexní číslo $z = 0 + yi = \mathrm{i}y$ nazývat čísle *ryze imaginárním*.

Rovnost dvou komplexních čísel je dána rovností odpovídajících vektorů (§ 1). Snadno si odvodíme podmínky rovnosti v souřadnicích. Dvě komplexní čísla $z_1 = x_1 + \mathrm{i}y_1$ a $z_2 = x_2 + \mathrm{i}y_2$ jsou si tehdy a jen tehdy rovna, jestliže

$$x_1 = x_2, \quad y_1 = y_2. \tag{3}$$

Z toho vidíme, že jedna rovnice mezi komplexními čísly je ekvivalentní dvěma rovnicím mezi čísly reálnými.

Zavedeme si nyní ještě pojem komplexně sdruženého čísla: Číslo $z_2 = x_2 + \mathrm{i}y_2$ se nazývá *komplexně sdruženým* s číslem $z_1 = x_1 + \mathrm{i}y_1$, je-li

$$x_2 = x_1, \quad y_2 = -y_1. \tag{4}$$

V tomto případě budeme psát $z_2 = \bar{z}_1$. Obrazem čísla $\bar{z}$ je bod symetricky sdružený s bodem z podle osy Ox.

Sčítání (odčítání) komplexních čísel se převádí na sčítání (odčítání) jejich reálných, resp. imaginárních částí: Budiž $z_1 = x_1 + \mathrm{i}y_1$, $z_2 = x_2 + \mathrm{i}y_2$, pak

$$z = z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + \mathrm{i}(y_1 \pm y_2). \tag{5}$$

**) Zde i v dalším používáme termínu „imaginární" jen z tradičních důvodů, aniž tímto termínem chceme označit něco neexistujícího nebo neskutečného.

Máme-li násobit komplexní číslo $z = x + iy$ reálným číslem k, násobíme jím reálnou i imaginární část čísla z:

$$z_1 = kz = kx + \mathrm{i}\, ky. \tag{6}$$

Kromě vyjádření komplexního čísla v kartézském tvaru je v mnoha případech výhodné jeho vyjádření v polárních souřadnicích. Zavedeme v rovině komplexních čisel polární souřadný systém a to tak, že položíme pól do bodu O a polární osa bude totožná s kladnou reálnou poloosou Ox. Označíme-li polární souřadnice bodu $z = x + iy$ r a φ, bude (viz obr. 3)

$$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi \tag{7}$$

a vzorec (1) bude mít tvar

$$z = x + iy = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi). \tag{8}$$

Tvar (8) se nazývá *polárním* (goniometrickým) tvarem komplexního čísla. Veličiny r, resp. φ, se nazývají *modul* (absolutní hodnota, amplituda), resp. *argument* komplexního čísla, a označují se

$$r = |z|,\ \varphi = \mathrm{Arg}\, z. \tag{9}$$

Kartézské souřadnice komplexního čísla jsou určeny jednoznačně, kdežto v případě polárních souřadnic tomu tak není. Sice

$$r = |z| = {}_{+}\sqrt{x^2 + y^2} \tag{10}$$

je jednoznačná funkce proměnných x, y, ale

$$\varphi = \mathrm{Arg}\, z = \mathrm{arctg}\,\frac{y}{x} + 2k\pi \ (k \text{ libovolné celé číslo}), \tag{11}$$

kde $\varphi = \mathrm{arctg}\,\frac{y}{x}$ volíme tak, aby $\cos\varphi = \frac{x}{r}$, $\sin\varphi = \frac{y}{r}$ ($r = {}_{+}\sqrt{x^2 + y^2}$ podle (10)). Tím je zřejmě úhel φ určen až na násobky 2π. Je tedy

funkce (11) zřejmě mnohoznačná a má nekonečně mnoho hodnot lišících se navzájem o celočíselné násobky čísla 2π. Kromě toho pro $z = 0$ není funkce $\operatorname{Arg} z$ definována.

Často je nutné pracovat s jednoznačnou větví funkce $\operatorname{Arg} z$. Pro tento účel bývá zvykem definovat funkci $\operatorname{Arg} z$ v intervalu $(-\pi, \pi>$,*) kde $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$ volíme podle výše zavedené úmluvy. Takto definovanou jednoznačnou funkci nazýváme *hlavní hodnota argumentu* a označujeme ji symbolem $\arg z$.**) Platí tedy pro hlavní hodnotu argumentu vztah

$$-\pi < \arg z \leqq \pi. \tag{12}$$

Hlavní hodnota argumentu je nespojitá na záporné reálné poloose: blížíme-li se k bodu z_0 na záporné reálné poloose shora, t. j. kladnými hodnotami y, blíží se hodnota funkce $\arg z$ hodnotě $+\pi$; blížíme-li se témuž bodu zdola, t. j. zápornými hodnotami y, blíží se hodnota funkce $\arg z$ k hodnotě $-\pi$. Při tom předpokládáme samozřejmě $z_0 \neq 0$, neboť pro bod $z = 0$ není funkce $\arg z$ vůbec definována. Ve všech ostatních bodech roviny komplexních čísel kromě již uvedeného bodu $z = 0$ je funkce $\arg z$ spojitá.*)

Použijeme-li *Eulerova vzorce* známého čtenáři z kursu vyšší matematiky**)

$$\cos\varphi + \mathrm{i} \sin\varphi = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}, \tag{13}$$

můžeme výraz (8) přepsat na tvar

$$z = r(\cos\varphi + \mathrm{i} \sin\varphi) = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}, \tag{14}$$

*) Symbol (a, b) značí otevřený interval, t. j. všechna x, pro něž platí $a < x < b$. Symbol $\langle a, b\rangle$ značí uzavřený interval, t. j. všechna x, pro něž platí $a \leqq x \leqq b$, a konečně symbol $(a, b\rangle$ značí zleva otevřený (t. j. a do intervalu nepatří) a zprava uzavřený (t. j. b do něho patří) interval. (Pozn. překl.)

**) Někdy upustíme od této úmluvy, ale v takovém případě vždy vytkneme, o kterou větev půjde.

*) Podrobněji viz § 8.

**) Tento vzorec můžeme též považovat za definici ryze imaginární mocniny čísla e. Podrobněji viz § 29.

Výraz (14) se nazývá *exponenciální tvar* komplexního čísla.

Podmínky rovnosti dvou komplexních čísel $z_1 = r_1 e^{i\varphi}$ a $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$ daných v polárním nebo exponenciálním tvaru se lehko vyjádří v polárních souřadnicích:

$$r_1 = r_2, \ \varphi_1 = \varphi_2 + 2k\pi, \tag{15}$$

kde k je libovolné číslo celé, kladné, záporné nebo nula. Podmínka pro čísla komplexně sdružená je vyjádřena vztahy

$$|\bar{z}| = |z|, \arg \bar{z} = -\arg z \ (\arg z \neq \pi). \tag{16}$$

Polární souřadnice součtu, resp. rozdílu komplexních čísel, nelze stanovit ze souřadnic obou sčítanců, resp. ze souřadnic menšence a menšitele, tak jednoduchým způsobem jako v případě kartézského tvaru. Nicméně z obr. 1 a z elementárních vlastností trojúhelníků dostaneme snadno tyto nerovnosti:

$$|z_1 + z_2| \leqq |z_1| + |z_2|, \ |z_1 - z_2| \geqq ||z_1| - |z_2||. \tag{17}$$

Obě tyto nerovnosti přecházejí v rovnost pro $\arg z_1 = \arg z_2$.

V závěru paragrafu vyložíme ještě na několika příkladech, jak lze pomocí komplexních čísel stanovit geometrická místa bodů v rovině.

Příklad 1. Lehko odvodíme, jakým rovnicím vyhovují body, ležící na kružnici o poloměru r a středu v bodě $z = a$, resp. body ležící uvnitř, resp. vně této kružnice (a jen tyto body):

$$|z - a| = r, \ |z - a| < r, \ |z - a| > r.$$

Můžeme tedy tyto vztahy považovat za určující rovnice pro uvedená geometrická místa bodů v rovině. Nerovnost

$$r \leqq |z - a| < R$$

je splněna všemi body mezikruží ohraničeného kružnicemi o poloměrech r, resp. R $(r < R)$, a středu v bodě $z = a$, při čemž body kruž-

nice o poloměru r do mezikruží počítáme, body kružnice o poloměru R nikoli.

Příklad 2. Rovnice

$$\arg z = \alpha$$

určuje polopřímku (polopaprsek) vycházející z bodu O a svírající s kladnou reálnou poloosou Ox úhel α. Nerovnost

$$\alpha < \arg z < \beta$$

určuje nekonečnou výseč omezenou dvěma polopřímkami vycházejícími z bodu O a svírajícími s kladnou reálnou poloosou Ox úhel α, resp. β (přímky samotné v to nepočítaje).

Příklad 3. Rovnice

$$\operatorname{Re} z = \alpha, \quad \operatorname{Im} z = \beta$$

určují dvě přímky rovnoběžné se souřadnými osami, nerovnost

$$\alpha \leqq \operatorname{Re} z \leqq \beta,$$

určuje svislý pás mezi přímkami $x = \alpha$ a $x = \beta$ (přímky v to počítaje); nerovnost

$$\alpha \leqq \operatorname{Re} z \leqq \beta, \quad |\operatorname{Im} z| \leqq \gamma$$

určuje vnitřek obdélníka (strany v to počítaje).

§ 3. Násobení a dělení. Definice. *Součinem* dvou komplexních čísel $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$ a $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$ budeme rozumět komplexní číslo

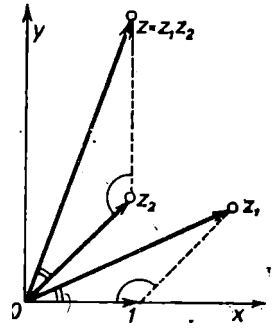
$$z = z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}. \tag{18}$$

Z toho plyne, že při násobení komplexních čísel se jejich moduly násobí a argumenty sčítají. Hodnoty mnohoznačných funkcí $\operatorname{Arg} z_1 = \varphi_1$, $\operatorname{Arg} z_2 = \varphi_2$ je možno vybrat zcela libovolně, jejich součet určuje $\operatorname{Arg} z$. V případě, že všechny tři hodnoty φ_1, φ_2 a $\varphi_1 + \varphi_2$ leží v intervalu $(-\pi, \pi\rangle$, stačí uvažovat pouze hlavní hodnoty argumentů.

Geometricky značí násobení komplexního čísla z_1 komplexním číslem z_2 délkovou dilataci (modul dilatace $|z_2|$) a pootočení o úhel $\varphi_2 = \operatorname{Arg} z_2$ (viz obr. 4, kde trojúhelníky $O1z_1$ a Oz_2z jsou podobné).

Z naší definice plyne ihned, že takto definované násobení splňuje komutativní a asociativní zákon:

$$z_1z_2 = z_2z_1;\ z_1(z_2z_3) = (z_1z_2)\,z_3. \qquad (19)$$



Obr. 4.

Příklad. $z\bar{z} = re^{i\varphi}re^{-i\varphi} = r^2$, t. j. součin komplexně sdružených čísel je roven čtverci jejich modulu. Násobení čísla z imaginární jednotkou $i = e^{\frac{1}{2}i\pi}$ značí geometricky pootočení o pravý úhel, neboť $|i| = 1$; *vynásobení* i *sebou samým* dává

$$i\,.\,i = i^2 = e^{\frac{1}{2}i\pi}\,.\,e^{\frac{1}{2}i\pi} = e^{i\pi} = -1. \qquad (20)$$

Jsou-li dána komplexní čísla z_1 a z_2 v kartézském tvaru, potom vyjdeme-li od naší definice a použijeme-li Eulerova vzorce (13), dostaneme:

$$\begin{aligned} z_1z_2 = r_1r_2e^{i(\varphi_1+\varphi_2)} &= r_1r_2\{\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\} = \\ &= r_1r_2(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + ir_1r_2(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \\ &+ \sin\varphi_2\cos\varphi_1). \end{aligned}$$

Použijeme-li ještě vztahu (7), dostáváme konečně

$$z_1z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1). \qquad (21)$$

Výraz (21) dostáváme přímo, jestliže v prvém výrazu odstraníme závorky tak, že násobíme v algebře běžným způsobem a podle (20) dosadíme do výsledku $i\,.\,i = i^2 = -1$. Z výrazu (21) ihned plyne platnost distributivního zákona

$$(z_1 + z_2)\,z = z_1z + z_2z. \qquad (22)$$

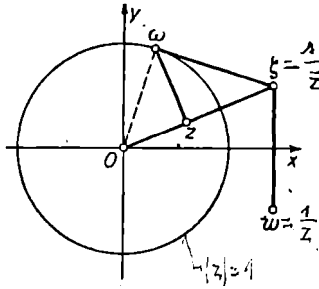
Operace násobení se zřejmě snadno zevšeobecní na konečný počet činitelů.

Námi zavedený součin se podstatně liší od skalárního a vektorového součinu. Jak jsme zdůraznili již dříve, tkví v tom základní rozdíl naší vektorové algebry od obyčejné vektorové algebry.

Definice. *Podílem* dvou komplexních čísel $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$ a $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2} \neq 0$ budeme rozumět číslo

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}. \tag{23}$$

Z toho plyne, že při dělení komplexních čísel se dělí modul dělence modulem dělitele a od argumentu dělence se odečte modul dělitele.*)



Obr. 5.

Z definice plyne dále, že dělení je inversní operace k násobení, neboť z rovnice $z = \frac{z_1}{z_2}$ plyne $zz_2 = z_1$. Dělení čísla z_1 číslem $z_2 \neq 0$ se dá převést na násobení číslem $\frac{1}{z_2}$. Vyložíme si nyní geometrickou konstrukci bodu $\frac{1}{z_2}$, je-li dán bod $z_2 \neq 0$ nebo obecněji konstrukci bodu

$$w = \frac{1}{z}, \tag{24}$$

je-li dán bod $z \neq 0$.

Budiž $|z| < 1$. V bodě z vztyčíme kolmici na polopřímku Oz. Průsečík této kolmice s jednotkovou kružnicí $|z| = 1$ nazveme ω. V bodě ω sestrojíme tečnu ke kružnici $|z| = 1$. Její průsečík s polopřímkou Oz nazveme ζ (pro $|z| > 1$ provedeme konstrukci v opačném pořádku). Viz obr. 5. Protože jsou trojúhelníky $Oz\omega$ a $O\omega\zeta$ podobné (jsou pravoúhlé a mají tentýž ostrý úhel), je $\frac{\overline{Oz}}{\overline{O\omega}} = \frac{\overline{O\omega}}{\overline{O\zeta}}$ čili $\frac{|z|}{1} = \frac{1}{|\zeta|}$, t. j. $|\zeta| = \frac{1}{|z|}$.

*) O výběru větví funkcí Arg z_1, Arg z_2, Arg z_3 platí totéž, co již bylo řečeno pro případ součinu.

A jelikož jsou argumenty z a ζ sobě rovny, je

$$\zeta = \frac{1}{\bar{z}}. \tag{25}$$

Vztah mezi komplexním číslem z a komplexním číslem $\zeta = \frac{1}{\bar{z}}$ se nazývá inverse vzhledem k jednotkové kružnici a body z a ζ se nazývají inversně sdružené vzhledem k této kružnici.

Zbývá ještě sestrojit bod w symetrický s bodem ζ podle osy Ox. Bude $|w| = |\zeta| = \frac{1}{|z|}$, $\arg w = -\arg \zeta = -\arg z$, t. j. $w = \frac{1}{z}$, což jsme měli dokázat.

Jestliže jsou komplexní čísla z_1 a z_2 dána v kartézském tvaru, pak použijeme definice (23) a vzorců (11) a (7) a dostaneme

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\{\cos(\varphi_1 - \varphi_2) - \mathrm{i}\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\} =$$

$$= \frac{r_1}{r_2}(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_1\sin\varphi_2) - \mathrm{i}\frac{r_1}{r_2}(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_2\cos\varphi_1) =$$

$$= \frac{(x_1x_2 + y_1y_2) - \mathrm{i}(x_2y_1 - y_2x_1)}{r_2^2}.$$

Lehko se přesvědčíme, že čitatel je rovný číslu $z_1\bar{z}_2$ a jmenovatel $|z_2|^2$. Tedy konečně

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\bar{z}_2}{|z_2|^2}.$$

Příklady. 1. $\frac{1}{\mathrm{i}} = \frac{1 \cdot \bar{\mathrm{i}}}{|\mathrm{i}|^2} = -\mathrm{i}$,

2. $\frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}} = \frac{(1+\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}{|1-\mathrm{i}|^2} = \mathrm{i}$, 3. $\frac{1}{1+\mathrm{i}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{i}$.

§ 4. Umocňování a odmocňování. Definice. *n-tou mocninou* komplexního čísla z budeme rozumět číslo

$$z^n = \underbrace{z \cdot z \cdot z \ldots z}_{n\text{krát}}, \quad (n \text{ číslo celé}).$$

Podle naší definice násobení dostaneme pro $z = re^{i\varphi}$.

$$z^n = r^n e^{in\varphi} = r^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi). \tag{26}$$

Příklady 1. Pro $z = i$ je

$$i^2 = i \,.\, i = -1,\ i^3 = i^2 \,.\, i = -i,\ i^4 = i^3 \,.\, i = 1 \text{ atd.}$$

obecně

$$i^{4k} = 1,\ i^{4k+1} = i,\ i^{4k+2} = -1,\ i^{4k+3} = -i,$$

kde k je libovolné celé číslo.

Příklad 2. Pro $z = e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \sin\varphi$ dává vzorec (26) t. zv. *Moivreův vzorec*

$$(\cos\varphi + i \sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi.$$

Oddělíme-li v této rovnici část reálnou a imaginární, dostaneme na př. pro $n = 3$

$$\cos 3\varphi = \cos^3\varphi - 3 \cos\varphi \sin^2\varphi,\ \sin 3\varphi = \sin^3\varphi + 3 \cos^2\varphi \sin\varphi.$$

Definice. *n-tou odmocninou* (*n*-tým kořenem) z komplexního čísla $z = re^{i\varphi}$ budeme rozumět číslo $w = \varrho e^{i\psi}$, pro které platí $w^n = z$ (n je číslo celé). Z definice plyne okamžitě

$$\varrho^n e^{in\psi} = re^{i\varphi}$$

čili

$$\varrho^n = r,\ n\psi = \varphi + 2k\pi,$$

kde k je libovolné celé číslo. Tyto dvě poslední rovnice definují jednoznačně kladné číslo ϱ a nekonečně mnoho hodnot čísla ψ:

$$\varrho = \sqrt[n]{r},\ \psi = \psi_k = \frac{\varphi + 2k\pi}{n}. \tag{27}$$

Budeme-li v druhém ze vzorců (27) postupně dosazovat $k = 0, 1, 2, \ldots, \ldots, n - 1$, dostaneme n hodnot ψ_k: $\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_{n-1}$ takových, že všechny další se od nich liší o násobky 2π.

Vzorec (27) tedy definuje pouze n různých komplexních hodnot $\sqrt[n]{z}$:

$$w_0 = (\sqrt[n]{z})_0 = {}_+\sqrt[n]{r}\,.\,e^{i\frac{\varphi}{n}},\quad w_1 = (\sqrt[n]{z})_1 = {}_+\sqrt[n]{r}\,e^{i\frac{\varphi+2\pi}{n}},\ldots,$$

$$w_{n-1} = (\sqrt[n]{z})_{n-1} = {}_+\sqrt[n]{r}\,e^{i\frac{\varphi+2(n-1)\pi}{n}},$$

protože přičtení celistvého násobku 2π k argumentu komplexního čísla nemá vliv.

Body $w_0, w_1, w_2, \ldots, w_{n-1}$ tvoří vrcholy pravidelného n-úhelníka vepsaného do kružnice se středem v bodě $z = 0$ a o poloměru $\varrho = {}_+\sqrt[n]{r}$. To plyne ihned z toho, že moduly všech w_k jsou stejné a rovny číslu $\varrho = {}_+\sqrt[n]{r}$ a od jednoho k druhému lze přejít pootočením o stejný úhel $\frac{2\pi}{n}$. Po provedení n takových pootočení se vrátíme zpět k výchozí hodnotě odmocniny.

Z uvedeného plyne, že n-tá odmocnina lichého stupně z kladného reálného čísla má n komplexních kořenů, z nichž jeden je reálný a kladný; n-tá odmocnina sudého stupně z kladného reálného čísla má n komplexních kořenů, z nichž dva jsou reálné, a to jeden kladný a druhý záporný. Důkaz přenecháváme čtenáři.

Příklad. Hledejme všechny hodnoty $\sqrt[4]{1+i}$. Je $1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ a tedy

$$w_0 = (\sqrt[4]{1+i})_0 = \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{\pi}{16} + i\sin\frac{\pi}{16}\right).$$

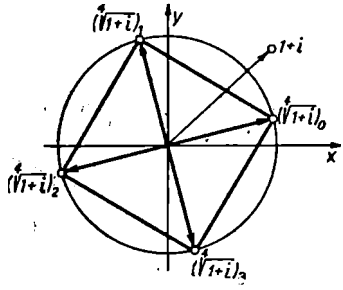
Ostatní hodnoty se liší od w_0 pootočením o úhel $\frac{2\pi}{4} = \frac{1}{2}\pi$. Tedy

$$w_1 = (\sqrt[4]{1+i})_1 = iw_0,$$

$$w_2 = (\sqrt[4]{1+i})_2 = -w_0,$$

$$w_3 = (\sqrt[4]{1+i})_3 = -iw_0.$$

Body w_k ($k = 0, 1, 2, 3$) leží ve vrcholech čtverce vepsaného do kružnice o poloměru $|w| = \sqrt[8]{2}$ (obr. 6).



Obr. 6.

ÚLOHY.

1. Napište v exponenciálním tvaru komplexní čísla $1 + i\sqrt{3}$, $1 - \cos\alpha + i\sin\alpha$.

2. Budiž $|z_1| = |z_2| = |z_3|$, $z_1 + z_2 + z_3 = 0$. Dokažte, že body z_k ($k = 1, 2, 3$) leží ve vrcholech rovnostranného trojúhelníka.

3. Jsou dány tři vrcholy rovnoběžníka z_1, z_2, z_3. Najděte čtvrtý!

4. Najděte těžiště hmot m_1, m_2, ..., m_n působících v bodech $z_1, z_2, \ldots, z_n$.

5. Jsou dány dva za sebou jdoucí vrcholy z_1 a z_2 pravidelného n-úhelníka. Najděte ostatní vrcholy!

6. Dokažte platnost identity $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2\{|z_1|^2 + |z_2|^2\}$ a vyložte ji geometricky!

7. Vyjádřete $\cos 4\varphi$ pomocí $\sin\varphi$ a $\cos\varphi$!

8. Vypočtěte: $\sqrt{3 + 4i}$; $\sqrt[6]{-64}$; $\sqrt[3]{i - 1}$.

9. Řešte rovnice:

   a) $z^2 - (2 + 3i)z - 1 + 3i = 0$; b) $z^2 - 2iz - 5 = 0$.

10. Řešte systémy rovnic:

$$\text{a)}\ \left.\begin{aligned} z_1 + 2z_2 &= 1 + i \\ 3z_1 + iz_2 &= 2 - 3i \end{aligned}\right\} \qquad \text{b)}\ \left.\begin{aligned} (1 + i)z_1 - (1 - i)z_2 &= 0 \\ (2 + i)z_1 - (1 - 2i)z_2 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

V následujících příkladech značí $a, b, \ldots$ komplexní konstanty, $\alpha, \beta, \ldots$ reálné konstanty.

11. Která geometrická místa bodů jsou definována rovnicemi, resp. nerovnostmi

   a) $|z - a| = |z - b|$; b) $\operatorname{Re}(az + b) = \alpha$;

   c) $\alpha < \arg z < \beta$, $\gamma \leqq \operatorname{Re} z \leqq \delta$; d) $|z - a| + |z - b| = \alpha$;

   e) $|z| < 1 - \operatorname{Re} z$; f*) $0 < \arg\dfrac{z - i}{z + i} < \dfrac{\pi}{4}$?

12. Vyšetřete soustavy křivek:

a) $\operatorname{Re} \frac{1}{z} = \alpha$;

b) $\arg \frac{z-1}{z+1} = \alpha$;

c) $\left|\frac{z-1}{z+1}\right| = \alpha$;

d*) $|z-1|\,|z+1| = \alpha$

e*) $|z^2 + 2az + b| = \alpha$.

(Vyšetřujte odděleně případy $0 < \alpha < 1$, $\alpha = 1$, $\alpha > 1$);

13. Napište v komplexním tvaru rovnice:

a) $x^2 + 2x + y^2 - y = 1$;

b) $x^2 - y^2 = 1$.

14. Napište rovnice inverse v kartézských souřadnicích!

15. Co odpovídá v kruhové inversi podle jednotkové kružnice $|z| = 1$:

a) přímce $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$ (zvláště diskutujte případ $\gamma = 0$),

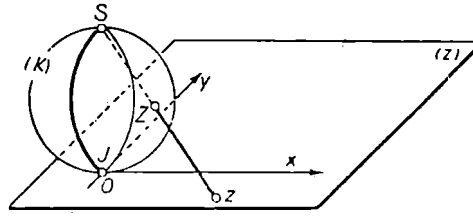
b) kružnici $\alpha(x^2 + y^2) + \beta x + \gamma y + \delta = 0$,

c) hyperbole $x^2 - y^2 = 1$,

d*) parabole $y^2 = 2px$?

ZÁKLADNÍ POJMY THEORIE FUNKCÍ KOMPLEXNÍ PROMĚNNÉ

§ 5. Zobrazení roviny komplexních čísel na kouli. Současně s geometrickou interpretací komplexních čísel jako vektorů nebo bodů v rovině se v mnohých případech aplikuje i jiný způsob jejich geometrické interpretace. Sestrojme si kouli K dotýkající se roviny komplexních čísel v bodě O svým jižním pólem J. Severní pól S koule K spojíme přímkami se všemi body roviny (z). Takovým způsobem bude každému bodu roviny (z) přiřazen jediný bod na kouli K, a to



Obr. 7.

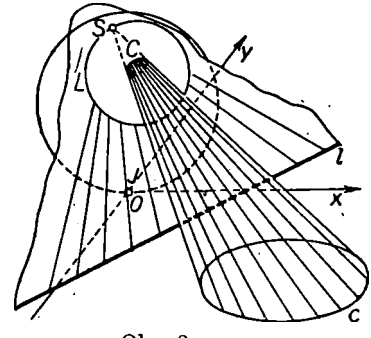
průsečík spojnice bodu z se severním pólem S koule K. A naopak, každému bodu na kouli K (kromě severního pólu S) odpovídá jediný bod v rovině (z), a to průsečík spojnice bodu Z na kouli K se severním pólem S s rovinou (z) (obr. 7). Právě popsané přiřazení bodů roviny (z) a bodů koule K se nazývá *stereografická projekce*.

Budeme nazývat bod Z na kouli K odpovídající ve stereografické projekci bodu z v rovině (z) novým zobrazením komplexního čísla z. Při operacích nad komplexními čísly representovanými body na kouli K promítneme nejprve tyto body stereograficky do roviny (z), zde provedeme operace nad průměty podle pravidel §§ 2—4 a výsledek operací promítneme opět stereograficky zpět na kouli K.

Severnímu pólu S koule K neodpovídá dosud žádné komplexní číslo roviny (z). Zavedeme nové komplexní „číslo“ ∞ (čteme neko-

nečno), které je přiřazeno tomuto bodu. Číslo $z = \infty$ s hlediska geometrické interpretace má tutéž funkci jako čísla $z = 2 + 5i$, $z = 3$, $z = i$, t. j. určuje polohu odpovídajícího bodu Z na kouli K. Ovšem pro toto nové číslo neplatí aritmetická pravidla dříve odvozená, která platí pouze pro komplexní čísla (body koule) odpovídající bodům roviny.

Na rozdíl od bodu S, který budeme nazývat nekonečně *vzdáleným bodem* (bodem v nekonečnu) nazýváme všechny ostatní body koule K (ostatní komplexní čísla) *konečnými*. Kdykoliv v dalších úvahách nebudeme chtít vyloučit z úvah bod S, budeme si vždy vypomáhat koulí K, kterou budeme nazývat *koulí komplexních čísel*. Jestliže bod S (číslo $z = \infty$) bude vyloučen z našich úvah, budeme používat pouze roviny (z).



Obr. 8.

V prvém případě je nutné nazírat na rovinné obrazce doprovázející výklad jako na geografické „mapy" odpovídajících sférických útvarů. Pro množinu všech konečných komplexních čísel (bodů) si zavedeme název *konečná* čili *otevřená rovina* a pro množinu všech komplexních čísel název *úplná* čili *uzavřená rovina*. Termín „otevřená rovina" je ekvivalentní termínu „rovina komplexních čísel" (viz § 1) a termín „uzavřená rovina" termínu „koule komplexních čísel".

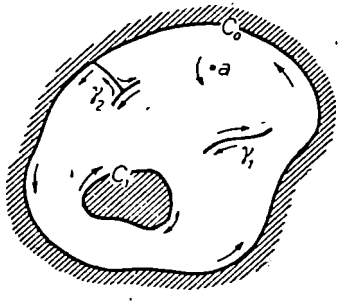
Stereografická projekce zobrazuje geometrická místa bodů v rovině na geometrická místa bodů na kouli. Na příklad libovolné kružnici c v rovině z odpovídá na kouli opět kružnice C neprocházející bodem S; libovolné přímce l v rovině z odpovídá kružnice L na kouli K procházející bodem S (obr. 8). Vidíme, že sférický obraz přímek a kružnic je tentýž. V souhlase s tím je možno říci, že *v úplné rovině komplexních čísel je přímka speciálním případem kružnice* (je to kružnice procházející bodem v nekonečnu). Zavedeme-li si tuto interpretaci, vidíme, že dvě různoběžky se protínají ve dvou bodech; jeden z nich je konečný, druhý je bod $z = \infty$. Dvě rovnoběžky je pak nutno považovat za dvojici kružnic procházejících bodem $z = \infty$ a navzájem se v tomto bodě dotýkajících.

Kružnice dělí kouli K na dvě části. Každou z nich budeme nazývat *kruhem*. „Kruhy" jsou v této interpretaci i poloroviny, na př. polorovina $\mathrm{Im}\, z > 0$, která se stereograficky zobrazí na zadní polokouli K. Když kružnice C na kouli K neprochází bodem S (t. j. je stereografickým obrazem kružnice c v rovině z), pak jeden z obou kruhů, které ohraničuje, obsahuje bod S. Tento kruh budeme nazývat *vnějškem kružnice* C.

§ 6. Oblasti a jejich hranice. *Oblastí* v komplexní rovině nebo na kouli komplexních čísel budeme rozumět bodovou množinu M těchto vlastností:

a) s každým bodem z patří do M aspoň jedno jeho kruhové okolí;

b) libovolné dva body z_1 a z_2 z M je možno spojit spojitou čarou, která se skládá jen z bodů množiny M;



Obr. 9.

Na příklad kruhy $|z| < 1$, $|z - 1| < 2$ jsou oblastmi, ale uzavřený kruh $|z| \leqq 1$ není oblastí, neboť pro body kružnice $|z| = 1$ není splněna podmínka a).

Hranicí C oblasti D budeme rozumět množinu všech bodů na kouli komplexních čísel (v rovině komplexních čísel) těchto vlastností:

a) body množiny C nepatří do D;

b) každé okolí bodu z množiny C obsahuje aspoň jeden bod z množiny D.

Na příklad hranici kruhu $|z| < 1$ tvoří kružnice $|z| = 1$.

Přidáme-li k oblasti D všechny body její hranice, dostaneme bodovou množinu, kterou budeme nazývat *uzavřená oblast* a budeme ji značit $\overline{D}$.

Na obr. 9 tvoří hranici oblasti D dvě uzavřené křivky C_0 a C_1, které oddělují množinu D od vnějších bodů,*) bod a a dva „výřezy"

*) Vnějším bodem jisté oblasti D na kouli komplexních čísel, resp. v rovině komplexních čísel, nazýváme bod z, neležící v oblasti D, pro nějž existuje okolí U_z, které neobsahuje body z D.

podél křivek γ_1 a γ_2. V dalších úvahách budeme vždy předpokládat, že hranice všech uvažovaných oblastí budou mít tuto strukturu, t. j. budou tvořeny konečným počtem uzavřených křivek (oddělujících vnější body) výřezů a jednotlivých bodů.

Počet souvislých částí, na které se rozpadá hranice oblasti, nazýváme *stupeň souvislosti* této oblasti. Tak na př. oblast na obr. 9 má souvislost stupně čtyři, t. j. hranice je tvořena čtyřmi souvislými částmi 1. C_0 a γ_2, 2. C_1, 3. γ_1 a 4. bod a. Speciálně, jestliže je hranice C oblasti D tvořena jedinou souvislou čarou, nazývá se D *jednoduše souvislá oblast*.*)

Často budeme pracovat s oblastmi, na jejichž hranicích bude definován smysl oběhu. Na příklad na obr. 9 je naznačen smysl oběhu, při kterém zůstává vždy celá oblast vlevo.

Nakonec se budeme zabývat pojmem okolí. *Okolím* bodu z_0 budeme rozumět libovolnou oblast, která obsahuje bod z_0. Často bude výhodné uvažovat jisté „standardní" okolí. Jako standardní zavedeme (pro konečné body) kruhové okolí takto definované:

$$|z - z_0| < \varepsilon,$$

a pro bod $z_0 = \infty$ je definujeme jako kruh

$$|z| > \varepsilon.$$

Tento kruh zřejmě obsahuje bod $z = \infty$. Takové okolí budeme nazývat ε-okolí.

§ 7. Limita posloupnosti. Budiž dána posloupnost komplexních čísel

$$z_n = x_n + iy_n \quad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

kde x_n a y_n jsou libovolné reálné funkce celočíselného argumentu n.

Definice. Bod z je *limitou posloupnosti* $\{z_n\}$

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z, \tag{1}$$

*) Nebudeme zde zavádět pojem křivky, oblouku, výřezu (řezu) a souvislé části, neboť jejich přesné definice by nás zavedly mimo rámec knihy. Třebaže se zdají tyto pojmy velmi prosté, vyžadují velmi jemných topologických úvah.

jestliže pro libovolné $\varepsilon > 0$ je možno najít číslo N takové, že pro všechna $n > N$ leží všechny body z_n v ε-okolí bodu z, jinými slovy, jestliže pro $z \neq \infty$

$$|z - z_n| < \varepsilon \text{ pro } n > N \tag{2}$$

a pro $z = \infty$

$$|z_n| > \varepsilon \text{ pro } n > N. \tag{3}$$

Budeme též říkat, že posloupnost $\{z_n\}$ konverguje k bodu z.

Jestliže bude existovat takové kladné číslo $M \neq \infty$, že pro všechna n bude

$$|z_n| \leqq M,$$

budeme nazývat posloupnost $\{z_n\}$ *ohraničenou*. Geometricky to znamená, že všechny body posloupnosti $\{z_n\}$ leží v kruhu o konečném poloměru.

Každá bodová posloupnost konečných bodů $\{z_n\}$, která konverguje ke konečnému bodu z, je ohraničená. Důkaz: Podle (2) všechna z_n počínaje z_{N+1} leží v jistém konečném kruhu K' (o poloměru ε). Vně K' leží tedy jen konečný počet bodů $z_1, z_2, \ldots, Z_N$. Konečný počet konečných bodů $z_n \neq \infty$ lze však vždy pokrýt jistým konečným kruhem K''. Stačí pak sestrojit kruh K obsahující oba kruhy K' a K'' a věta je dokázána.

Nechť je limita $z = x + iy$ konečná ($z \neq \infty$), pak lze nerovnost (2) psát ve tvaru

$$|z - z_n| = \sqrt{(x - x_n)^2 + (y - y_n)^2} < \varepsilon \text{ pro } n > N. \tag{4}$$

Ze (4) plyne, že reálné posloupnosti $\{x_n\}$ a $\{y_n\}$ konvergují k limitám x a y:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x; \lim_{n\to\infty} y_n = y. \tag{5}$$

Přenecháváme čtenáři, aby se přesvědčil, že naopak, jestliže existuje $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ a $\lim_{n\to\infty} y_n = y$, má i posloupnost $\{z_n\}$, $z_n = x_n + iy_n$ limitu $z = x + iy$.

Podobná úvaha platí i pro polární souřadnice. Budiž $\lim_{n\to\infty} z_n = z$ a bod z nechť neleží na záporné reálné poloose, $z \neq 0$, $z \neq \infty$. Pak je-li

$z_n = r_n e^{i\varphi_n}$, $z = re^{i\varphi}$, kde φ_n a φ jsou hlavní hodnoty argumentu, platí

$$\lim_{n\to\infty} r_n = r, \lim_{n\to\infty} \varphi_n = \varphi. \tag{6}$$

Důkaz. Je $r_n = \sqrt{x_n^2 + y_n^2}$ a v důsledku vztahu (5) a spojitosti druhé odmocniny $\lim_{n\to\infty} \sqrt{x_n^2 + y_n^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$. Protože i argument je funkce spojitá (spojitost je zahrnuta v předpokladech o bodu z, viz § 12) je správná i druhá rovnice (6). Kdyby bod z ležel na záporné reálné poloose, položíme $z = re^{i\varphi}$, $z_n = r_n e^{i\varphi_n}$; pro φ_n a φ budeme však uvažovat jinou libovolnou jednoznačnou větev funkce Arg z, na př. větev $0 \leqq \varphi < 2\pi$, která má nespojitost na reálné kladné poloose. Rovnice (6) budou zřejmě i v tomto případě správné.

Platí tedy:

Věta [1]. Jestliže posloupnost $\{z_n = x_n + iy_n = r_n e^{i\varphi_n}\}$ konverguje ke konečné limitě $z = x + iy \neq \infty$, pak

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x, \lim_{n\to\infty} y_n = y; \tag{5}$$

je-li $z = re^{i\varphi} \neq 0, \neq \infty$, pak platí pro hodnoty φ_n a φ vybrané výše uvedeným způsobem

$$\lim_{n\to\infty} r_n = r; \lim_{n\to\infty} \varphi_n = \varphi. \tag{6}$$

Věta platí i naopak bez jakýchkoliv omezení.

Poznámka. Nemá smyslu zavádět symboly $x + i\infty$ a $\infty + iy$, kde x a y jsou konečné, neboť na kouli komplexních čísel leží pouze jediný nekonečně vzdálený bod. K němu konvergují všechny posloupnosti $\{z_n = x_n + iy_n\}$, v nichž buď jedna z posloupností $\{x_n\}$, resp. $\{y_n\}$, nebo obě dvě vzrůstají nade všechny meze.*) Uvedených symbolů možno použít jen k udání směru v komplexní rovině nebo na komplexní kouli. Tak na př. říkáme: reálná čísla probíhají reálnou osu „od $-\infty$ do $+\infty$“, čísla probíhají přímku $x = 3$ „od $3 - i\infty$ do $3 + i\infty$“. Tím chceme (při běžném označení os) říci, že kladný smysl na reálné ose je odleva doprava, na přímce $x = 3$ odzdola nahoru.

*) Budeme nazývat veličinu x_n nekonečně velkou, bude-li $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$, t. j. pro libovolné $\varepsilon > 0$, existovat číslo N tak, že pro všechna $n > N$ bude $|x_n| > \varepsilon$.

Čtenář se snadno přesvědčí, že všechna pravidla pro počítání s limitami známá z analysy reálné proměnné zůstávají v platnosti i v našem rozšíření této analysy.

§ 8. Komplexní funkce reálného argumentu. Definice. Budeme nazývat $z = z(t)$ *komplexní funkcí reálného argumentu* v intervalu $t_1 < t < t_2$, jestliže bude každé hodnotě t z tohoto intervalu přiřazeno komplexní číslo $z = z(t)$.

Komplexní funkce reálného argumentu je ekvivalentní dvěma reálným funkcím reálné proměnné: $x = x(t)$ a $y = y(t)$, takovým, že platí

$$z = z(t) = x(t) + iy(t). \tag{7}$$

Definice. Budeme říkat, že bod z_0 je *limitou* funkce $z = z(t)$ pro $t \to t_0$

$$z_0 = \lim_{t \to t_0} z(t), \tag{8}$$

když pro libovolné $\varepsilon > 0$ lze najít takové číslo $\delta > 0$, že pro všechna t vyhovující nerovnosti*) $0 < |t - t_0| < \delta$ body $z(t)$ leží v ε-okolí bodu z_0. Když pro $z_0 \neq \infty$ položíme $z_0 = x_0 + iy_0$ čtenář si snadno dokáže ekvivalenci rovnice (8) se dvěma rovnicemi pro reálné funkce

$$x_0 = \lim_{t \to t_0} x(t); \; y_0 = \lim_{t \to t_0} y(t). \tag{9}$$

Definice. Jestliže limita $\lim_{\Delta t \to 0} z(t + \Delta t)$ je konečná a shodná s hodnotou funkce $z = z(t)$ v bodě t:

$$\lim_{\Delta t \to 0} z(t + \Delta t) = z(t) \tag{10}$$

říkáme, že funkce $z = z(t)$ je *spojitá v bodě* t.

Omezíme se na vyšetřování funkcí spojitých ve všech bodech oblasti, v níž jsou definovány. Probíhá-li argument t definiční oblast

*) Hodnotu $t = t_0$ vylučujeme, neboť nemá na limitu vliv. Jako pro reálnou proměnnou, funkce $z = z(t)$ nemusí být v bodě $t = t_0$ definována. Na př. $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ nehledě na to, že $\frac{\sin x}{x}$ není definována v bodě $x = 0$.

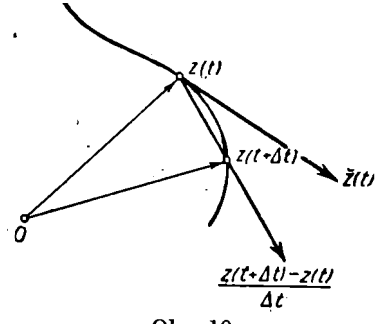
funkce $z = z(t)$, opisuje bod $z(t)$ v komplexní rovině křivku, která se ve vektorovém počtu nazývá *hodograf* vektoru $z(t)$.

Definice. Konečná limita

$$\dot{z}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{z(t + \Delta t) - z(t)}{\Delta t} =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \left\{ \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} + \mathrm{i} \frac{y(t + \Delta t - y(t)}{\Delta t} \right\} = \dot{x}(t) + \mathrm{i}\dot{y}(t) \qquad (11)$$

se nazývá *derivací* funkce $z = z(t)$ v bodě t. Použitím obr. 10 si čtenář sám snadno dokáže, že vektor derivace $\dot{z}(t)$ leží ve směru tečny ke křivce $z = z(t)$ v bodě t, při čemž z existence konečné derivace $\dot{z}(t) \neq 0$ plyne existence tečny. Body křivky, pro něž $\dot{z}(t) = 0$, t. j. $\dot{x}(t) = 0$, $\dot{y}(t) = 0$, jsou t. zv. singulární body křivky (body zvratu, dvojné body atd.).



Obr. 10.

Příklad. Funkce

$$z = z_0 + re^{it}, \quad -\pi \leqq t < \pi, \qquad (12)$$

kde z_0 je komplexní a r reálné číslo, definuje kružnici o poloměru r se středem v bodě $z_0 = x_0 + iy_0$. Důkaz. Z (12) plyne, že vektor spojnice bodů z_0 a z_1, $z - z_0 = re^{it}$ má konstantní modul a argument probíhá od $-\pi$ do π (uvažujeme hlavní hodnoty argumentu). Komplexní funkce (12) je ekvivalentní dvěma reálným funkcím

$$\begin{aligned} x &= x_0 + r\cos t, \\ y &= y_0 + r\sin t. \end{aligned} \qquad (13)$$

Rovnice (13) jsou zřejmě obyčejnými parametrickými rovnicemi naší kružnice. Derivace funkce (12)

$$\dot{z} = \dot{x} + i\dot{y} = -r\sin t + \mathrm{i}\, r\cos t = ir(\cos t - \mathrm{i}\sin t) = ire^{it} = \mathrm{i}(z - z_0)$$

je representována vektorem tečny k naší kružnici.

Pro další úvahy si musíme zavést ještě několik pojmů. Rovinnou křivku budeme nazývat *hladkou*, bude-li definována funkcí $z = z(t)$, $t_1 \leqq t \leqq t_2$ a bude-li mít ve všech bodech intervalu $\langle t_1, t_2 \rangle$ spojitou derivaci $\dot{z}(t) \neq 0$.*)

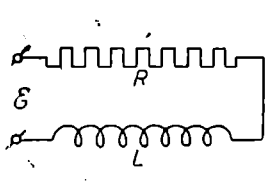
Pojem hladkosti říká, že směr (směrnice) tečny ke křivce se mění spojitě s bodem dotyku. Křivka se nazývá po *úsecích hladká*, jestliže se skládá z konečného počtu hladkých křivek navzájem souvisejících. V bodech styku nemusí tečna k takové křivce existovat. Je jasné, že každá po úsecích hladká (a též hladká) křivka má konečnou délku. *V dalších úvahách budeme vždy předpokládat křivky po úsecích hladké.*

§ 9. Vyjádření kmitů v komplexním tvaru. Použití komplexních funkcí reálného argumentu je důležité v theorii kmitů. Mějme jednoduchý harmonický pohyb, který je popsán rovnicemi

$$A_0 \cos(\omega t + \varphi) \quad \text{a} \quad A_0 \sin(\omega t + \varphi). \tag{14}$$

Místo dvou funkcí (14) budeme psát jedinou komplexní funkci reálného argumentu

$$A(t) = A_0\{\cos(\omega t + \varphi) + \mathrm{i} \sin(\omega t + \varphi)\} = A_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t + \varphi)} = A \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}, \tag{15}$$



Obr. 11.

kde $A = A_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$. $A_0 = |A|$ je amplituda, $\varphi = \arg A$ fázový posun, ω kruhová frekvence harmonických kmitů, které dostaneme po oddělení reálné a imaginární části rovnice (15). Budeme nazývat (15) *komplexním tvarem harmonického kmitu* nebo též stručněji *komplexním kmitem*.

Komplexní kmit $A(t) = A \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} = A_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t + \varphi)}$ lze geometricky interpretovat jako vektor konstantního modulu A_0, otáčející se úhlovou rychlostí ω. V elektrotechnice je často výhodné jej při konstantní frekvenci ω zobrazit jako vektor s konstantním modulem A_0 a argumentem φ, t. j. podle naší úmluvy jako komplexní číslo $A = A_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ (viz obr. 12).

Použijme komplexního tvaru kmitu k některým zjednodušením. Ukážeme si to na jednoduchém fysikálním příkladě. Budiž dán obvod

*) Derivací na levém, resp. pravém konci intervalu $\langle t_1, t_2 \rangle$ budeme rozumět limitu zprava, resp. zleva výrazu (11). Bude-li křivka uzavřená, t. j. $z(t_1) = z(t_2)$, budeme ještě žádat, aby $\dot{z}(t_1) = \dot{z}(t_2)$.

sestavený z ohmického odporu R a samoindukce L v serii, na nějž aplikujeme elektromotorickou sílu $\mathcal{E}$ (e.m.s.). Viz obr. 11. Z fysiky je známá tato diferenciální rovnice pro elektrický proud J:

$$\mathcal{E} - L\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}t} = RJ. \tag{16}$$

Nechť je vnější e.m.s. kosinusová nebo sinusová, t. j. rovna buď $E_0\cos(\omega t + \varphi)$ nebo $E_0\sin(\omega t + \varphi)$. Podle dříve řečeného budeme předpokládat komplexní e.m.s. $\mathcal{E} = Ee^{i\omega t}$, kde $E = E_0e^{i\varphi}$. Ustálené (stacionární) řešení diferenciální rovnice (16) dostaneme též v komplexním tvaru*), tedy $J = Ie^{i\omega t}$, kde $I = I_0e^{i\varphi}$. Je (viz př. § 8) $\frac{dJ}{dt} = I i\omega e^{i\omega t} = i\omega J$ a rovnice (16) má tvar

$$\mathcal{E} - i\omega LJ = RJ$$

čili

$$J = \frac{\mathcal{E}}{R + i\omega L} = \frac{\mathcal{E}}{Z}, \tag{17}$$

kde

$$Z = R + i\omega L. \tag{18}$$

Veličina Z se nazývá *impedance* neboli *komplexní odpor* okruhu. Vztah (17) je možno považovat za všeobecnění Ohmova zákona. Položme $Z = Z_0e^{i\delta}$ kde $Z_0 = |Z| = \sqrt{R^2 + \omega^2L^2}$, $\delta = \arg Z = \operatorname{arctg}\frac{\omega L}{R}$, a dostaneme z (17)

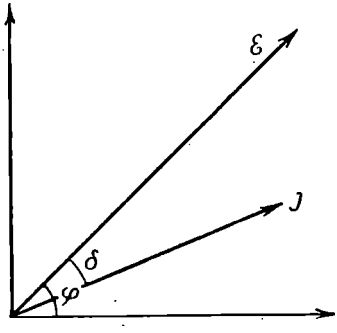
$$J = \frac{E_0}{Z_0}e^{i(\omega t + \varphi - \delta)}. \tag{19}$$

Z (19) je ihned vidět, že amplituda proudu se dostane z amplitudy pro e.m.s. dělením veličinou Z_0 a proud je proti e.m.s. fázově posunut o δ. Veličina $Z_0 = \sqrt{R^2 + \omega^2L^2}$ — modul komplexního odporu, — se nazývá *úplným* (*zdánlivým*) *odporem*. Oddělíme-li ve výrazu (19) reálnou a imaginární část, dostaneme proudy odpovídající kosinusové, resp. sinusové e.m.s.

Zkoumejme proměnné vektory $\mathcal{E}$ a J zobrazující komplexní e.m.s.

*) To plyne z theorie lineárních diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty. Rovnice (16) je rovnice tohoto typu.

a proud. Z výše uvedeného plyne, že oba vektory se otáčejí kolem počátku s touže frekvencí ω, a to tak, že proud $\mathcal{J}$ bude konstantně posunut o δ vzhledem k $\mathcal{E}$. Z toho plyne, že oba vektory $\mathcal{J}$ i $\mathcal{E}$ se budou pohybovat jako jeden pevný celek. V elektrotechnice se zobrazují $\mathcal{J}$ a $\mathcal{E}$ jako dva pevné vektory (viz obr. 12).



Obr. 12.

V obecnějším případě, když pro komplexní e.m.s. $E = E_0 e^{i(\omega t+\varphi)}$ se amplituda proudu i fázový posun $\mathcal{E}$ a $\mathcal{J}$ mění s časem, nepohybuje se dvojice vektorů $\mathcal{E}$ a $\mathcal{J}$ jako pevný celek. V tomto případě se zobrazí $\mathcal{E}$ jako konstantní vektor $E = E_0 e^{i\varphi}$ a sestrojí se křivka, kterou opisuje konec vektoru $\mathcal{J}$ (proudový diagram). Zaveďme si veličiny

$$Z_R = R, \; Z_L = i\omega L.$$

Budeme je nazývat impedancí ohmického odporu, resp. samoindukce. Vztah (18) ukazuje, že při zapojení R a L v serii se jejich impedance sčítají. Snadno se dokáže, že rovnice (17) je platná i pro zapojení R a L paralelně, jestliže si vyjádříme impedanci Z podle pravidla pro paralelní zapojení:

$$Z = \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{i\omega L}}.$$

Analogicky je možno odvodit i impedanci kapacity $Z_C = \frac{1}{i\omega C}$. V elektrotechnice se dokazuje, že zobecněný zákon Ohmův (17) platí pro libovolný okruh vytvořený libovolnou kombinací R, L a C, při čemž při výpočtu impedance používáme běžných pravidel pro zapojení. Popsaná methoda výpočtu okruhů je formálně značně prostší než methoda diferenciálních rovnic.

§ 10. Funkce komplexní proměnné. Mějme libovolnou množinu M bodů koule komplexních čísel, při čemž může k M patřit i bod $z = \infty$.

Definice. Budeme říkat, že na množině M je definována *funkce komplexní proměnné*,

$$w = f(z), \tag{20}$$

když každému z z množiny M bude přiřazena jedna nebo několik hodnot w (mezi nimi může být i hodnota $w = \infty$).

Proměnná z se nazývá *nezávisle proměnná* neboli *argument funkce* a w — *závisle proměnná* neboli *funkce*. Jestliže každému z je přiřazeno jen jedno jediné w, funkce (20) se nazývá *jednoznačná*, v opačném případě *mnohoznačná*.

Množinu všech bodů w, odpovídajících podle vztahu (20) všem bodům z z M, označíme N a budeme říkat, že funkce (20) je zobrazení množiny M na množinu N. Jestliže ani M ani N nebudou obsahovat bod ∞, můžeme je interpretovat jako množiny ležící v komplexních rovinách z, resp. w.

Je-li speciálně množina M množinou všech kladných celých čísel, funkce (20) přejde v posloupnost, o níž byla řeč v § 7. Je-li funkce M množina všech reálných čísel, je (20) komplexní funkcí reálné proměnné (viz § 8).

Podle (20) bodu w z množiny N odpovídá jeden nebo více (může se stát, že i nekonečně mnoho) bodů z z množiny M (druhý případ nastane, když funkce $w = f(z)$ nabývá stejných hodnot v různých bodech množiny M). To znamená, že je na množině N definována funkce

$$z = \varphi(w), \tag{21}$$

zobrazující množinu N na množinu M; funkce (21) se nazývá *inversní* k (20).

Zvláště důležitý je případ, kdy funkce $w = f(z)$ je jednoznačná na M a funkce $z = \varphi(w)$ je jednoznačná na N; v tomto případě nazýváme zobrazení $w = f(z)$ *vzájemně jednoznačné* nebo též *jedno-jednoznačné*. Při jedno-jednoznačném zobrazení každým dvěma různým bodům z_1, z_2 z M odpovídají dva různé body w_1, w_2 z N a naopak.

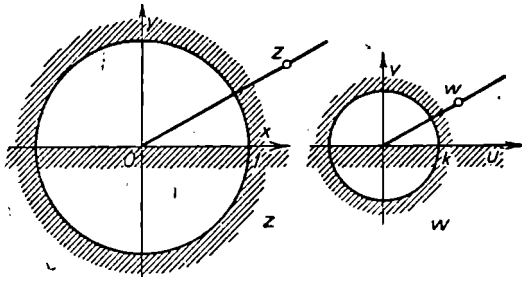
V dalším budeme mít často co dělat se zobrazeními definovanými složenými funkcemi. Nechť funkce $\omega = f_1(z)$ zobrazí množinu M na množinu N a nechť funkce $w = f_2(\omega)$ zobrazí množinu N na množinu Q

(M, N, Q leží na koulích z, ω, w). Zobrazení množiny M na množinu Q zprostředkované funkcí

$$w = f(z) = f_2[f_1(z)] \tag{22}$$

se nazývá *složením* neboli *superposicí* zobrazení f_1 a f_2.

V dalším budeme často studovat zobrazení vzniklé superposicí tří i více zobrazení.



Obr. 13.

Podotkněme ještě nakonec, že jedna funkce komplexní proměnné $w = f(z)$ definovaná na množině M je ekvivalentní se dvěma reálnými funkcemi dvou reálných proměnných

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y) \tag{23}$$

(kde jsme položili $z = x + iy$, $w = u + iv$).

V dalších úvahách budeme nejčastěji studovat případ, kdy množiny M a N budou oblasti*) na koulích komplexních čísel z, resp. w. Budeme je značit D a Δ.

§ 11. Příklady. Uveďme na příkladech pojmy definované v § 10.

Příklad 1. Budiž

$$w = kz, \tag{24}$$

kde k je reálná kladná konstanta. V polárních souřadnicích $z = re^{i\varphi}$, $w = \varrho e^{i\psi}$, přejde (24) na dvě rovnice

$$\varrho = kr, \quad \psi = \varphi^{**}, \tag{25}$$

které nám umožňují geometrickou interpretaci zobrazení (24). Druhá z rovnic (25) nám říká, že každý bod z zůstane při zobrazení (24) na

*) Viz princip zachování oblastí § 23.

**) Měli bychom vlastně psát $\psi = \varphi + 2k\pi$, ale to nemá smysl, neboť připočtení $2k\pi$ nemění nic na zkoumaném zobrazení. Podobně budeme postupovat i v ostatních příkladech § 11.

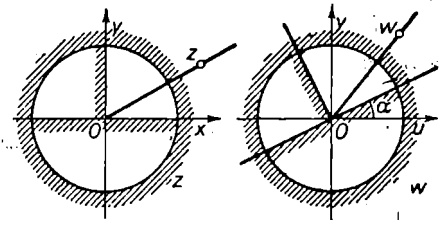
svém polopaprsku Oz. Podle prvé z rovnic (25) modul z se při zobrazení (24) k-krát zvětší (pro $k > 1$), resp. zmenší (pro $k < 1$). Mluvíme o *dilataci roviny* (v širším slova smyslu) s modulem dilatace k (na obr. 13 $k = \frac{1}{2}$). Jestliže na příklad oblast D je jednotkový kruh $|z| < 1$, pak jeho obraz Δ je kruh $|w| < k$, je-li D horní polorovina $\operatorname{Im} z > 0$, její obraz Δ je tatáž polorovina $\operatorname{Im} w > 0$.

Příklad 2. Budiž

$$w = e^{i\alpha} z, \qquad (26)$$

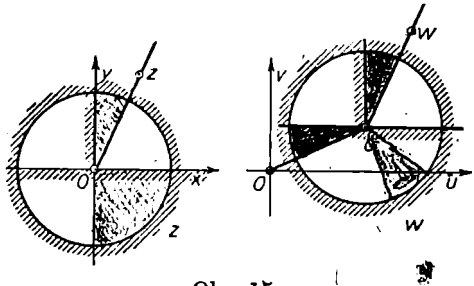
kde α je reálné číslo. Položíme $z = re^{i\varphi}$, $w = \varrho e^{i\psi}$ a dostaneme

$$\varrho = r, \quad \psi = \varphi + \alpha.$$



Obr. 14.

Z toho plyne, že při zobrazení (26) každý bod z zůstane na své kružnici $|z| = r$, kde r je modul bodu z, ale pootočí se o úhel α: zobrazení (26) je *pootočení* roviny z o úhel α (viz obr. 14). Jestliže je speciálně $\alpha = \frac{1}{2}\pi$, má (26) tvar $w = iz$ a je to tedy pootočení roviny o pravý úhel v kladném smyslu; pro $\alpha = \pi$ dostane (26) tvar $w = -z$, t. j. pootočení o π v kladném smyslu.



Obr. 15.

Příklad 3. Budiž

$$w = z + b, \qquad (27)$$

kde $b = \beta_1 + i\beta_2$ je komplexní číslo. Položme $z = x + iy$, $w = u + iv$ a (27) přejde na tvar

$$u = x + \beta_1, \quad v = y + \beta_2.$$

Z toho ihned vidíme, že zobrazení (27) je *rovnoběžné posunutí* roviny z o vektor b. Na příklad kruh $|z| < r$ přejde v kruh $|w - b| < r$ (obr. 15).

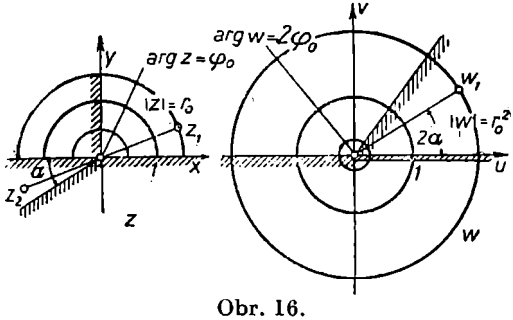
Příklad 4. Budiž obecně

$$w = az + b, \qquad (28)$$

kde $a = ke^{i\alpha}$ a $b = \beta_1 + i\beta_2$ jsou komplexní čísla, *lineární funkce komplexní proměnné z*. Zobrazení (28) můžeme považovat za superposici tří zobrazení:

$$\omega = kz, \quad \omega_1 = e^{i\alpha}\omega, \quad w = \omega_1 + b.$$

Redukuje se tedy zobrazení (28) *geometricky na otočení, dilataci v širším slova smyslu* (*záleží na velikosti k*, $k \gtrless 1$) *a rovnoběžný posun*. Zobrazení zprostředkované funkcí typu (28) budeme nazývat *lineární zobrazení*.



Obr. 16.

Příklad 5. Budiž

$$w = z^2; \qquad (29)$$

položíme $z = re^{i\varphi}$, $w = \varrho e^{i\psi}$ a dostaneme

$$\varrho = r^2, \quad \psi = 2\varphi.$$

Z toho plyne, že při zobrazení (29) se zdvojnásobí argument každého bodu; body ležící na kružnici $|z| = r_0$ přejdou na kružnici $|w| = r_0^2$. Horní polorovině $\operatorname{Im} z > 0$ odpovídá celá rovina w s vyloučením paprsku $\psi = 0$. Zobrazení (29) je jedno-jednoznačné uvnitř horní půlroviny $\operatorname{Im} z > 0$; jestliže budeme u výřezu podél reálné kladné poloosy $\psi = 0$ v rovině w uvažovat dva „břehy", horní a dolní, bude funkce $w = z^2$ jedno-jednoznačná v uzavřené oblasti $\operatorname{Im} z \geqq 0$. Přitom bodům $\varphi = 0$ odpovídá horní „břeh" polopřímky $\psi = 0$ a bodům $\varphi = \pi$ odpovídá dolní „břeh" polopřímky $\psi = 0$ (obr. 16).

Bude-li D nekonečná výseč $0 < \varphi < \pi + \alpha$, kde $\alpha > 0$, vyplňují body $w = z^2$ celou rovinu w. Zobrazení nebude jedno-jednoznačné, neboť body z_1 a $z_2 = -z_1$, z nichž prvý leží v I. kvadrantě a druhý ve III. kvadrantě, mají tentýž obraz $w_1 = z_1^2 = z_2^2$ (obr. 16).

Příklad 6. Budiž $w = f(z)$ definována v uzavřeném kruhu $|z| \leqq 1$ rovnicí*)

*) Druhou z rovnic (30) musíme vypsat, neboť dělení nulou není definováno.

$$f(z) = \frac{1}{1 - |z|} \text{ pro } |z| < 1,$$
$$f(z) = \infty \text{ pro } |z| = 1. \tag{30}$$

Funkce (30) zobrazí kruh $|z| \leqq 1$ na uzavřený interval $1 \leqq u \leqq \infty$, $v = 0$ reálné kladné poloosy roviny w čili na uzavřený menší oblouk poledníku koule komplexních čísel w procházejícího bodem $w = 1$ a rozděleného body $w = 1$ a $w = \infty$.

Příklad 7. Zkoumejme ještě funkci

$$w = |z|\, z. \tag{31}$$

Položíme $z = re^{i\varphi}$, $w = \varrho e^{i\psi}$ a dostaneme

$$\varrho = r^2, \quad \psi = \varphi.$$

Zobrazení (31) připomíná zobrazení (29), ale není s ním totožné. Zobrazení (31) je na příklad jedno-jednoznačné uvnitř kruhu $|z| < 1$.

V dalším odkryjeme hluboké rozdíly mezi příklady 1—5 a dvěma posledními příklady.

§ 12. Limita funkce. Nechť je funkce komplexní proměnné $w = f(z)$ definována všude v okolí bodu z_0, případně s vyloučením tohoto bodu samého (viz pozn. na str. 30).

Definice. *Jednoznačná funkce $w = f(z)$ má limitu w_0 pro $z \to z_0$,* což píšeme takto

$$w_0 = \lim_{z \to z_0} f(z), \tag{32}$$

když k libovolnému $\varepsilon > 0$ lze najít $\delta > 0$ takové, že funkce $w = f(z)$ zobrazí δ-okolí bodu z_0 na ε-okolí bodu w_0, s případnou výjimkou bodu z_0 samého.

Poznamenejme ještě, že naše definice platí jak pro konečné, tak pro nekonečné hodnoty čísla z_0 i w_0. V případě, že z_0 i w_0 jsou konečné body, limita (32) existuje, když z nerovnosti

$$0 < |z - z_0| < \delta \tag{33}$$

plyne nerovnost

$$|f(z) - w_0| < \varepsilon. \tag{34}$$

Pro případ na př. $z_0 \neq \infty$, $w_0 = \infty$ limita (32) existuje, když z nerovniny

$$0 < |z - z_0| < \delta$$

plyne

$$|f(z)| > \varepsilon. \tag{35}$$

Přenecháváme čtenáři přesnou formulaci případů

$$\lim_{z \to \infty} f(z) = w_0 \neq \infty \text{ a } \lim_{z \to \infty} f(z) = \infty$$

jako cvičení.

Z definice plyne okamžitě: budiž $\{z_n\}$ libovolná nekonečná posloupnost komplexních čísel konvergujících k bodu z_0, pak nekonečná posloupnost bodů $\{w_n = f(z_n)\}$ konverguje k bodu w_0 ve smyslu § 7. Je-li $z = z(t)$ libovolná spojitá křivka procházející bodem $z_0 = z(t_0)$, pak komplexní funkce reálné proměnné $f[z(t)]$ konverguje k w_0 pro $t \to t_0$ ve smyslu § 8. Tedy: *limita v komplexním oboru je nezávislá na způsobu, kterým se z blíží k z_0.*

Poznamenejme ještě, že *každá funkce $w = f(z)$, která má konečnou limitu pro $z \to z_0$ je v okolí bodu z_0 ohraničená.* Důkaz je zcela analogický odpovídajícímu důkazu pro posloupnosti v § 7, a proto jej ponecháváme čtenáři jako cvičení.

Konečně stejně jako věta [1] § 7 se dokáže:

Věta [2]. *Je-li* $z_0 = x_0 + iy_0 = r_0 e^{i\varphi_0}$, $w_0 = u_0 + iv_0 = \varrho_0 e^{i\psi_0}$, *pak z konvergence funkce* $w = f(z) = u(x, y) + i\,v(x, y) = \varrho(r, \varphi)\, e^{i\psi(r,\varphi)}$ *k limitě w_0 pro $z \to z_0$ plyne pro $w_0 \neq \infty$*

$$\lim_{z \to z_0} u(x, y) = u_0, \lim_{z \to z_0} v(x, y) = v_0 \tag{36}$$

a pro $w_0 \neq 0$, $\neq \infty$ při vhodné volbě obou argumentů

$$\lim_{z \to z_0} \varrho(r, \varphi) = \varrho_0, \lim_{z \to z_0} \psi(r, \varphi) = \psi_0. \tag{37}$$

Věta [2] *platí i naopak, bez výjimek.*

Poznamenejme ještě závěrem, že všechna pravidla pro počítání s limitami, známá čtenáři z theorie funkcí reálné proměnné, platí bez výjimky i pro funkce komplexní proměnné. Nebudeme se zde tedy zdržovat ani jejich formulací ani jejich důkazy.

§ 13. Spojitost. Definice. Funkce $w = f(z)$ je *spojitá v bodě* $z = z_0$, když existuje konečná limita v tomto bodě a její hodnota je rovna hodnotě funkce v tomto bodě, t. j.

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0). \tag{38}$$

Tuto definici možno formulovat i pomocí nerovností. Tak na př. pro konečný bod z_0 má tvar: funkce $w = f(z)$ je spojitá v bodě $z = z_0$ když pro libovolně malé $\varepsilon > 0$ lze nalézt takové $\delta > 0$, že pro všechna*) z, jež vyhovují nerovnosti

$$|z - z_0| < \delta, \tag{39}$$

platí nerovnost

$$|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon. \tag{40}$$

Tak jako v theorii funkcí reálné proměnné položíme $z - z_0 = \Delta z$ a budeme Δz nazývat *přírůstkem argumentu* a $f(z) - f(z_0) = \Delta w$ *přírůstkem funkce*. Podmínku (38) spojitosti funkce v bodě z_0 lze pak formulovat pomocí přírůstků též takto:

$$\lim_{\Delta z \to 0} \Delta w = 0. \tag{41}$$

Podle běžné terminologie nazveme *nekonečně malou veličinou* funkci konvergující k 0. Pak je možno vztah (41) číst též takto: funkce $w = f(z)$ je spojitá v bodě z, jestliže nekonečně malému přírůstku argumentu Δz odpovídá nekonečně malý přírůstek funkce Δw.

Definice. Funkce spojitá v každém bodě oblasti D se nazývá *spojitá v oblasti* D.

Nyní si budeme ilustrovat naše definice na několika příkladech. Funkce př. 1—7 § 11 jsou kromě př. 6 spojité v celé otevřené rovině z. Funkce z př. 6 je spojitá v jednotkovém otevřeném kruhu. Uveďme si ještě dva další příklady.

Příklad 1. *Hlavní hodnota* arg z *je spojitá pro všechna* $z \neq 0, \neq \infty$ *neležící na záporné reálné poloose*. Důkaz: Budiž z_0 libovolný bod a ε

*) Zde nemusíme vyloučit hodnotu $z = z_0$, neboť pro $z = z_0$, $f(z) - f(z_0) = 0$, a nerovnost (40) je splněna. Kdybychom ale nevyloučili hodnotu $z = z_0$ při definici limity, nebylo by rozdílu mezi funkcemi majícími limitu a funkcemi spojitými. Neboť pak by pro každé $\varepsilon > 0$ bylo $|f(z_0) - w_0| < \varepsilon$ a protože $f(z_0)$ a w_0 jsou konstanty a ε libovolně malé kladné číslo, muselo by být $f(z_0) = w_0$.

libovolné reálné číslo. Označme si δ poloměr největší kružnice se středem v bodě z_0, uvnitř které neleží žádný bod záporné reálné poloosy tak, že celá kružnice leží ve výseči o středovém úhlu 2ε. Pak pro všechna $|z - z_0| < \delta$ zřejmě platí $|\arg z - \arg z_0| < \varepsilon$.

V bodech $z = 0$ a $z = \infty$ není funkce definována, proto nelze ani mluvit o její spojitosti v těchto bodech. V bodech záporné reálné poloosy má hlavní hodnota $\arg z$ nespojitost: $\arg z \to \pi$ pro body $z \to z_0$ z horní poloroviny (z_0 leží na záporné reálné poloose), ale $\arg z \to -\pi$ pro body $z \to z_0$ z dolní poloroviny.

Příklad 2. Budiž

$$w = f(z) = \frac{1}{2i}\left(\frac{z}{\bar{z}} - \frac{\bar{z}}{z}\right); \tag{42}$$

položíme $z = re^{i\varphi}$ a použijeme Eulerova vzorce (14) § 3 a dostaneme

$$w = \frac{1}{2i}(e^{2i\varphi} - e^{-2i\varphi}) = \sin 2\varphi.$$

Z toho je ihned vidět, že v libovolně malém okolí bodu $z_0 = 0$ nabývá funkce všech hodnot intervalu $\langle -1, 1\rangle$. Tedy nerovnost (34) nemůže být splněna pro všechna z z ε-okolí bodu z_0, volíme-li ε dostatečně malé ($\varepsilon < \frac{1}{2}$), ať při tom volíme w_0 jakkoliv. Vidíme tedy, že naše funkce nemá limitu pro $z \to 0$. Poznamenejme ještě, že limita $f(z) = f[z(t)]$ pro $z \to 0$ podél libovolné křivky $z = z(t)$ existuje (pokud má $z = z(t)$ tečnu v bodě $z = 0$). Tyto limity jsou však pro různé křivky obecně různé.

Základní věty o spojitých funkcích reálné proměnné zůstávají v platnosti i pro funkce komplexní proměnné, nebudeme se tedy zdržovat ani jejich formulací ani jejich důkazy. Z vět o funkcích spojitých v jisté oblasti D uvedeme bez důkazu dvě:

1. *Každá funkce $w = f(z)$ spojitá v uzavřené oblasti $\bar{D}$, je v této oblasti ohraničená, t. j. existuje takové pevné reálné číslo $M \neq \infty$, že $|f(z)| \leqq M$ pro všechna z z $\bar{D}$.*

2. *Funkce $w = f(z)$ spojitá v uzavřené oblasti $\bar{D}$, nabývá v této oblasti své maximální a minimální hodnoty (vzhledem k modulu).*

Obě věty platí v témže znění i pro funkce spojité na uzavřené křivce nebo na oblouku, k němuž počítáme oba jeho koncové body.

§ 14. Cauchy-Riemannovy diferenciální rovnice. Budiž $w = f(z)$ jednoznačná funkce definovaná v jistém okolí bodu $z \neq \infty$. Vybereme z okolí tohoto bodu body $Z = z + \Delta z$ a označíme Δw přírůstek funkce při přechodu od bodu Z do bodu z:

$$\Delta w = f(z + \Delta z) - f(z).$$

Definice. Funkce $w = f(z)$ je *diferencovatelná* v bodě z, když existuje konečná limita $\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}$. Tato limita se nazývá *derivace* funkce $w = f(z)$ v bodě z a označujeme ji symbolem

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} \tag{43}$$

Stejným způsobem jako v analyse funkcí reálné proměnné se dokáže, že z diferencovatelnosti funkce (je-li $f'(z) \neq \infty$) v bodě z plyne ihned spojitost funkce v bodě z. Opačná věta neplatí.

Budiž $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ a hledejme podmínky, které musí splňovat funkce $u(x, y)$ a $v(x, y)$, aby funkce $w = f(z)$ byla diferencovatelná v bodě z. Předpokládejme, že derivace $f'(z)$ existuje. Pak podle definice (43) § 12 k libovolnému $\varepsilon > 0$ lze nalézt $\delta > 0$ takové, že pro všechna Δz, pro která $|\Delta z| < \delta$ platí

$$\left| \frac{\Delta w}{\Delta z} - f'(z) \right| < \varepsilon \tag{44}$$

Položme nejprve $\Delta z = te^{i\alpha}$, kde α — je libovolná reálná konstanta a $t = |\Delta z|$. Pak pro $t < \delta$ bude nerovnost (44) splněna nezávisle na volbě konstanty α (viz § 12). To znamená, že $\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}$ je nezávislá na volbě konstanty α a rovná se $f'(z)$. Použijeme toho a zvolíme $\alpha = 0$. Pak je přírůstek $\Delta z = t$ reálný. Označme ho Δx. Podle (43) dostaneme

$$f'(z) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\{u(x + \Delta x, y) - u(x, y)\} + i\{v(x + \Delta x, y) - v(x, y)\}}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}. \tag{45}$$

Položme nyní $\alpha = \frac{\pi}{2}$ potom přírůstek $\Delta z = it$ je ryze imaginární, označme ho $i\Delta y$ a podle (43) dostaneme

$$f'(z) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\{u(x, y + \Delta y) - u(x, y)\} + i\{v(x, y + \Delta y) - v(x, y)\}}{i\Delta y} =$$

$$= -i\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}. \tag{46}$$

Porovnáním pravých stran rovnic (45) a (46) dostaneme

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{47}$$

Rovnice (47) se nazývají *Cauchy-Riemannovy diferenciální rovnice.* Dokázali jsme tedy, že pro diferencovatelnost funkce $w = f(z)$ v bodě z je nutná: 1. existence parciálních derivací $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$ a 2. splnění Cauchy-Riemannových diferenciálních rovnic.

Hledejme nyní postačující podmínky. Předpokládejme, že funkce $u(x, y)$ a $v(x, y)$ mají v bodě z totální diferenciál*) a dokážeme, že pak z platnosti Cauchy-Riemannových rovnic plyne existence derivace $f'(z)$. Z diferencovatelnosti funkce dvou proměnných plyne, že lze jejich přírůstky psát ve tvaru

$$\begin{aligned} \Delta u &= \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \eta_1|\Delta z|, \\ \Delta v &= \frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\Delta y + \eta_2|\Delta z|, \end{aligned} \tag{48}$$

kde $|\Delta z| = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ a $\eta_1 \to 0$, $\eta_2 \to 0$ pro $\Delta z \to 0$. Podle (48) je

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{\Delta u + i\Delta x}{\Delta x + i\Delta y} =$$

$$= \frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y\right) + i\left(\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\Delta y\right) + (\eta_1 + i\eta_2)|\Delta z|}{\Delta x + i\Delta y}.$$

*) Jak známo, neplyne z existence prvních parciálních derivací ještě existence totálního diferenciálu. K tomu však stačí, aby uvedené parciální derivace byly spojité v bodě z. [Viz V. Jarník: Úvod do počtu diferenciálního, II. vyd., str. 389, Přírodovědecké nakladatelství, Praha 1951. *Pozn. překl.*]

Použijeme Cauchy-Riemannových rovnic a píšeme $-\frac{\partial v}{\partial x}$ místo $\frac{\partial u}{\partial y}$ a $\frac{\partial u}{\partial x}$ místo $\frac{\partial v}{\partial y}$. Po malé úpravě dostaneme

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}\right)\Delta x + \left(-\frac{\partial v}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial x}\right)\Delta y}{\Delta x + \mathrm{i}\Delta y} + (\eta_1 + \mathrm{i}\eta_2)\frac{|\Delta z|}{\Delta z},$$

čili

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}\right) + (\eta_1 + \mathrm{i}\eta_2)\frac{|\Delta z|}{\Delta z}.$$

Z toho

$$\left|\frac{\Delta w}{\Delta z} - \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right| = |\eta_1 + \mathrm{i}\eta_2| \to 0 \text{ pro } \Delta z \to 0$$

a konečně

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}$$

existuje. Tím jsme dokázali tuto větu:

Věta. *Aby funkce* $w = f(z) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$ *byla diferencovatelná v bodě* $z = x + \mathrm{i}y$ *je nutné, aby v tomto bodě existovaly parciální derivace* $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$ *a byly splněny Cauchy-Riemannovy diferenciální rovnice*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{47}$$

Splnění Cauchy-Riemannových diferenciálních rovnic stačí pro diferencovatelnost funkce $w = f(z)$, *když připojíme doplňující předpoklad o existenci totálních diferenciálů funkcí* $u(x, y)$ *a* $v(x, y)$ *ve zkoumaném bodě.*

Dodejme ještě, že *všechna pravidla a vzorce pro derivování funkcí reálné proměnné zůstávají v platnosti i pro funkce komplexní proměnné.* To plyne okamžitě z toho, že definice derivace, věty o limitách a algebraické operace, na kterých spočívají důkazy, jsou stejně platné jak v reálném, tak v komplexním oboru.

Funkce v př. 1—5 § 11 jsou diferencovatelné v celé otevřené rovině z. To si snadno dokážeme ověřením platnosti Cauchy-Riemanno-

výsh diferenciálních rovnic pro tyto funkce a ověřením spojitosti prvních parciálních derivací příslušných funkcí $u(x, y)$ a $v(x, y)$. Tak na př. pro funkci $w = z^2$ (př. 5):

$$u = x^2 - y^2, \quad v = 2xy$$

a

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 2x; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = -2y.$$

Funkce

$$w = z|z| \tag{31}$$

(př. 7) je diferencovatelná v bodě $z = 0$. Důkaz: Je $\Delta z = z$, $\Delta w = w = z|z|$ a $f'(0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{z \to 0} |z| = 0$ existuje. Pro žádné $z \neq 0$ není však diferencovatelná, jak se snadno přesvědčíme přímým výpočtem parciálních derivací funkcí $u = x\sqrt{x^2 + y^2}$ a $v = y\sqrt{x^2 + y^2}$ a dosazením do Cauchy-Riemannových rovnic. Také pro funkci z př. 6 si snadno ověříme, že rovnice Cauchy-Riemannovy nejsou splněny pro žádný bod uvnitř definiční kružnice.

Nakonec uvedeme ještě dvě definice fundamentálního významu:

Definice 1. Funkce $w = f(z)$ jednoznačná a diferencovatelná ve všech bodech oblasti D se nazývá *regulární v oblasti D*.

Definice 2. Funkce $w = f(z)$ se nazývá *regulární v bodě* z_0, lze-li najít takové okolí bodu z_0, že $w = f(z)$ je v něm regulární.

Podtrhněme ještě tu okolnost, že naše definice se vztahují na jednoznačné funkce. Kromě toho jsme se nezabývali diferencovatelností a regularitou funkce $w = f(z)$ v nekonečně vzdáleném bodě (viz § 6).

Podmínky regularity a diferencovatelnosti funkce v celé oblasti *jsou stejné*. Naproti tomu jsou podmínky regularity v bodě *silnější* než podmínky diferencovatelnosti. Tak na př. funkce (31) je v bodě $z = 0$ diferencovatelná, ale není regulární, protože není diferencovatelná v žádném okolí bodu $z = 0$.

ÚLOHY.

1. Napište v kartézských souřadnicích rovnice stereografické projekce. Co odpovídá v stereografické projekci: a) dvojici bodů z a $-z$; b) dvojici bodů z a $\bar{z}$?

2. Tvoří oblasti geometrická místa bodů:
   a) $|z^2 - 1| \leqq 1$;
   b) $\cos\varphi < r < 2\cos\varphi$; $-\pi \leqq \varphi < \pi$ (r a φ polární souřadnice)?
3. Stanovte limitu posloupností:
   a) $z_n = \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$ (položte $z = x + iy$ a $z_n = r_n e^{i\varphi_n}$ a stanovte $\lim_{n\to\infty} r_n$ a $\lim_{n\to\infty} \varphi_n$),
   b) $z_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{i^k}{2^k}$ (znázorněte graficky).
4. Jakými křivkami jsou tvořeny hodografy komplexních funkcí reálné proměnné
   a) $z = \alpha e^{it} + \beta e^{-it}$ (α, β reálné),
   b) $z = e^{at}$ (a komplexní)?
5. Budiž $z = z(t)$ dráha, po níž se pohybuje hmotný bod v rovině. Stanovte složky rychlosti a zrychlení do směru Oz a směru k němu kolmého.
6. Nechť bod z obíhá po kružnici o poloměru R s konstantní úhlovou rychlostí $\omega = 1$. Stanovte vektor rychlosti bodu w pohybujícího se společně s bodem z podle vztahu $w = f(z)$.
7. Stanovte ustálený proud v obvodě složeném z ohmického odporu R a kapacity C zapojených v serii, je-li na svorky přiložena sinusoidální e.m.s.
8. Na jakou množinu zobrazuje rovinu z (s vyloučením bodů $z = 0$ a $z = \infty$) funkce (42)?
9. Zobrazení, definované dvojicí reálných funkcí dvou proměnných
$$u = \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1,$$
$$v = \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2,$$
($\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 \neq 0$) se nazývá *afinní*. Dokažte:
   a) afinní zobrazení zobrazuje libovolný čtverec roviny z na rovnoběžník v rovině w,
   b) jestliže obrazem alespoň jednoho čtverce je opět čtverec, pak funkce $w = u + iv$ je lineární funkcí komplexní proměnné $z = x + iy$.
10. Co odpovídá při zobrazení $w = z^2$ soustavě přímek $y = \alpha$ ($\alpha > 0$) a soustavě polopřímek $x = \beta$, $y > 0$?
11. V jaké křivky roviny w se zobrazí
   a) přímky $x = \alpha$ a $y = \beta$ funkcí $w = \frac{1}{z}$;
   b) polopřímky $\arg z = \alpha$ funkcí $w = \frac{1 + z}{1 - z}$;

c) kružnice $|z| = r$ $(0 < r < 1)$ a výseče $\arg z = \alpha$, $0 \leqq |z| \leqq 1$ funkcí

$$w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right);$$

d) kružnice $|z| = 1$ funkcí $w = \sqrt{z + 1}$.

12. Na jakou oblast se zobrazí výseč $0 < \arg z < \frac{2\pi}{3}$ funkcí $w = z^3$? Co odpovídá v tomto případě soustavám $\operatorname{Re} w = \alpha$, $\operatorname{Im} w = \beta$?

13*. Uveďte příklad takové funkce $w = f(z)$, pro kterou limity podél libovolné přímky existují a jsou si rovny, ale $\lim_{z \to 0} f(z)$ přesto neexistuje.

14. Prozkoumejte spojitost funkce $w = \operatorname{tg}(\arg z)$.

15. Dokažte: jestliže je funkce $w = f(z)$ v některé oblasti regulární a reálná, pak je konstantní.

16. Dokažte: je-li funkce $w = f(z)$ regulární v oblasti D a je tam všude $f'(z) \equiv 0$, pak je $f(z)$ konstantní v oblasti D.

17. Prozkoumejte regularitu funkcí: a) $w = z^3$; b) $w = \frac{1}{z^2}$; c) $w = \sqrt[3]{z}$; d) $w = z \operatorname{Re} z$.

KONFORMNÍ ZOBRAZENÍ.

§ 15. Konformní zobrazení. Budiž $w = f(z)$ funkce diferencovatelná v bodě z a budiž $f'(z) \neq 0$. Položíme

$$\Delta z = \Delta r \,.\, e^{i\varphi}, \quad \Delta w = \Delta \varrho \, e^{i\psi}, \quad f'(z) = A e^{i\alpha},$$

a podle definice derivace a podle věty **[2]** § 12 bude*)

$$|f'(z)| = A = \lim_{\Delta r \to 0} \frac{\Delta \varrho}{\Delta r}, \quad \arg f'(z) = \alpha = \lim_{\Delta z \to 0} (\psi - \varphi). \tag{1}$$

Nechť se nyní blíží bod $\zeta = z + \Delta z$ bodu z po jisté křivce C. Jemu odpovídající bod $\omega = f(\zeta)$ se bude blížit bodu $w = f(z)$ po jiné křivce γ, která odpovídá křivce C v zobrazení $w = f(z)$ (viz obr. 17). Křivka C je definována pomocí komplexní funkce reálné proměnné t:

$$\zeta = \zeta(t) \quad (\zeta(t_0) = z),$$

a odpovídající křivka γ má rovnici:

$$\omega = \omega(t) = f[\zeta(t)] \quad (\omega(t_0) = w).$$

Předpokládejme, že křivka C má tečnu v bodě z. Pak můžeme předpokládat, že existuje $\dot{\zeta}(t_0) \neq 0$. Z pravidla o derivaci složené funkce a z předpokladu $f'(z) \neq 0$ plyne, $\dot{\omega}(t_0) = f'(z)\,\dot{\zeta}(t_0) \neq 0$, t. j. γ má též tečnu v bodě w. Označme si φ_0, resp. ψ_0, úhly, které tyto tečny svírají s osami x, resp. u. Pak $\varphi_0 = \lim_{\Delta z \to 0} \varphi$ a $\psi_0 = \lim_{\Delta z \to 0} \psi$ a druhý výraz v (1) přejde na tvar**)

$$\arg f'(z) = \psi_0 - \varphi_0. \tag{2}$$

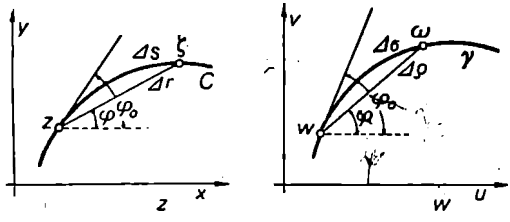
---

*) Jestliže $\alpha \neq \pi + 2k\pi$, pak vybereme takové hodnoty φ a ψ, aby jejich rozdíl $\psi - \varphi$ ležel v intervalu $(-\pi, \pi)$ a (1) pak dává hlavní větev argumentu. Je-li $\alpha = \pi + 2k\pi$, vybereme φ a ψ tak, aby rozdíl $\psi - \varphi$ ležel v intervalu $\langle 0, 2\pi)$, a pak z rovnice (1) dostaneme $\alpha = \pi$.

**) Jako doplňující předpoklad pro výběr hodnot φ a ψ potřebujeme ještě, aby existovaly jejich limity pro $\Delta z \to 0$. Pak je arg v rovnici (2) hlavní větev argumentu.

Vzorec (2) dokazuje, že

a) *úhel, o který se pootočí tečna křivky C v bodě z při zobrazení $w = f(z)$, je nezávislý na směru a tvaru křivky.*



Obr. 17.

Budeme zde, i dále, vždy předpokládat, že směry os x a u, resp. y a v, spolu souhlasí, a úhlem pootočení pak budeme rozumět úhel, který svírá původní tečna s odpovídajícím směrem v rovině všech obrazů. Pak můžeme vlastnost rovnice (2) vyslovit geometricky takto:

úhel $\alpha = \arg f'(z)$ *je roven úhlu pootočení v bodě* z *při zobrazení* $w = f(z)$.

Označme si Δs, resp. $\Delta\sigma$, délku oblouku křivky C mezi body z a ζ, resp. křivky γ mezi body w a ω. Jak je známo z analysy, jsou obě nekonečně malé veličiny Δs a $\Delta\sigma$ ekvivalentní vzhledem k Δr a $\Delta\varrho$ a můžeme tedy prvou rovnici v (1) přepsat na tvar*)

$$|f'(z)| = A = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta \sigma}. \tag{3}$$

Tuto limitu nazýváme *modul zobrazení*. Ze vzorce (3) plyne

b) *při zobrazení* $w = f(z)$ *nezávisí modul zobrazení v bodě* z *ani na tvaru ani na směru křivky* C.

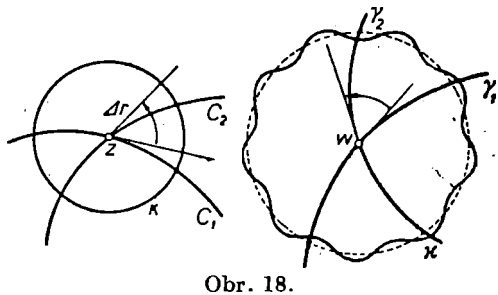
To můžeme geometricky vyslovit též takto:
Modul derivace $A = |f'(z)|$ *v bodě* z *je roven modulu zobrazení v tomto bodě* $w = f(z)$.

Vlastnostem a) a b) našeho zobrazení $w = f(z)$ je možno dát ještě jiný geometrický tvar (obr. 18).

Budeme se nyní zajímat nejen o velikost, nýbrž i o orientaci úhlu α, t. j. budeme hledat smysl otočení, kterým přejde prvé rameno úhlu do

*) Viz Vojtěch: Základy vyšší matematiky, díl I, str. 240, vyd. VII, JČMF, Praha 1946. [*Pozn. překl.*]

polohy shodné s druhým ramenem. Pro orientaci si zavedeme úmluvu běžnou v analytické geometrii. Úhel, jehož prvé rameno splyne s druhým ramenem pohybem proti pohybu ručiček hodinových, budeme nazývat kladným. Všechny úhly, které nebudou kladné (a budou různé od nuly), budeme nazývat záporné.



Obr. 18.

Při zobrazení $w = f(z)$ se podle vlastnosti a) tečny ke všem křivkám v bodě z pootočí o stejný úhel (i co do smyslu). Můžeme tedy vyslovit tuto vlastnost jistého „konservatismu úhlů" jako vlastnost charakteristickou pro naše zobrazení:

a′) *Úhel dvou libovolných křivek C_1 a C_2 protínajících se v bodě z je roven co do velikosti i smyslu úhlu mezi křivkami γ_1 a γ_2, které odpovídají křivkám C_1 a C_2 v zobrazení $w = f(z)$.*

Při zobrazení $w = f(z)$ se body z vzdálené od bodu z_0 o Δr, kde Δr je veličina nekonečně malá, zobrazí na body w, vzdálené od bodu w_0 (až na veličiny vyšších řádů) o $A\Delta r$. Můžeme tedy vlastnost b) geometricky vyslovit též jako invarianci nekonečně malých kružnic takto:

b′) *Kružnici o nekonečně malém poloměru Δr a středu v bodě z odpovídá v zobrazení $w = f(z)$ křivka $\varkappa$ lišící se od kružnice se středem v bodě w a poloměrem $A\Delta r$ o veličiny nekonečně malé vyššího řádu vzhledem k Δr.*

Definice. Zobrazení $w = f(z)$ mající v některém bodě z vlastnosti a′), b′) se nazývá *konformní* v tomto bodě. Výsledky shrnuje

Věta [1]. *Budiž $w = f(z)$ funkce diferencovatelná v bodě z a budiž $f'(z) \neq 0$, pak zobrazení zprostředkované funkcí $w = f(z)$ je konformní v bodě z a* arg $f'(z)$ *udává velikost pootočení v bodě z; $|f'(z)|$ je modul zobrazení v bodě z.*

Poznámka. arg $f'(z)$ nazýváme též někdy argument zobrazení v bodě z.

Jak jsme ukázali již výše, konformní zobrazení zachovává úhly mezi křivkami nejen co do velikosti, nýbrž i co do orientace. Tuto poslední vlastnost nemá na př. zobrazení $w = \bar{z}$, které geometricky značí zrcadlení roviny z podle reálné osy. Zobrazení $w = \bar{z}$ zachovává sice velikost úhlů, ale obrací jejich smysl.

Zkoumejme superposici zobrazení $w = f(\zeta)$ a $\zeta = \bar{z}$ (kde ζ je nová komplexní proměnná, $f(\zeta)$ regulární funkce), t. j. $w = f(\bar{z})$. Obě zobrazení $w = f(\zeta)$ i $\zeta = \bar{z}$ zachovávají velikost úhlů a tedy i zobrazení $w = f(\bar{z})$ bude zachovávat velikost úhlů. Zobrazení $w = f(\zeta)$ zachovává i smysl úhlů, ale zobrazení $\zeta = \bar{z}$ jej mění na opačný. Z toho plyne, že zobrazení $w = f(\bar{z})$ bude měnit orientace úhlů.

Někdy se nazývá zobrazení $w = f(\bar{z})$ konformním II. typu (na rozdíl od výše zkoumaného konformního zobrazení, které pak nazýváme konformním I. typu). Závěrem ještě několik poznámek o vlastnostech konformních zobrazení.

Poznámka 1. Podmínka $f'(z) \neq 0$ ve větě [1] je podstatná. Jako příklad vezměme funkci $w = z^2$ z př. 5 § 11. Funkce $w = z^2$ je regulární v bodě $z = 0$, ale její derivace v tomto bodě

$$\left.\frac{dw}{dz}\right|_{z=0} = 2z\Big|_{z=0} = 0.$$

V § 11 jsme si dokázali, že zobrazení $w = z^2$ zdvojnásobuje úhly v počátku souřadnic, t. j. není konformní v bodě $z = 0$.

Poznámka 2. Z vlastnosti b) plyne, že plocha ohraničená křivkou $\varkappa$ je až na nekonečně malé veličiny vyšších řádů rovna $A^2\pi\Delta r^2$. Z toho vidíme, že koeficient A^2 s uvedenou přesností je poměr ploch ohraničených křivkami C a $\varkappa$. Nazýváme jej *koeficientem plošné dilatace* konformního zobrazení v bodě z. Je tedy koeficient plošné dilatace konformního zobrazení v bodě z roven $|f'(z)|^2$. K témuž výsledku dojdeme i jinak: Uvažujme Jakobián zobrazení $w = f(z)$, t. j. Jakobián funkcí $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 = |f'(z)|^2, \tag{4}$$

kde jsme použili Cauchy-Riemannových rovnic. Jak je známo z analysy,*) modul Jakobiánu je roven koeficientu plošné dilatace.

Odvodíme si ještě jednu geometrickou interpretaci $|f'(z)|$.

Poznámka 3. Jestliže je v některém bodě $f'(z) \neq 0$, pak podle (4) v tomto bodě $\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \neq 0$. V analyse se dokazuje, že z této vlastnosti Jakobiánu a spojitosti prvních parciálních derivací funkcí $u(x, y)$ a $v(x, y)$ plyne, že lze nalézt takové okolí bodu z, že v něm je zobrazení $w = f(z)$ jedno-jednoznačné. Je možno dokázat i opak: Je-li $w = f(z)$ regulární v bodě z a je-li $f'(z) = 0$, pak nelze najít žádné okolí bodu z tak, aby v něm bylo zobrazení $w = f(z)$ jedno-jednoznačné.

§ 16. Konformní zobrazení oblastí. Definice. *Zobrazení $w = f(z)$ se nazývá konformním v oblasti D, je-li konformní v každém bodě oblasti.*

Z věty [1] plyne, že k tomu, aby zobrazení $w = f(z)$ bylo konformní v oblasti D stačí, aby $w = f(z)$ byla v této oblasti regulární a $f'(z) \neq 0$ všude v této oblasti. Zobrazení př. 1—4 § 11 jsou zřejmě konformní v celé otevřené rovině. V dalším najde čtenář další příklady konformního zobrazení.

Předpokládejme, že zobrazení $w = f(z)$ je konformní a pro jednoduchost i jedno-jednoznačné v oblasti D. Budiž Δ oblast, která odpovídá oblasti D v tomto zobrazení. V oblasti Δ vezmeme dvě soustavy přímek $u = c_1$, resp. $v = c_2$, které jsou rovnoběžné s osami v, resp. u, v rovině w. V zobrazení $w = f(z)$ odpovídají těmto přímkám dvě soustavy křivek v rovině z, jejichž rovnice jsou

$$u(x, y) = c_1, \quad v(x, y) = c_2. \tag{5}$$

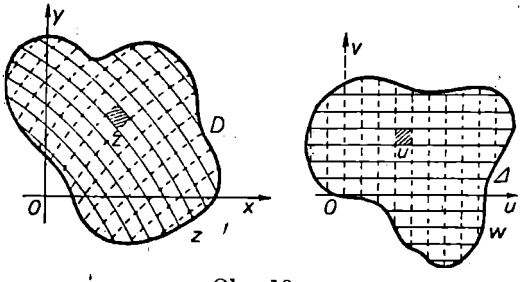
Důkaz. Jestliže se bod z pohybuje podél některé z křivek, na př. první soustavy, potom — jak ukazuje prvá z rovnic (5) — funkce $u(x, y)$ je konstantní. To však znamená, že bod w se pohybuje po přímce $u = \text{const}$ rovnoběžné s osou v.

Budeme předpokládat, že hodnoty konstant c_1 a c_2 v rovnici (5) rostou ve stejných intervalech. To znamená, že oblast Δ je rozdělena

*) Viz Bermant: Kurs matematičeskogo analysa II., str. 181 a další, Gostechizdat, Moskva 1950.

na čtverečky o straně Δc. Budeme pak říkat, že v oblasti Δ je sestrojena *kartézská souřadnicová síť*. Této síti odpovídá v oblasti D síť křivek (5). Síť (5) nazýváme *síť konformně ekvivalentní ke kartézské souřadnicové síti*.

Jestliže $\Delta c \to 0$ (t. j. Δc je veličina nekonečně malá), pak podle vlastností a') a b') konformního zobrazení sítí v oblasti D se skládá z křivočarých nekonečně malých čtverečků*) (obr. 19).



Obr. 19.

Příklad. Funkce

$$w = z^2 \tag{6}$$

poskytuje zobrazení horní poloroviny $\operatorname{Im} z > 0$ na rovinu w s vyloučením kladné reálné poloosy u (§11). Toto zobrazení bude v celé horní polorovině konformní, neboť je tam všude $\frac{dw}{dz} = 2z \neq 0$.

V bodě $z = 0$ zobrazení dvojnásobuje úhly (viz § 11). Je

$$u = x^2 - y^2, \; v = 2xy; \tag{7}$$

je ihned vidět, že konformně ekvivalentní síť je tvořena větvemi hyperbol

$$x^2 - y^2 = c_1, \; 2xy = c_2, \tag{8}$$

ležícími v horní polovině (obr. 20). Kromě právě zkoumané sítě můžeme ještě vyšetřovat *síť konformně ekvivalentní síti polárních souřadnic*. V našem případě je tvořena sítí křivek v $\operatorname{Im} z > 0$, které se zobrazí na kružnice $|w| = c_1$ (s vyloučením bodu $w = c_1$ na kladné reálné poloose) a na polopaprsky $\arg w = c_2$. Je ihned vidět, že to jsou půlkružnice $|z| = \sqrt{c_1}$, $\operatorname{Im} z > 0$ a polopaprsky $\arg z = \frac{1}{2}c_2$, $0 < c_2 < 2\pi$ (viz obr. 16).

*) S přesností do nekonečně malých veličin vyšších řádů; čtyrúhelník čárkovaný na obr. 19 je podle a') pravoúhelník a podle b') jsou si jeho strany rovny.

§ 17. Diferenciál a jeho geometrická interpretace.

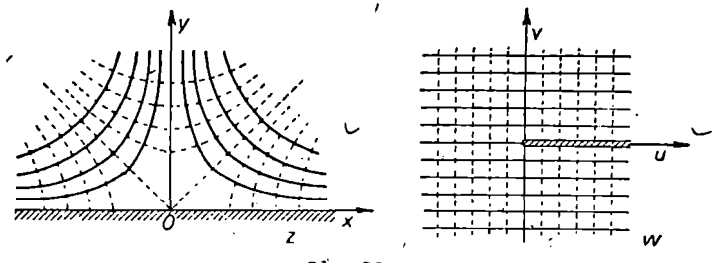
Z definice derivace plyne

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} - f'(z) = \eta, \ \eta \to 0 \text{ pro } \Delta z \to 0,$$

z toho

$$\Delta w = f'(z)\,\Delta z + \eta \Delta z.$$

Veličina $f'(z)\,\Delta z$ se liší od přírůstku Δw o veličinu $\eta \Delta z$, nekonečně malou vyššího řádu*) vzhledem k $f'(z)\,\Delta z$ (pro $f'(z) \neq 0, \neq \infty$). Na-



Obr. 20.

zýváme ji podobně jako v analyse funkcí reálné proměnné — *hlavní částí* Δw. Kromě toho při pevném z závisí tato veličina *lineárně* na Δz. Je tedy zcela přirozená

Definice. Veličina

$$\mathrm{d}w = f'(z)\,\Delta z,$$

která je hlavní částí přírůstku Δw, se nazývá *diferenciál* funkce $f(z)$ v bodě z.

Budeme-li aplikovat naši formuli na funkci $f(z) = z$, pro níž $f'(z) = 1$, dostaneme $\mathrm{d}z = \Delta z$ a vzorec pro diferenciál pak nabude konečného tvaru

$$\mathrm{d}w = f'(z)\,\mathrm{d}z. \tag{10}$$

*) To znamená podobně jako v analyse reálné proměnné, že

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w - f'(z)\,\Delta z}{f'(z)\,\Delta z} = 0.$$

Abychom našli geometrický smysl diferenciálu, budeme fixovat body z a w a budeme studovat vztah mezi body $Z = z + \Delta z$ a $W = w + \Delta w$:

$$W = f(Z).$$

Vztah mezi body Z a W se při pevném z a w zřejmě redukuje na vztah mezi $\Delta z = Z - z$ a $\Delta w = W - w$, pro které platí pro diferencovatelné funkce

$$\Delta w = f'(z)\,\Delta z + \eta \Delta z. \tag{9}$$

Budeme studovat vztah mezi Δz a Δw v dostatečně malém okolí bodu z a předpokládejme ještě, že $f'(z) \neq 0$. Zanedbáme-li na pravé straně rovnice (9) člen $\eta \Delta z$ jako veličinu nekonečně malou vyššího řádu, můžeme přibližně psát

$$\Delta w \approx f'(z)\,\Delta z = \mathrm{d}w. \tag{11}$$

Rovnice (11) nám udává jednoduchou lineární závislost mezi Δz a $\mathrm{d}w$.

Používajíce geometrické terminologie můžeme tedy říci: je-li funkce $w = f(z)$ diferencovatelná v bodě z a je-li $f'(z) \neq 0$, pak se zobrazení v okolí tohoto bodu (až na veličiny nekonečně malé vyšších řádů) redukuje na lineární zobrazení

$$W - w = f'(z)\,(Z - z). \tag{10_1}$$

Toto zobrazení se nazývá *hlavní lineární část zobrazení* $w = f(z)$. Takže, *v bodech, kde* $f'(z) \neq 0$, *definuje diferenciál* $\mathrm{d}w$ *hlavní lineární část zobrazení* $w = f(z)$.

Můžeme opět provést analogii s analysou funkce reálné proměnné, kde záměna funkce $f(x)$ jejím diferenciálem v okolí bodu x geometricky znamená záměnu části oblouku křivky $y = f(x)$ úsekem tečny v bodě x s rovnicí

$$(Y - y) = f'(x)\,(X - x).$$

Z (11) plyne

$$W - w \approx f'(z)\,(Z - z)$$

čili

$$W \approx f'(z)\,Z + w - zf'(z) = aZ + b,$$

kde $a = f'(z)$, $b = w - zf'(z)$ jsou konstanty při pevném z.

Je to lineární zobrazení vyšetřované v př. 4 § 11. Použijeme-li výsledku tam odvozeného, dostaneme

Věta [2]. *Budiž $w = f(z)$ diferencovatelná v bodě z a nechť $f'(z) \neq 0$, pak se zobrazení zprostředkované funkcí $w = f(z)$ v dostatečně malém okolí bodu z redukuje na lineární zobrazení (až na veličiny nekonečně malé vyšších řádů), t. j. na*

1. *rovnoběžné posunutí z bodu z do bodu w,*
2. *dilataci s modulem $|f'(z)|$,*
3. *pootočení o úhel* $\arg f'(z)$.

Jinak řečeno, *konformní zobrazení se jeví jako lokální* (t. j. v okolí bodu z) *podobnost.* Odtud je též jeho název — konformní — t. j. zachovávající tvar (formu).

§ 18. Lineární lomené zobrazení je definováno na úplné kouli komplexní proměnné z *lineární lomenou funkcí*

$$w = \frac{az + b}{cz + d} \tag{12}$$

pro $z \neq -\frac{d}{c}, \neq \infty$, pro $z = -\frac{d}{c}$, $w = \infty$ a pro $z = \infty$, $w = \frac{a}{c}$.

Předpokládejme ještě, že

$$ad - bc \neq 0, \tag{13}$$

neboť jinak by bylo $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ a funkce (12) by degenerovala na konstantu.

Lineární lomená funkce zprostředkuje jedno-jednoznačné zobrazení úplné koule z na úplnou kouli w. Inversní zobrazení k zobrazení (12) je definováno a je jednoznačné na úplné kouli w a má tvar:

$$z = \frac{-dw + b}{cw - a}$$

pro $w \neq \frac{a}{c}, \neq \infty$ a pro $w = \frac{a}{c}$, $z = \infty$ a pro $w = \infty$, $z = -\frac{d}{c}$.

Pro $c = 0$ (12) přejde na lineární (celistvé) zobrazení $w = \frac{a}{d} z + \frac{b}{d}$,

které jsme podrobněji vyšetřovali již v § 11 př. 4. Pro $c \neq 0$ můžeme psát

$$w = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c(cz + d)}$$

a můžeme pokládat zobrazení $w = f(z)$ za superposici těchto prostších zobrazení

$$\left.\begin{aligned} \zeta &= cz + d, \\ \omega &= \frac{1}{c\zeta}, \\ w &= \frac{a}{c} + (bc - ad)\,\omega, \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

při čemž pro druhé zobrazení z (14) $\omega = 0$ pro $\zeta = \infty$ a $\omega = \infty$ pro $\zeta = 0$; první a poslední zobrazení z (14) zobrazí nekonečně vzdálený bod na nekonečně vzdálený bod.

První a poslední zobrazení (14) jsou lineární a redukují se na dilataci v širším slova smyslu, otočení a rovnoběžný posun, jak jsme viděli již výše. Zbývá vyšetřit geometrický smysl druhého zobrazení (14). Pozměníme označení a píšeme

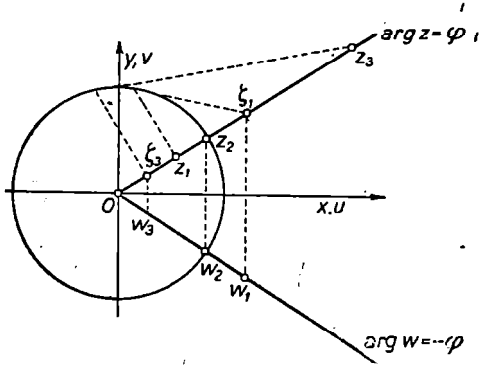
$$w = \frac{1}{z}. \tag{15}$$

Pro ujasnění si představme obě roviny soumístné, t. j. položeny na sebe tak, že se jejich souřadnicové osy kryjí. Zobrazení (15) pak značí přechod od čísla z k číslu $\frac{1}{z}$. Příslušnou konstrukci jsme vyložili v § 3 (obr. 5). Je to superposice dvou zobrazení: 1. inverse vzhledem k jednotkové kružnici (přechod od bodu z k bodu $\zeta = \frac{1}{z}$, při kterém se nemění argument a modul přechází ve svou reciprokou hodnotu) a 2. zrcadlení podle reálné osy (přechod od bodu ζ k bodu $w = \overline{\zeta} = \frac{1}{z}$, při němž se nemění modul a argument mění znaménko).

Je ihned vidět, že při takovém zobrazení se kruh $|z| < 1$ zobrazí na kruh $|w| > 1$ se středem v bodě $w = \infty$ a kruh $|z| > 1$ na kruh $|w| < 1$.

Kružnice $|z| = 1$ v kružnici $|w| = 1$, polopaprsek $\arg z = \varphi$ v polopaprsek $\arg w = -\varphi$ (obr. 21).

Derivace funkce $w = \frac{1}{z}$ existuje ve všech bodech kromě bodu



Obr. 21.

$z = 0$ a $z = \infty$ a je

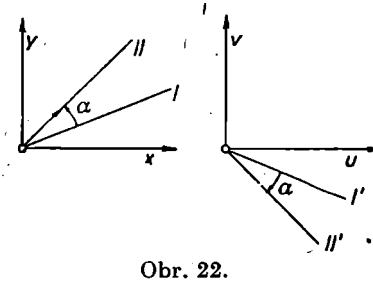
$$\frac{dw}{dz} = -\frac{1}{z^2} \neq 0.$$

Podle věty [1] je tedy zobrazení (15) konformní v celé rovině kromě uvedených dvou bodů.

Abychom si mohli ujasnit vlastnosti zobrazení v těchto bodech, musíme si nejprve zavést pojem úhlu mezi dvěma křivkami v bodě $z = \infty$. Tento úhel se měří jak známo úhlem, který svírají příslušné tečny (pokud existují) a stačí se tedy zabývat úhlem dvou přímek protínajících se v bodě $z = \infty$.

Pod úhlem mezi dvěma přímkami v bodě $z = \infty$ budeme rozumět úhel mezi těmito přímkami v jejich druhém (konečném) průsečíku, vzatý se znaménkem minus:

Po tomto doplnění bude zobrazení (15) zachovávat úhly i v dříve vyloučených bodech. Nechť se dvě přímky *I* a *II* protínají v bodě $z = 0$ pod úhlem α. V zobrazení (15) jim odpovídají přímky I′ a II′ protínající se v bodě $w = 0$ pod úhlem $-\alpha$*). Tím je dokázáno, že zobrazení (15) zachovává úhly v bodě $z = \infty$. Podobně se dokáže, že zobrazení (15) zachovává úhly i v bodě $z = 0$.



Obr. 22.

*) Neboť při zobrazení (15) odpovídá polopaprsku $\arg z = \varphi$ polopaprsek $\arg w = -\varphi$ (viz obr. 22).

Zobrazení (15) má tedy obě vlastnosti konformního zobrazení i v bodech $z = 0$ a $z = \infty$ (viz § 15).

Ostatní dvě zobrazení (14) jsou konformní v celé rovině z. A jelikož superposice konformních zobrazení je opět konformní zobrazení, je i (12) konformní v úplné rovině z.

Základní výsledky shrneme do

Věta [3]. *Libovolná lomená lineární funkce*

$$w = \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc \neq 0, \tag{12}$$

(pro $z = -\frac{d}{c}$, $w \neq \infty$, *pro* $z = \infty$, $w = \frac{a}{c}$*) zprostředkuje jednojednoznačné konformní zobrazení úplné komplexní roviny* z *na úplnou komplexní rovinu* w.

§ 19. Zobrazení kružnic. Rovnici libovolné kružnice v rovině z

$$A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0 \tag{16}$$

je možno pomocí substituce

$$x = \tfrac{1}{2}(z + \bar{z}), \quad y = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$$

psát ve tvaru

$$Az\bar{z} + \alpha z + \bar{\alpha}\bar{z} + D = 0, \tag{17}$$

kde $\alpha = \frac{1}{2}(B - Ci)$. Pro $A = 0$ přejde rovnice (16) v rovnici přímky. Budeme-li při svých úvahách používat koule komplexních čísel, nebudeme tuto vlastnost zvláště vylučovat (viz § 5).

Zobrazením (15) přejde rovnice (17) na tvar

$$A + \alpha\bar{w} + \bar{\alpha}w + Dw\bar{w} = 0, \tag{18}$$

který je zřejmě opět rovnicí kružnice na kouli w. Zobrazení (15) zobrazí tedy libovolnou kružnici koule z na kružnici koule w. Kružnice procházející bodem $z = 0$ (t. j. pro které v rovnici (17) je $D = 0$) se zobrazí v přímky (neboť pak $D = 0$ v rovnici (18)) a přímky roviny z se zobrazí na kružnice v rovině w procházející bodem $w = 0$ (neboť $A = 0$ v rovnici (18)). Přímky roviny z procházející bodem $z = 0$ (pro

něž $A = D = 0$ v rovnici (17)) se zobrazí opět na přímky roviny w procházející bodem $w = 0$ ($A = D = 0$ v rovnici (18)).

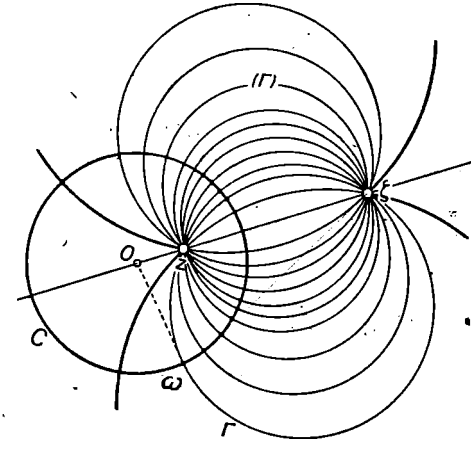
Protože druhá dvě zobrazení (14) zobrazí též kružnice na kružnice (to plyne okamžitě z jejich geometrického smyslu), je jasné, že tuto vlastnost bude mít i superposice (12). Dokázali jsme tím

Věta [4]. *Libovolné lineární lomené zobrazení*

$$w = \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc = 0$$

$\left(pro\ z = -\frac{d}{c},\ w = \infty,\ pro\ z = \infty,\ w = \frac{a}{c}\right)$ *převádí kružnice koule komplexní proměnné z opět v kružnice koule komplexní proměnné w.*

Poznámka. Libovolné konformní zobrazení zachovává (až na nekonečně malé veličiny vyšších řádů) nekonečně malé kružnice. Lineární lomené zobrazení zachovává všechny kružnice.



Obr. 23.

§ 20. Invariance sdružených bodů. Definice. Body z a ζ, jež leží na témže (prodlouženém) průměru kružnice C a pro něž platí

$$Oz \,.\, O\zeta = R^2, \qquad (19)$$

kde O je střed a R poloměr kružnice C, se nazývají *sdružené* (nebo též *symetrické*) vzhledem ke kružnici C. Střed O je sdružen s nekonečně vzdáleným bodem.

Se speciálním případem, kdy C byla jednotková kružnice se středem v počátku, jsme se již setkali v §§ 3 a 18. Konstrukce sdružených bodů, tak jak byla znázorněna na obr. 5, zůstává v platnosti i pro obecný případ.

Sestrojíme svazek kružnic (Γ) procházejících body z a ζ sdruženými

podle C (obr. 23). Každá kružnice ze svazku (Γ) protíná kružnici C pod pravým úhlem. Podle známé věty z elementární geometrie se čtverec délky tečny rovná součinu z délky sečny a její vnější části. Podle (19) je však tento součin roven R^2 a tedy tečna ke Γ je poloměrem v C a kružnice jsou ortogonální.

Naopak, jsou-li body z a ζ základními body svazku (Γ) kružnic ortogonálních ke kružnici C, pak jsou sdruženy vzhledem ke kružnici C. Neboť přímka $z\zeta$ patřící do svazku (Γ) je kolmá k C a prochází zřejmě středem O kružnice C. Kromě toho, protože je Γ ortogonální k C, je $Oz = O\zeta = O\omega^2$ a podle výše uvedené věty $O\omega^2 = R^2$. Tím je dokázána

Věta [5]. *Nutná a postačující podmínka k tomu, aby body z a ζ byly sdružené vzhledem ke kružnici C, je, aby kružnice svazku (Γ) s body z a ζ jako základními byly ortogonální ke kružnici C.*

Z věty **[5]** plyne nová

Definice. Body z a ζ se nazývají *sdružené podle přímky p*, jsou-li základními body svazku kružnic (Γ) ortogonálních k přímce p.

V tomto případě sdružení přechází zřejmě v obyčejnou symetrii.

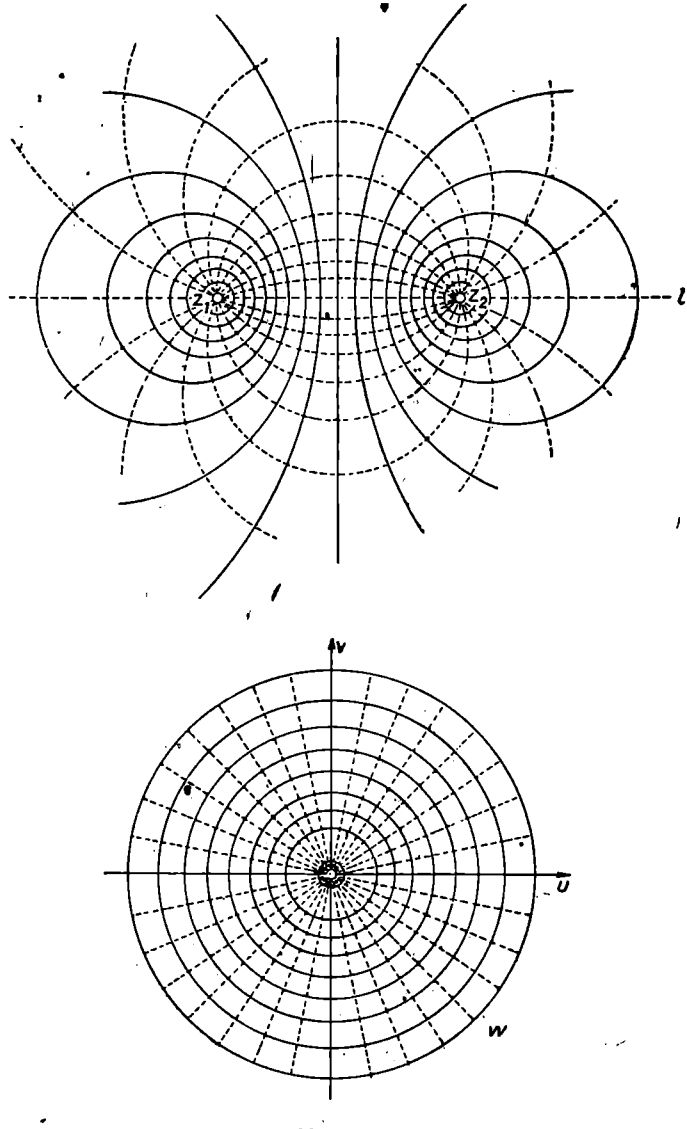
Věta [6]. Zobrazení $w = f(z)$ *zprostředkované libovolnou lineární lomenou funkcí zobrazuje dvojici bodů z a ζ sdružených podle kružnice C ve dvojici bodů w a ω sdružených podle kružnice C', která je obrazem kružnice C.*

Důkaz. Sestrojíme svazek kružnic (Γ) procházejících body z a ζ. Ty jsou podle věty **[5]** ortogonální ke kružnici C. Podle věty [4] se zobrazí C na kružnici (případně přímku) C', svazek (Γ) na svazek (Γ'), kružnic kolmých ke kružnici C' a podle věty **[5]** jsou tedy body w a ω sdruženy podle C'.

Příklad. Hledejme síť konformně ekvivalentní síti polárních souřadnic při zobrazení

$$w = \frac{z - z_1}{z - z_2}, \tag{20}$$

kde z_1 a z_2 jsou libovolné body roviny. V zobrazení (20) odpovídá bodu z_1, resp. z_2, bod $w = 0$, resp. $w = \infty$. Odpovídají tedy podle věty **[4]** polopřímkám $\arg w = c$ (t. j. „polokružnicím procházejícím



Obr. 24.

body $w = 0$ a $w = \infty$") oblouky kružnic procházejících body z_1 a z_2 (čárkované na obr. 24).

Dále: body $w = 0$ a $w = \infty$ jsou sdruženy podle všech kružnic $|w| = c_2$, tedy podle vět **[4]** a **[6]** odpovídají těmto kružnicím kružnice, podle nichž musí být sdruženy body z_1 a z_2 (vytažené plně na obr. 24). Oba svazky jsou navzájem ortogonální.

Poznámka. Dokázali jsme jako speciální případ, že geometrické místo bodů, jejichž poměr vzdáleností od dvou daných pevných bodů z_1 a z_2 je stálý

$$|w| = \left|\frac{z - z_1}{z - z_2}\right| = \text{const}$$

je kružnice. Toto tvrzení je obsahem *věty Apolloniovy*, a proto se kružnice $\left|\frac{z - z_1}{z - z_2}\right| = \text{const}$ nazývají *Apolloniovy kružnice*.

§ 21. Určení zobrazení zprostředkovaného lineární lomenou funkcí. Obecný tvar zobrazení (12) lineární lomené funkce závisí na třech nehomogenních (4 homogenních) parametrech, neboť můžeme libovolným nenulovým koeficientem z koeficientů a, b, c, d dělit čitatele a jmenovatele zlomku napravo v (12), t. j. můžeme tento koeficient položit roven 1.

Jednoduchý případ konstrukce lineárního lomeného zobrazení je tento: Buďtež dány na kouli z tři různé body z_1, z_2, z_3 a na kouli w tři různé body w_1, w_2, w_3. Jest třeba najít zobrazení tvaru (12), které převádí z_k v w_k ($k = 1, 2, 3$). Pro konečná z_k, w_k má toto zobrazení tvar

$$\frac{w - w_1}{w - w_2}\,\frac{w_3 - w_2}{w_3 - w_1} = \frac{z - z_1}{z - z_2}\cdot\frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1} \tag{21}$$

Důkaz. Pro pevná z_k, w_k je (21) zřejmě lineární lomená funkce a převádí z_k v w_k ($k = 1, 2, 3$). Jestliže některé z čísel z_k nebo w_k je nekonečné, pak v čitateli a jmenovateli ve výraze (21), kde se ono číslo vyskytuje, nahradíme příslušný rozdíl číslem 1. Tak na př. pro $z_3 = \infty$ $w_1 = \infty$ vzorec (21) bude mít tvar

$$\frac{1}{w - w_2}\,\frac{w_3 - w_2}{1} = \frac{z - z_1}{z - z_2}\cdot\frac{1}{1}$$

čili

$$w = w_2 + (w_3 - w_2)\frac{z - z_2}{z - z_1} \qquad (22)$$

Zřejmě bodu $z = z_1$ odpovídá bod $w = \infty$ a bodu $z = z_2$ bod $w = 0$ a bodu $z = \infty$ bod $w = w_3$.

Dokážeme nyní, že řešení dané vzorcem (21), resp. vzorci analogickými (22), v případě, že nejsou všechna z_k, w_k konečná, je jednoznačné. Nechť tedy existují dvě zobrazení zprostředkovaná lineárními lomenými funkcemi $w = l_1(z)$ a $w = l_2(z)$, která převádějí z_k ve w_k. Sestrojíme ještě zobrazení $\omega = l(w)$ převádějící w_k v body 0, 1, ∞ a budeme zkoumat superposice

$$\omega' = l[l_1(z)] = L_1(z), \quad \omega'' = l[l_2(z)] = L_2(z).$$

To jsou lineární lomené funkce převádějící body z_k v body $0, 1, \infty$. Sestrojíme zobrazení

$$\omega'' = L_2[L_1^{-1}(\omega')],$$

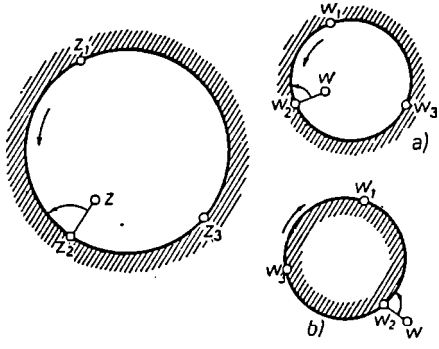
kde L_1^{-1} je inversní zobrazení k L_1. Pak ω'' je lineární lomená funkce $\omega'' = \frac{\alpha\omega' + b}{c\omega'' + d}$ a převádí body 0, 1, ∞ v sebe sama. Pak je to ale identita. Důkaz: pro $\omega' = \infty$, $\omega'' = \frac{a}{c} = \infty$ a tedy $c = 0$, $a \neq 0$; podobně pro $\omega' = 0$, $\omega'' = \frac{b}{d} = 0$ a tedy $b = 0$, $d \neq 0$; takže $\omega'' = \frac{a}{d}\omega'$. Ale pro $\omega' = 1$, $\omega'' = \frac{a}{d} = 1$, t. j. $\omega'' = \omega'$. A dále: je tedy L_1^{-1} inversní k L_2, odtud $L_1 = L_2$ a konečně $l_1 = l_2$.

Výsledky vyslovíme ve větě.

Věta [7]. *Existuje jedno a jen jedno zobrazení zprostředkované lineární lomenou funkcí, které převádí tři různé libovolné dané body z_k koule z ve tři různé libovolné dané vody w_k koule w ($k = 1, 2, 3$).*

Podle věty **[7]** lze najít lineární lomenou funkci převádějící danou kružnici C koule z v danou kružnici C' koule w. K tomu stačí podle věty **[4]** najít zobrazení převádějící tři libovolné body prvé kružnice ve tři libovolné body druhé kružnice.

Poznamenejme ještě, že toto zobrazení zobrazí kruh ohraničený kružnicí C buď celý dovnitř kružnice C' nebo celý vně kružnice C'. Důkaz: Nechť obrazy w' a w'' bodů z' a z'' z vnitřku kružnice C leží na různých stranách kružnice C'. Pak úsečka $z'z''$ neprotíná kružnici C, ale oblouk $w'w''$ jí odpovídající protíná kružnici C', což není možné.



Obr. 25.

Abychom zjistili, který případ nastane, stačí najíti obraz jediného bodu z vnitřku kružnice C; leží-li tento obraz uvnitř C', nastane prvý případ, leží-li vně, nastane druhý případ. Můžeme též postupovat jinak. Zvolíme na kružnici C tři různé body: z_1, z_2, z_3; jejich pořádek definuje jistý smysl oblouku na C (viz šipka na obr. 25). Když odpovídající body w_1, w_2, w_3 definují tentýž smysl na C', pak se vnitřek kružnice C zobrazí na vnitřek kružnice C' (obr. 25a). v opačném případě vně kružnice C' (obr. 25b). Důkaz: vezmeme bod z na poloměru procházejícím bodem z_2; úsečce zz_2 odpovídá oblouk ww_2 kolmý k C'. Úhel mezi obloukem $\widehat{z_1z_2}$ a poloměrem zz_2 (rovný $+\frac{1}{2}\pi$) musí v důsledku konformnosti zobrazení odpovídat i co do smyslu úhlu mezi oblouky $\widehat{w_1w_2}$ a $\widehat{ww_2}$. Odtud ihned plyne, jak je vidět z obr. 25, naše tvrzení:

Pro daný smysl oběhu na kružnici C leží vnitřek C nalevo od C. Při zobrazení zůstává v obou případech obraz tohoto vnitřku nalevo od C'. Můžeme tedy říci, že zobrazení (12) zachovává smysl oběhu na hranici kruhů.

§ 22. Speciální případy. Hledejme *zobrazení horní poloroviny na jednotkový kruh* převádějící daný bod z_0 poloroviny do středu jednotkové kružnice $w = 0$. Podle věty **[6]** je bod $\bar{z}_0$ sdružený s bodem z_0 podle reálné osy a $\bar{z}_0$ tedy přechází v bod $w = \infty$ (sdružený s $w = 0$ podle $|w| = 1$).

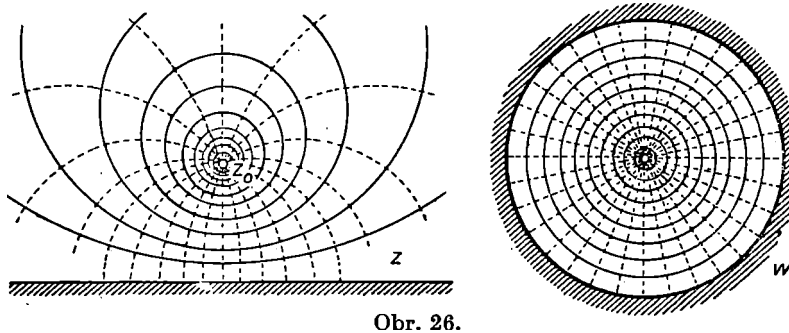
Bude tedy mít hledané zobrazení tvar

$$w = k\frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0}.$$

Zbývá určit k. Body reálné osy mají přejít v body jednotkové kružnice $|w| = 1$. Pro $z = x$ (x reálné číslo) je však $\bar{z} = z$ a čitatel a jmenovatel zlomku jsou komplexně sdruženy a jejich modul je roven 1. Máme tedy konečně $|k| = 1$, t. j. $k = e^{i\varphi}$ a naše zobrazení má tvar

$$w = e^{i\varphi}\frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0}. \tag{23}$$

Funkce (23) pro libovolné φ řeší naši úlohu, protože podle své konstrukce zobrazí „kružnici" $y = 0$ na kružnici $|w| = 1$ a bod



Obr. 26.

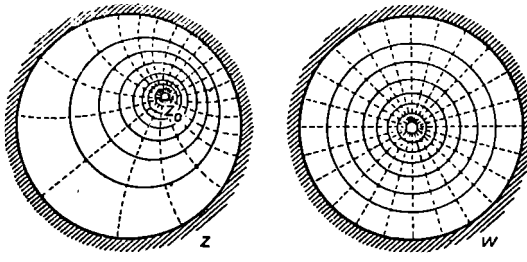
z_0 horní poloroviny dovnitř kruhu $|w| < 1$. Změna φ v rovnici (23) značí pootočení kruhu $|w| < 1$ okolo počátku, což není v rozporu s naší úlohou. Na obr. 26 je nakreslena příslušná síť sdružených funkcí konformně ekvivalentních sítí polárních souřadnic kruhu $|w| < 1$. Je zřejmě částí sítě z obr. 24.

Hledejme ještě *zobrazení jednotkového kruhu* $|z| < 1$ *na jednotkový kruh* $|w| < 1$ zobrazící bod z_0 z vnitřku kruhu $|z| < 1$ na střed kruhu $|w| < 1$, $w = 0$. Bod $\frac{1}{\bar{z}_0}$ sdružený s bodem z_0 podle $|z| = 1$ musí při tom přejít v bod $w = \infty$, takže hledané zobrazení má tvar

$$w = k_1\frac{z - z_0}{z - \frac{1}{\bar{z}_0}} = k\frac{z - z_0}{1 - z\bar{z}_0},$$

kde $k = -k_1\bar{z}_0$ je jistá konstanta. Ke stanovení k použijeme toho, že body $z = e^{i\varphi}$ kružnice $|z| = 1$ přejdou v body kružnice $|w| = 1$:

$$|k|\left|\frac{e^{i\varphi} - z_0}{1 - z_0 e^{i\varphi}}\right| = |k|\,|e^{i\varphi}|\left|\frac{1 - z_0 e^{-i\varphi}}{1 - \bar{z}_0 e^{i\varphi}}\right| = 1.$$



Obr. 27.

Je $|e^{i\varphi}| = 1$ a čitatel zlomku je komplexně sdružen s jmenovatelem; modul zlomku je tedy roven 1. A tedy $|k| = 1$, $k = e^{i\psi}$ a naše zobrazení má tvar

$$w = e^{i\psi}\frac{z - z_0}{1 - z\bar{z}_0}. \quad (24)$$

Vzorec (24) dává řešení naší úlohy pro libovolné ψ až na případné otočení kruhu $|w| < 1$ kolem počátku.

Derivace funkce (24) v bodě $z = z_0$ je rovna

$$w_0' = e^{i\psi}\frac{1 - z_0\bar{z}_0}{(1 - \bar{z}_0 z)^2}\bigg|_{z=z_0} = e^{i\psi}\frac{1}{1 - r_0^2},$$

kde $r_0 = |z_0| < 1$. Z toho je zřejmé, že $\psi = \arg w_0'$ geometricky značí úhel pootočení zobrazení (24) v bodě z_0. Můžeme tedy vhodnou volbou z_0 a ψ dosáhnout toho, aby bod z_0 a směr $-\psi$ přešly v bod $w = 0$ a směr osy u*).

Na obr. 27 je nakreslena síť sdružených funkcí, konformně ekvivalentních síti polárních souřadnic kruhu $|w| < 1$ (je částí sítě obr. 24). Zobrazení (24) tedy deformuje vnitřek a hranici kruhu $|z| < 1$, ponechávaje ho celkově beze změny.

Odvodíme ještě zobrazení *kruhu* $|z| < R$ *na kruh* $|w| < 1$, které převádí bod z_0 v počátek $w = 0$. Toto zobrazení má tvar

$$w = e^{i\varphi}\frac{R(z - z_0)}{R^2 - \bar{z}_0 z}, \quad (25)$$

jak si snadno odvodíme, nahradíme-li ve (24) z, resp. z_0, $\frac{z}{R}$, resp. $\frac{z_0}{R}$.

*) To znamená, že křivky dotýkající se v bodě z_0 polopaprsku $\arg z = -\psi$ se zobrazí na křivky, dotýkající se v bodě $w = 0$ osy u.

§ 23. Obecné principy theorie konformního zobrazení. Lineární lomená funkce zobrazuje jedno-jednoznačně a konformně úplnou rovinu komplexní proměnné z na úplnou rovinu komplexní proměnné w. Je možno dokázat, že je to jediná taková funkce. Funkce jiného typu než je lineární lomená funkce mohou jedno-jednoznačně zobrazit pouze část roviny z na část roviny w.

V předešlých paragrafech jsme viděli, že jedno-jednoznačné konformní zobrazení libovolného kruhu roviny z na libovolný kruh roviny w (ve zvláštním případě jeden nebo oba z těchto kruhů se mohou „rozšířit" v celou rovinu) lze vždy provést prostřednictvím lineární lomené funkce. Vzniká otázka, je-li možno sestrojit jedno-jednoznačné zobrazení libovolné oblasti D na libovolnou oblast Δ.

V takovéto obecné formulaci je odpověď záporná. Tak není na př. možné zobrazit vícenásobně souvislou oblast na jednoduše souvislou oblast. Neprovedeme úplný důkaz a poukážeme jen na hlavní principy nemožnosti konstrukce takového zobrazení.

Předpokládejme, že takové zobrazení vícenásobně souvislé oblasti D na jednoduše souvislou oblast Δ existuje. Vezmeme v oblasti D uzavřenou křivku C, skládající se z bodů oblasti D, a to takovou, že v ní leží body nepatřící do D (taková křivka podle předpokladu vždy zřejmě existuje). Při našem zobrazení přejde křivka C v křivku C', která se skládá z bodů oblasti Δ. Protože je Δ jednoduše souvislá, je možno ji spojitou deformací stáhnout v jediný bod aniž přitom C' vystoupí z Δ. Ze spojitosti zobrazení plyne, že se odpovídající křivka C v D musí také stáhnout v jeden bod, aniž vystoupí z D, což je zřejmě nemožné.

Pro jednoduše souvislé oblasti platí

Věta o existenci a unicitě. *Nechť D a Δ jsou dvě libovolné, jednoduše souvislé oblasti různé od úplné koule, resp. koule s vyňatým bodem,**) *a nechť z_0 a w_0 jsou libovolné dva vnitřní body oblastí D a Δ a nechť φ_0 je libovolné reálné číslo. Pak existuje jediné jedno-jednoznačné konformní zobrazení $w = f(z)$ oblastí D a Δ vyhovující podmínkám*

$$f(z_0) = w_0, \quad \arg f'(z) = \varphi_0. \tag{26}$$

Důkaz této věty se vymyká rámci této knihy, a proto jej neuvádíme.

*) Nutnost vyloučení těchto oblastí se ukáže v dalším (§ 53).

Poznámka 1. Možnost zobrazení libovolné jednoduše souvislé oblasti na jistou libovolnou jednoduše souvislou oblast bude dokázána, dokážeme-li možnost zobrazení každé z nich na horní polorovinu nebo na jednotkový kruh. Nechť funkce $\zeta = f(z)$ a $\zeta = g(w)$ zobrazí oblasti D a Δ jedno-jednoznačně a konformně, na př. na jednotkový kruh $|\zeta| < 1$, a budiž $w = \varphi(\zeta)$ inversní zobrazení k zobrazení $\zeta = g(w)$. Pak superposice

$$w = \varphi[f(z)] = F(z)$$

zprostředkuje jedno-jednoznačné a konformní zobrazení oblasti D na Δ.

Známe-li jedno zobrazení $\zeta = f(z)$ oblasti D na jednotkový kruh, můžeme jich sestrojit nekonečně mnoho pomocí pomocného zobrazení jednotkového kruhu $|\zeta| < 1$ na jednotkový kruh $|w| < 1$. Toto pomocné zobrazení je dáno vztahem (24), kde místo z píšeme ζ a libovolný bod ζ_0 se zobrazí na počátek $w = 0$ a argument tečny v bodě ζ_0 má danou předem zvolenou hodnotu.

Poznámka 2. Jak ukazují rovnice (26), závisí konformní zobrazení dané oblasti na druhou na třech reálných parametrech (prvá z rovnic (26), jako rovnice mezi komplexními čísly, je ekvivalentní dvěma rovnicím mezi reálnými čísly). Místo (26) se často používá pro stanovení jedno-jednoznačného konformního zobrazení jiných podmínek, obsahujících rovněž tři reálné parametry. Na př. jsou dány obrazy jednoho vnitřního bodu a jednoho bodu hraničního:

$$f(z_0) = w_0, \quad f(z_1) = w_1$$

(z_0, w_0 vnitřní, z_1, w_1 hraniční body oblasti D, resp. Δ) nebo jsou dány obrazy tří hraničních bodů oblasti D:*)

$$f(z_k) = w_k \ (k = 1, 2, 3)$$

(z_k, w_k hraniční body oblasti D resp. Δ).

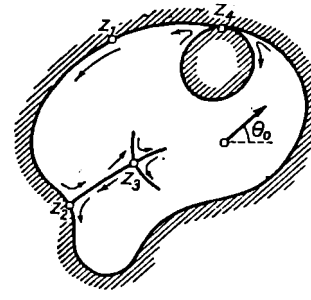
O podobných podmínkách říkáme, že *normují* hledané konformní zobrazení. Někdy jim též říkáme *okrajové podmínky*.

*) Poloha hraničního bodu je určena jediným reálným parametrem, na př. délkou oblouku měřeného od zvoleného pevného bodu na oblouku.

Podtrhněme ještě to, že v existenční větě se mluví jen o zobrazení vnitřku oblasti D na vnitřek oblasti Δ. Jak se při tom zachová hranice? Na tuto otázku nám dává odpověď

Prvá věta o přiřazení hranic. *Při jedno-jednoznačném konformním zobrazení oblasti D na oblast Δ*

*a) existuje jedno-jednoznačné a spojité zobrazení hranic těchto oblastí, jestliže hranice oblasti Δ se skládá z konečných bodů a počítáme-li každý hraniční bod tolikrát, kolikrát jej projdeme při úplném oběhnutí hranice.**)



Obr. 28.

*b) funkce zprostředkující zobrazení má na hranici oblasti D spojitou derivaci,***) *jestliže hranice oblasti D, resp. Δ, obsahují pouze konečné body a mají ve všech bodech spojitou křivost. V těch bodech, kde neexistuje tečna k hranici, derivace neexistuje nebo má hodnotu* 0, *resp.* ∞.

Poznamenejme ještě, že vlastnost odvozená v § 21 pro zobrazení (12) má obecný charakter:

*Při jedno-jednoznačném a konformním zobrazení oblastí D a Δ se zachovává smysl oběhu jejich hranic.****)

Jinak řečeno, jestliže při oběhu hranice oblasti D oblast zůstane vlevo, pak při odpovídajícím oběhu hranice oblasti Δ zůstane i oblast Δ vlevo.

Větší význam pro praxi konformního zobrazení má

Druhá věta o přiřazení hranic. *Nechť D, resp. Δ, jsou jednoduše souvislé oblasti ohraničené křivkami C, resp. C', nechť funkce $w = f(z)$ je regu-*

---

*) Na př. na obr. 28: bod z_1 projdeme jednou, body z_2 a z_4 dvakrát a konečně bod z_3 čtyřikrát. Jestliže hranice oblasti D i hranice oblasti Δ neobsahuje násobné body, pak je zobrazení jednoznačné a spojité v běžném slova smyslu.

**) Derivací funkce $f(z)$ v hraničním bodě z rozumíme limitu $\lim_{z' \to z} \frac{(fz') - f(z)}{z' - z}$, kde $\{z'\}$ je posloupnost hraničních bodů.

***) V kursech analysy se dokazuje, že tuto vlastnost má libovolné spojité jedno-jednoznačné zobrazení s kladným Jakobiánem. Podle (4) § 15 mají konformní zobrazení vždy tuto vlastnost.

lární v D a spojitá v $\bar{D}$ a nechť $w = f(z)$ zprostředkuje vzájemné zobrazení křivek C a C'. Pak funkce $w = f(z)$ zprostředkuje jedno-jednoznačné a konformní zobrazení oblastí D a Δ.

V závěru uveďme ještě důležitý

Princip zachování oblastí. *Je-li funkce $w = f(z)$ regulární v oblasti D a různá od konstanty, pak bodová množina Δ, na kterou funkce $w = f(z)$ zobrazí oblast D, je též oblastí.*

Poznamenejme ještě, že tento princip má obecný charakter. Jak již bylo řečeno v poznámce 3 k větě **[1]** této kapitoly, je-li $f'(z_0) \neq 0$, pak funkce $w = f(z)$ zobrazí okolí bodu z_0 oblasti γ na okolí bodu $w_0 = f(z_0)$ roviny w. V celku nebude obecně zobrazení oblasti D na oblast Δ jedno-jednoznačné, v obecném případě bude Δ oblastí na Riemannově ploše funkce $w = f(z)$. Takové plochy budeme blíže zkoumat v příští kapitole. Bodům, pro než $f'(z) = 0$, odpovídají body rozvětvení Riemannovy plochy (o nich bude řeč též v příští kapitole), v jejich okolí se narušuje jedno-jednoznačnost zobrazení. Princip zachování oblastí se ovšem nenarušuje a obrazy takových bodů jsou vnitřními body oblasti Δ.

ÚLOHY

1. Budiž $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$. Dokažte: Nutná a postačující podmínka proto, aby $f(z)$ byla v bodě z diferencovatelná, je, aby $du + i\,dv$ (kde du a dv jsou diferenciály reálných funkcí u a v) bylo úměrné $dx + i\,dy$ (kde koeficient úměrnosti závisí jen od z).

2. Jak se najde délka obrazu křivky C a plocha obrazu oblasti D při jedno-jednoznačném konformním zobrazení?

3. Stanovte modul a argument zobrazení $w = \dfrac{z - i}{z + i}$ v bodech $z_1 = -1$, $z_2 = i$.

4. Stanovte plochu obrazu čtverce $0 < x < 1$, $0 < y < 1$ při zobrazení $w = z^2$ a délku jeho obvodu.

5. Stanovte délku obrazu kružnice $|z| = 1$ při zobrazení $w = \sqrt{z + 1}$ (viz př. 11 d, kap. I).

6. Dokažte, že podmínky konformní ekvivalence sítě sdružených funkcí $u(x, y)$, $v(x, y)$ se sítí kartézských souřadnic lze psát také takto:

$$|\text{grad } u| = |\text{grad } v|.$$

7. Najděte hlavní lineární část zobrazení $w = z^2$ v bodě $z = \mathrm{i}$. Odhadněte chybu pro hlavní část tohoto zobrazení v kruhu $|z - \mathrm{i}| < 0{,}1$.

8. Na jakou oblast se zobrazí funkcí $w = \frac{1}{z}$ oblast, uzavřená mezi tři kružnice navzájem se dotýkající (vně), je-li jeden z těchto bodů dotyku v počátku?

9. Na jakou oblast zobrazí funkce $w = \frac{1}{z}$ oblast polopásu $0 < x < 1$, $y > 0$?

10. Stanovte jedno-jednoznačné konformní zobrazení prstence omezeného kružnicemi $|z| = 1$ a $|z - 1| = \frac{5}{2}$ na mezikruží $1 < |w| < R$. Stanovte hodnotu R.

11. Najděte všechna zobrazení zprostředkovaná lineárními lomenými funkcemi, která ponechávají body ± 1 na svém místě.

12. Stanovte konformní zobrazení kruhu $|z| < 1$ na horní polorovinu, převádějící body -1, $+1$, i v body ∞, 0, 1.

13. Stanovte zobrazení horní poloroviny na sebe samu tak, že bodům ∞, 0, 1 odpovídají 0, 1, ∞.

14. Stanovte zobrazení $w = f(z)$ horní poloroviny $\operatorname{Im} z > 0$ na kruh $|w| < R$ tak, že $f(\mathrm{i}) = 0$, $f'(\mathrm{i}) = 1$. Jak velké je R?

15. Jaký je geometrický smysl úhlu φ v rovnici (23)? V jakou soustavu převádí zobrazení (23) kartézskou souřadnicovou síť v rovině z?

16. Stanovte konformní zobrazení horní poloroviny na sebe samu tak, aby tři dané (různé) body a_1, a_2, a_3 $(a_1 < a_2 < a_3)$ na reálné ose přešly na body 0, 1, ∞.

17. Jaké jsou podmínky pro to, aby funkce $w = \frac{az + b}{cz + d}$ zobrazila horní polorovinu na sebe samu (roviny z a w předpokládáme soumístné)?

ELEMENTÁRNÍ FUNKCE

§ 24. Funkce $w = z^n$ a její Riemannova plocha. Funkce

$$w = z^2 \tag{1}$$

byla již diskutována v §§ 11 a 16.

V polárních souřadnicích $z = re^{i\varphi}$, $w = \varrho e^{i\psi}$ lze psát (1) pomocí dvou rovnic mezi reálnými veličinami

$$\varrho = r^2, \quad \psi = 2\varphi, \tag{2}$$

z kterých ihned plyne geometrický smysl našeho zobrazení.

Z rovnice $z_1^2 = z_2^2$ plyne

$$z_2 = \pm z_1. \tag{3}$$

Zřejmě jsou tedy při zobrazení stejné obrazy jen těch bodů, pro něž platí (3), t. j. splývají pouze obrazy bodů souměrných podle počátku souřadnic. Aby bylo *zobrazení* (1) *jedno-jednoznačné*, zřejmě stačí a je nutné, aby oblast D neobsahovala žádné takové body.

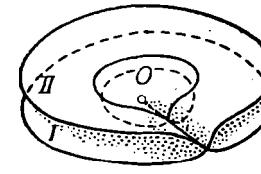
Těmto podmínkám vyhovuje horní polorovina $0 < r < \infty$, $0 < \varphi < \pi$, jak ostatně ukazuje rovnice (2). Funkce $w = z^2$ zobrazí horní polorovinu na celou rovinu (w) s výřezem podél kladné reálné poloosy. Odpovídající si soustavy křivek při tomto zobrazení jsou zakresleny na obr. 16 a 20; zobrazení je konformní všude kromě bodů $z = 0$ a $z = \infty$*) (viz § 16).

Dolní polorovina $0 < r < \infty$, $\pi < \varphi < 2\pi$ se zobrazí též na celou rovinu (w) vyjma kladné reálné poloosy. Je tedy zobrazení (1) jednoznačné, ale nikoli už jedno-jednoznačné: každému bodu w kromě bodů $w = 0$ a $w = \infty$ odpovídají dva různé body z. Z této vlastnosti plynou některé důsledky, které nebyly možné pro jedno-jednoznačné zobrazení. Tak na př. neuzavřená křivka $|z| = 1$, $0 \leqq \varphi < \pi$ (půlkružnice) se zobrazí při zobrazení (1) na uzavřenou křivku $|w| = 1$.

*) Přesně řečeno, funkce $w = z^2$ není v bodě $z = \infty$ definována. Budeme definovat její hodnotu v tomto bodě jako $\lim_{z \to \infty} z^2 = \infty$.

Je však možno udat několik způsobů geometrického zobrazení bodů w, které vyhovují našemu zobrazení (1) tak, aby bylo možno interpretovat zobrazení (1) opět jako jedno-jednoznačné.

Vezmeme dvě roviny (w) (dva „listy") s vyňatými reálnými kladnými poloosami a budeme říkat, že prvý list (I) nese obrazy všech bodů horní poloroviny a list (II) obrazy všech bodů dolní poloroviny. Představíme si oba listy uloženy nad sebou tak, že body se stejnými souřadnicemi budou ležet právě nad sebou. Aby byla zachována spojitost funkce $w = z^2$ podél reálné záporné poloosy, „sklížíme" mezi sebou dolní okraj vyňaté poloosy v rovině (I) (t.j. obraz této poloosy při zobrazení horní poloroviny) a horní okraj této poloosy v rovině (II) (t. j. obraz této poloosy při zobrazení dolní poloroviny) tím, že přidáme (jeden) polopaprsek ležící nad kladnou poloosou u (obr. 29).



Obr. 29.

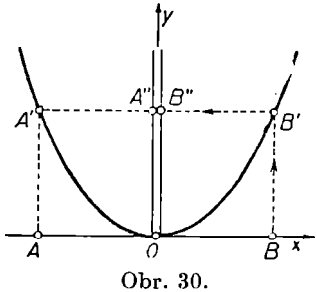
Zbývá zajistit spojitost zobrazení v bodech kladné poloosy x. K tomu stačí „sklížit" navzájem oba zbývající volné okraje vyňatých kladných reálných poloos rovin (I) a (II) pomocí polopaprsku ležícího nad osou u. Abychom zachovali jednoznačnost našeho zobrazení oběma směry, musíme ovšem tento polopaprsek odlišit od polopaprsku již dříve použitého ke sklížení okrajů obou vyňatých poloos, třebaže geometricky v důsledku své polohy v prostoru oba paprsky nutně spolu souhlasí (viz obr. 29). Pro naše úvahy budeme předpokládat, že jen oba konce obou paprsků ležící nad body $w = 0$ a $w = \infty$ se spolu ztotožňují.

Takto sestrojená dvoulistá plocha se nazývá Riemannovou plochou funkce $w = z^2$. Je rozprostřena nad celou rovinou (w) tak, že nad každým bodem w kromě bodu $w = 0$, resp. $w = \infty$, leží dva rozličné body Riemannovy plochy R patřící dvěma různým listům plochy.*) Jen nad body $w = 0$, resp. $w = \infty$, leží jen po jednom bodě plochy R. Jestliže nějaký bod oběhne kolem bodu $z = 0$ *jedenkrát* po kružnici $|z| = r$, pak zřejmě podle rovnice (2) jemu odpovídající bod w oběhne bod $w = 0$ po kružnici $|w| = \varrho$ právě dvakrát. Totéž platí pro bod

*) Body osy u netvoří výjimku, neboť jsme se umluvili, že body plochy R, které vzniknou při průniku plochy samé se sebou, budeme počítat jako různé.

$w = \infty$. To nás opravňuje k tomu, abychom body plochy R ležícími nad těmito dvěma body nazývali *body rozvětvení druhého řádu*. V těchto bodech, jak jsme již uvedli, jsou „sešity" oba listy Riemannovy plochy, t. j. oba tyto body patří současně oběma listům.

Podle naší konstrukce tedy funkce $w = z^2$ *zobrazuje spojitě a jedno-jednoznačně úplnou rovinu na příslušnou Riemannovu plochu*. Abychom vyjasnili naši konstrukci, budeme ještě studovat přiřazení bodů jednotkové kružnice K a jí odpovídající křivky K' na Riemannově ploše při našem zobrazení. Horní půlkružnice K (pro $0 < \varphi < \pi$) se zobrazí na kružnici $|w| = 1$ s vynětím bodu $w = 1$ ležícího na listě (I). Dolní půlkružnice K (pro $\pi < \varphi < 2\pi$) se zobrazí na podobnou kružnici na listě (II). Pak sklížíme křížem všechny čtyři volné konce našich kružnic, při čemž budeme opět pokládat oba body, kterými jsme doplnili naše kružnice, za různé, třebaže spolu zřejmě geometricky souhlasí. Výsledná křivka bez dvojných bodů K' bude ležet na obou listech Riemannovy plochy nad kružnicí $|w| = 1$ a bude spojitým a jedno-jednoznačným obrazem kružnice K (viz obr. 29).



Obr. 30.

Pro lepší porozumění pojmu Riemannovy plochy uveďme si ještě některé analogie. Reálný analogon funkce (1) je funkce $y = x^2$, která zobrazuje osu x na kladnou poloosu y. Toto zobrazení je jednoznačné, ale ne jedno-jednoznačné, neboť každá dvojice bodů A a B, jejichž x-ové souřadnice se liší pouze znaménkem, se zobrazí na jeden a tentýž bod, totiž bod $A'' = B''$ (obr. 30).

Můžeme tedy vzít dvě kladné poloosy y, slepit je navzájem v bodech, $y = 0$ a $y = \infty$ a považovat bod A'' za ležící na jedné z nich a bod A'' na druhé z nich. Tím jsme sestrojili analogon Riemannovy plochy funkce $w = z^2$ a naše funkce $y = x^2$ nám teď zobrazuje vzájemně jedno-jednoznačně osu x na kladnou (dvakrát počítanou) poloosu y.

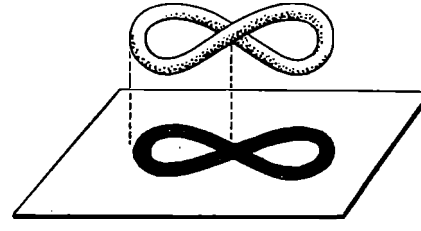
Geometrický význam zobrazení $y = x^2$ se stane ihned názornější, sestrojíme-li v rovině (x, y) parabolu $y = x^2$ a budeme-li konstruovat bod A'' jako postupnou dvojnásobnou projekci nejprve A v A', pak A' v A'' (obr. 30). Dvojnásobnou poloosu y můžeme nyní považovat

za projekci naší paraboly nebo, chceme-li, za její jednorozměrný model. Analogickou úvahu můžeme provést i pro funkci komplexní proměnné $w = z^2$. Rovnice $w = z^2$ je ekvivalentní dvěma reálným rovnicím

$$u = x^2 - y^2, \quad v = 2xy, \tag{4}$$

které ve čtyřrozměrném prostoru*) (x, y, u, v) definují jistou dvourozměrnou plochu. Tato dvourozměrná plocha nemůže být vnořena (přenesena) do trojrozměrného prostoru, podobně jako parabola $y = x^2$ nemohla být vnořena (přenesena) na osu y. Proto se při jejím studiu omezíme na její projekci na rovinu (u, v) čtyrrozměrného prostoru, která je shodná s rovinou $w = u + iv$. Výsledkem této projekce je pak Riemannova plocha funkce $w = z^2$, která se skládá z rovin (podobně jako projekce paraboly z přímek, t. j. os y).

Naše analogie objasňuje i to, proč nebereme v úvahu násobné body Riemannovy plochy, t. j. body, v nichž se protíná sama se sebou. Takové body se mohou vyskytnout při studiu promítaných geometrických obrazů. Pokládáme-li na př. křivku mající podobu osmičky v rovině (na př. lemniskatu) za průmět prostorové smyčky, tak jak je to znázorněno v obr. 31, nebudeme jistě brát v úvahu její násobné body (t. j. oné rovinné křivky).



Obr. 31.

Úplně obdobnými vlastnostmi se vyznačuje i funkce

$$w = z^n \tag{5}$$

pro libovolné celistvé a kladné n (pro $z = \infty$ definujeme $w = \infty$). Vztah (5) přechází v polárních souřadnicích ve dvě rovnice mezi reálnými proměnnými r, ϱ, resp. φ, ψ:

$$\varrho = r^n, \quad \psi = n\varphi. \tag{6}$$

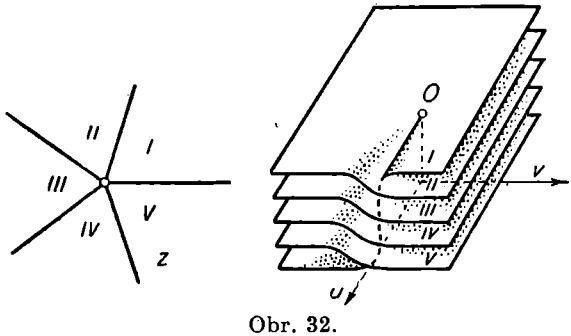
Jejich geometrický význam je zřejmý.

*) V tomto prostoru jsou čtyři osy x, y, u, v. Každý pár těchto os určuje jednu souřadnou rovinu. Existuje tedy šest souřadných rovin. Jsou to roviny: (x, y), (x, u), (x, v), (y, u), (y, v), (u, v).

Aby zobrazení (5) bylo jedno-jednoznačné v oblasti D, je nutné a stačí, aby oblast D neobsahovala body, které mají tentýž modul a argumenty lišící se o násobek $\frac{2\pi}{n}$, neboť jen takové body mají při zobrazení (5) tentýž obraz. Speciálně je (5) jedno-jednoznačné v každém z n sektorů

$$\frac{2\pi}{n} k < \varphi < \frac{2\pi}{n} (k + 1), \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n - 1,$$

které se zobrazením (5) zobrazí na celou rovinu w s vyňatou kladnou reálnou poloosou. Vezmeme tedy n takových rovin, navrstvíme je na sebe a sklížíme pomocí polopaprsků ležících nad kladnou reálnou osou u jako na obr. 32 pro $n = 5$. Tyto paprsky budeme pokládat za různé a spojené pouze ve svých koncích ležících nad body $w = 0$ a $w = \infty$. Takto sestrojená n-listá plocha se nazývá *Riemannova plocha* funkce $w = z^n$.



Obr. 32.

Jak je vidět z rovnic (6), oběhne-li bod z po kružnici $|z| = r$ bod $z = 0$ jedenkrát, oběhne jemu odpovídající bod w bod $w = 0$ po kružnici $|w| = \varrho$ n-krát. Totéž platí i o bodu $w = \infty$. Proto nazveme body ležící nad bodem $w = 0$ a $w = \infty$ *body rozvětvení n-tého řádu.*

Funkce $w = z^n$ pak zprostředkuje jedno-jednoznačné spojité zobrazení úplné roviny (z) na Riemannovu plochu R. Jako zobrazení (1) je i zobrazení (5) konformní všude kromě bodů $z = 0$ a $z = \infty$, kde násobí úhly právě n-krát.

§ 25. Pojem regulární větve funkce. Funkce $w = \sqrt[n]{z}$. Definice. Regulární funkce $f(z)$ se nazývá v oblasti Γ *regulární větví* mnohoznačné funkce $F(z)$ v této oblasti, jestliže v každém bodě z této oblasti jsou

hodnoty funkce $f(z)$ shodny s některou z hodnot funkce $F(z)$ v tomto bodě. Vezměme si na příklad funkci

$$w = \sqrt{z}, \tag{7}$$

která je inversní k funkci $z = w^2$. Zprostředkuje jednoznačné zobrazení dvouliste Riemannovy plochy R nad rovinou (z) s body rozvětvení nad body $z = 0$ a $z = \infty$ na úplnou rovinu (w). To si snadno ověříme takto: ze dvou hodnot $\sqrt{z}$ jednu z nich (na př. pro $y \neq 0$ tu z nich, která leží v horní polorovině (w)) budeme považovat za odpovídající bodu z listu (I) Riemannovy plochy R a druhou z nich (t. j. tu, která leží v dolní polorovině (w)) budeme považovat za odpovídající bodu z listu (II) Riemannovy plochy R. Při tom samozřejmě oba tyto body z listu (I) i (II) leží nad bodem z roviny (z). Bodům $z = 0$ a $z = \infty$, nad kterými leží jen po jednom bodě Riemannovy plochy, bude podle (7) odpovídat též jen po jednom bodu w. K těmto hodnotám se blíží obě hodnoty funkce $\sqrt{z}$, když se z blíží k 0 resp. ∞, Bod $z = 0$ resp. $z = \infty$ se nazývá *bodem rozvětvení*.

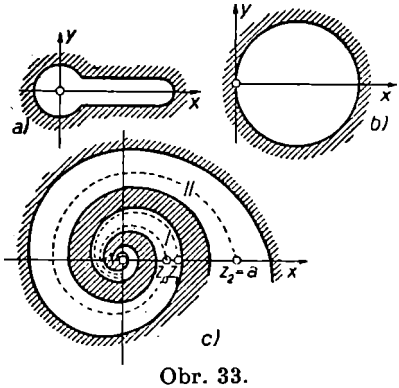
Jakým podmínkám musí vyhovovat oblast D roviny z, aby v ní existovala regulární větev naší funkce $\sqrt{z}$? Dokážeme si, že geometricky tyto podmínky znamenají možnost rozprostření oblasti D bez jakýchkoliv výřezů (t. j. bez vyloučení kteréhokoliv bodu) na Riemannovu plochu R tak, aniž by se dotýkala bodů rozvětvení plochy R. Oblast se může přitom rozprostírat celá na jednom či druhém listě Riemannovy plochy nebo může přecházet z jednoho listu na druhý (asi tak jako koberec po schodech). Tak ku příkladu mezikruží $1 < |z| < 2$ zřejmě není možno rozprostřít bez výřezů na naši plochu, ale lze již tak učiniti s tímtéž mezikružím s výřezem podél poloměru.

Zřejmě, je-li oblast D rozprostřena uvedeným způsobem po naší ploše, pak lze definovat $\sqrt{z}$ pro hodnoty z oblasti D jako spojitou a jednoznačnou funkci. Hodnota této funkce v libovolném bodě oblasti je pak jednoznačně definována poukazem na to, v kterém listě Riemannovy plochy R tento bod leží. Podle věty o derivaci inversní funkce existuje pak v každém bodě z plně definovaná derivace naší funkce

$$\frac{dw}{dz} = \frac{1}{2w} = \frac{1}{2\sqrt{z}},$$

kde $\sqrt{z}$ je ta hodnota z rovnice (7), která je přiřazena bodu z. Je tedy takto sestrojená funkce regulární v oblasti D a je zřejmě regulární větví funkce $\sqrt{z}$.

Ku př. v mezikruží $1 < |z| < 2$ s výřezem podél poloměru je možné sestrojit regulární větev $\sqrt{z}$. Na různých krajích výřezu bude tato větev nabývat různých hodnot (lišících se co do znaménka). V úplném mezikruží $1 < |z| < 2$ nemá funkce $\sqrt{z}$ regulárních větví. V oblasti narýsované na obr. 33a nebude mít $\sqrt{z}$ též regulární větve, neboť tato oblast obsahuje bod rozvětvení naší funkce. V oblastech b) a c) téhož obr. budou regulární větve existovat, neboť body rozvětvení leží na hranici a nikoli uvnitř uvažované oblasti.



Obr. 33.

Jestliže oblast dovoluje spojité rozprostření po Riemannově ploše R, je toto rozprostření možné dvěma způsoby. Tak na př. kruh z obr. 33b je možno rozprostřít buď tak, že nejprve umístíme vrchní půlkruh na list (I) a dolní na list (II) anebo naopak: horní půlkruh umístíme na list (II) a dolní na list (I). Těmto dvěma způsobům rozprostření odpovídají dvě různé regulární větve funkce $\sqrt{z}$ v této oblasti, lišící se navzájem pouze znaménkem.

Poznamenejme k tomu, že zařazení bodu z do toho či onoho listu je určeno tím, jaká hodnota argumentu mu patří, neboť hodnota argumentu z definuje hodnotu $\sqrt{z}$. Je tedy možnost sestrojení regulární větve funkce $\sqrt{z}$ v oblasti nerozlučně spojena s regularitou a jednoznačností funkce Arg z v této oblasti.

Objasněme si tuto úlohu na příkladě oblasti z obr. 33c. Nejprve budeme v daném bodě, na příklad $z_0 = 1$, fixovati libovolnou hodnotu argumentu, budiž $\varphi_0 = 0$. Pak hodnota kořene $(\sqrt{z_0})_0 = +\sqrt{1} = 1$. Budeme nyní spojitě měnit z po cestě (I) zobrazené v obr. 33c. Pak bude hodnota arg z vzrůstat od 0 do hodnot větších než π a potom opět klesat k nule. Zřejmě i hodnoty $\sqrt{z}$ se budou spojitě měnit, při čemž v každém bodě budeme mít plně definovanou hodnotu kořene.

Protože pak v bodě z_1 bude hodnota $\arg z$ rovna nule, bude hodnota kořene $\sqrt{z_1}$ opět kladná. Naproti tomu půjdeme-li cestou (*II*), hodnoty $\arg z$*) budou ubývat od hodnoty 0 do -2π, a proto z výchozího bodu, kde bylo $\sqrt{z_0} = 1$, přijdeme do bodu, kde bude hodnota odmocniny záporná

$$\sqrt{ae^{-2\pi i}} = e^{-\pi i}\sqrt{a} = -\sqrt{a}.$$

Uvažujme ještě rovinu z s výřezem podél kladné reálné poloosy. Tuto oblast je možno dvojím způsobem rozprostřít na Riemannovu plochu $w = \sqrt{z}$ a každému z těchto rozprostření odpovídá jedna regulární větev funkce. Vezměme větev $\sqrt{z}$ regulární v této oblasti a zobrazující ji na horní polorovinu (k tomu stačí počítat argumenty z od 0 do 2π). Jak vypadá obraz tohoto zobrazení? Ze $z = w^2$ máme

$$x = u^2 - v^2, \quad y = 2uv.$$

Položíme v těchto rovnicích $u = \alpha$ a vyloučíme v; potom položíme $v = \beta$ a vyloučíme u a dostaneme síť konformně ekvivalentní síti kartézských souřadnic v rovině w:

$$x = \alpha^2 - \frac{y^2}{4\alpha^2}, \quad x = \frac{y^2}{4\beta^2} - \beta^2.$$

Skládá se z parabol, jejichž osy jsou totožné s osou x (viz obr. 76).

Pro celá kladná n má funkce $\sqrt[n]{z}$ vlastnosti zcela obdobné vlastnostem funkce $\sqrt{z}$. Je jednoznačná na odpovídající n-listé Riemannově ploše nad rovinou (z) a zobrazí ji na úplnou rovinu (w). Představuje příklad t. zv. *mnohoznačné analytické funkce* (viz dále § 63). Dovoluje konstrukci jednoznačných regulárních větví v libovolné oblasti D, v níž je možno konstruovat jednoznačně větev funkce $\operatorname{Arg} z$.

Jako další příklad mnohoznačné funkce uveďme funkci

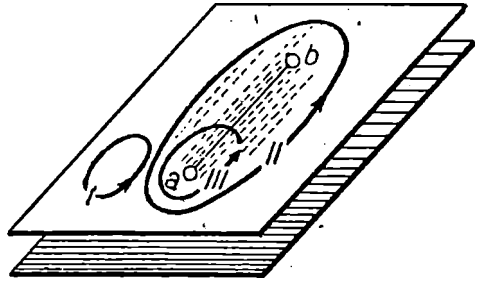
$$w = \sqrt{(z-a)(z-b)}. \tag{8}$$

Položíme $z - a = r_1 e^{i\varphi_1}$, $z - b = r_2 e^{i\varphi_2}$ a dostaneme

$$w = \sqrt{r_1 r_2}\, e^{\frac{1}{2}i(\varphi_1+\varphi_2)}.$$

*) Zde se uchýlíme od dohody § 2 — $\arg z$ označuje hodnotu větve argumentu odlišné od hlavní hodnoty.

Vezmeme dvě roviny (z) s výřezy podél úsečky $\langle a, b\rangle$. V každé z těchto rovin je možná konstrukce regulární větve funkce (8). Důkaz. Při proběhnutí cesty (I), uvnitř které neleží žádný z bodů a, b, vrací se argumenty φ_1 a φ_2 k původní hodnotě. Při proběhnutí cesty (II), uvnitř které leží oba body a, b, se každý z argumentů zvětší o 2π a tedy i $\frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2)$ se zvětší o 2π a w nabude opět původní hodnoty. Cesta typu (III), která by jediná umožňovala změnu hodnoty w, není možná pro existenci výřezu $\langle a, b\rangle$.



Obr. 34.

Slepíme nyní obě roviny pomocí dvou úseček $\langle a, b\rangle$, které budeme kromě okrajových bodů považovat za různé, třebaže jsou zřejmě geometricky totožné. Takto vzniklou plochu nazveme opět Riemannovou plochou funkce $w = \sqrt{(z-a)(z-b)}$. Je zřejmě dvoulistá s dvěma body rozvětvení druhého řádu nad body $z = a$ a $z = b$.*) Funkce (8) je jednoznačná a spojitá na této ploše a zobrazí ji na úplnou rovinu (w). Toto zobrazení není jedno-jednoznačné, protože funkce $z = \frac{1}{2}(a+b) + \sqrt{\left(\frac{a-b}{2}\right)^2 + w^2}$ která je inversní k (8), je dvouznačná na rovině w.

§ 26. Funkce $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ a její Riemannova plocha. Stanovme podmínky jedno-jednoznačnosti zobrazení

$$w = \tfrac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right). \qquad (9)$$

*) Nad bodem $z = \infty$ nejsou listy Riemannovy plochy spojeny, třebaže obě hodnoty funkce (8) jsou v tomto bodě sobě rovny a rovnají se ∞. To si objasníme snadno sledováním chování funkce (8) v okolí bodu $z = \infty$. *Jednomu* oběhu kol dokola bodu $z = \infty$ po kontuře (II) odpovídá *jediný* oběh bodu $w = \infty$ a naopak. Doporučujeme čtenáři, aby se sám o tom přesvědčil.

Rovnici

$$z_1 + \frac{1}{z_1} = z_2 + \frac{1}{z_2}$$

přepišme do tvaru

$$(z_1 - z_2)\left(1 - \frac{1}{z_1 z_2}\right) = 0.$$

Z toho plyne, že pro $z_1 \neq z_2$, $z_1 z_2 = 1$, t. j. zobrazení (9), zobrazí do jediného bodu ty a jen ty body z_1, z_2, pro které platí

$$z_1 z_2 = 1. \tag{10}$$

Pro jedno-jednoznačnost našeho zobrazení (9) tedy stačí a je nutné, aby oblast D neobsahovala žádné body vyhovující rovnici (10). Takové oblasti jsou na př. vnitřek nebo vnějšek jednotkové kružnice.

Pro objasnění geometrického obrazu našeho zobrazení položíme $z = re^{i\varphi}$, $w = u + iv$ a (9) přejde ve dvojici rovnic mezi reálnými proměnnými

$$u = \tfrac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\varphi, \quad v = \tfrac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right)\sin\varphi. \tag{11}$$

Z (11) plyne, že kružnice $|z| = r < 1$ přejdou při zobrazení (9) v elipsy s poloosami

$$a_r = \tfrac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right); \quad b_r = -\tfrac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right),$$

jejichž ohniska jsou v bodech $(\pm 1, 0)$. Protože pro $r < 1$ je $r - \frac{1}{r}$ záporné, plyne z (11), že se zobrazením mění smysl oběhu. Pro $r \to 0$ poloosy $a_r \to \infty$, $b_r \to \infty$, při čemž $a_r - b_r = r \to 0$; vidíme, že naše elipsy se zvětšují a postupně se zaokrouhlují. Pro $r \to 1$ — poloosy $a_r \to 1$, $b_r \to 1$ a naše elipsy se tedy postupně smršťují v úsečku $\langle -1, 1\rangle$ osy u. *Zobrazení (9) zobrazuje vzájemně jednoznačně kruh $|z| < 1$ na vnějšek úsečky $\langle -1, 1\rangle$ reálné osy u.*

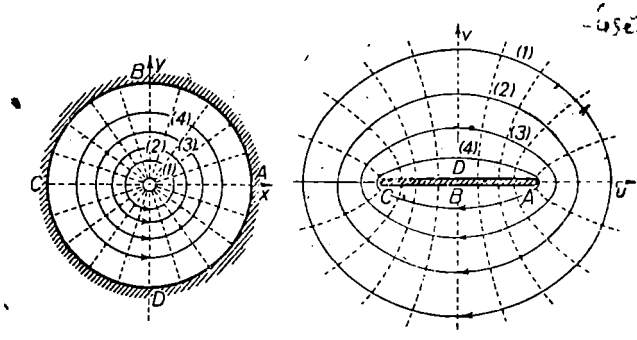
Kružnici $|z| = 1$ odpovídá dvojnásob počítaná úsečka $\langle -1, 1\rangle$, při čemž body -1 a $+1$ jsou samodružné (to plyne z (9)), a to tak, že vrchní půlkružnice se zobrazí na dolní část úsečky (plyne z (11) pro $r \to 1$ — a $\varphi \to \frac{1}{2}\pi$) a dolní půlkružnice se zobrazí na svrchní část

úsečky (plyne stejným způsobem z (11)). Vzájemné přiřazení bodů kružnice a roviny je zakresleno v obr. 35.

Svazek přímek $\arg z = \varphi$ ortogonálních ke kružnicím $|z| = r$ přejde, jak je vidět z rovnic (11) vyloučíme-li r:

$$\frac{u^2}{\cos^2\varphi} - \frac{v^2}{\sin^2\varphi} = 1,$$

ve svazek hyperbol orthogonálních k našim elipsám a majících tatáž ohniska $(\pm 1, 0)$ (čárkované na obr. 35).



Obr. 35.

Z rovnic (11) plyne ještě, že kružnice $|z| = r > 1$ se zobrazí zobrazením (9) na elipsy s poloosami

$$a_r = \tfrac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right), \quad b_r = \tfrac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right),$$

t. j. v tytéž elipsy jako výše, jenomže tentokrát se smysl oběhu nemění. Pro $r \to 1 +$ je $a_r \to 0$, $b_r \to 0$ a elipsy se tedy smršťují v úsečku $\langle -1, 1\rangle$. Pro $r \to \infty$ je $a_r \to \infty$ $b_r \to \infty$, při čemž $a_r - b_r = \frac{1}{r} \to 0$ a elipsy se postupně zvětšují a zaokrouhlují. *Zobrazí se tedy zobrazením* (9) *vnějšek kruhu jedno-jednoznačně na vnějšek úsečky* $\langle -1, 1\rangle$. Kružnice $|z| = 1$ se zobrazí opět na úsečku $\langle -1, 1\rangle$ dvakrát počítanou, ale horní půlkružnice se nyní zobrazí na horní okraj úsečky a dolní půlkružnice na dolní okraj.

Z výše uvedeného plyne, že obrazem úplné roviny (z) jsou dva listy

roviny (w) s výřezem podél úsečky $\langle -1, 1\rangle$, slepené podél této úsečky křížem. Takto sestrojená plocha s body rozvětvení nad body $w = \pm 1$ je Riemannovou plochou funkce $w = \frac{1}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right)$. Geometricky se ničím neliší od Riemannovy plochy z obr. 34.

Inversní funkce k funkci (9)

$$z = w + \sqrt{w^2 + 1} \tag{12}$$

je jednoznačná na zkonstruované Riemannově ploše; různé hodnoty, jichž nabývá v bodě w, vztahujeme k dvěma rozličným bodům Riemannovy plochy, ležícím nad bodem w roviny (w). Způsob konstrukce regulární funkce je zcela obdobný konstrukcím v předešlých případech.

Funkce (12) má dvě regulární větve (navzájem různé) vně úsečky $\langle -1, 1\rangle$ reálné osy u. Jedna z nich zobrazí vnějšek této úsečky na vnějšek, druhá tutéž oblast na vnitřek jednotkového kruhu roviny (z).

Poznamenejme jen, že tyto větve nelze tentokrát charakterisovat znaménkem kořene. Tak na př. ona regulární větev, která zobrazí vnějšek úsečky na vnějšek kruhu, má pro $w = 2$ hodnotu $2 + \sqrt{3}$ a pro $w = -2$ hodnotu $-(2 + \sqrt{3})$.

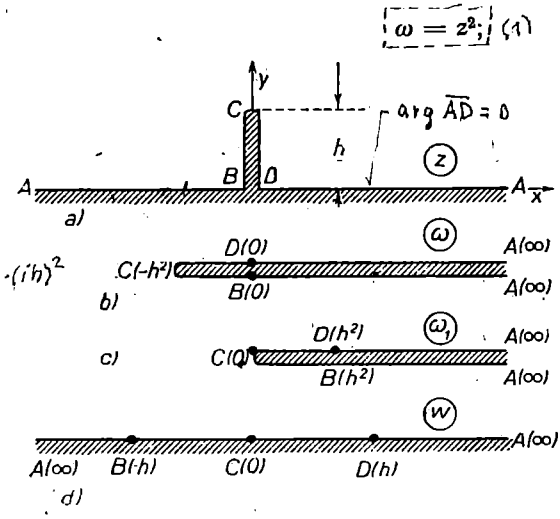
Obě zobrazení jsou jedno-jednoznačná a konformní všude vně úsečky $\langle -1, 1\rangle$. Sítě konformně ekvivalentních sdružených funkcí jsou nakresleny v obr. 35, kde vidíme, že síť konformně ekvivalentní síti polárních souřadnic je tvořena svazkem konfokálních elips a hyperbol.

§ 27. Příklady. Vlastností elementárních funkcí odvozených výše můžeme použít k řešení *úloh* o *konformním zobrazení*. Cílem takových úloh je konstrukce jedno-jednoznačného zobrazení zobrazujícího danou jednoduše souvislou oblast na kanonickou oblast (t. j. jednotkový kruh nebo půlrovinu). Jak uvidíme v další kapitole, mají úlohy tohoto druhu velký praktický význam.

Podle základní věty v § 23 má každá taková úloha v případě jednoduše souvislé oblasti nekonečně mnoho řešení (závisících na třech reálných parametrech). Její obecné řešení ovšem nelze vyjádřit elementárními funkcemi. Ukážeme si nyní řadu příkladů oblastí, kde je hledané konformní zobrazení řešitelné pomocí elementárních funkcí.

Příklad 1. Hledejme jednoznačné konformní zobrazení horní poloroviny s výřezem velikosti h podél imaginární osy od počátku směrem do horní poloroviny (obr. 36a). Úloha spočívá v tom, abychom tak říkajíc „ubrali" výřez a narovnali jej v část reálné osy. Abychom likvidovali úhly v bodech B a D hranice, je přirozené použít zobrazení

$$\omega = z^2; \quad (1)$$



Obr. 36.

při tom mají pravé úhly ADC, resp. ABC, přejít v úhly velikosti π, t. j. vyrovnat se. Zobrazení $\omega = z^2$ je v naší oblasti jednojednoznačné a tato operace je tedy možná. Při tomto zobrazení přejde paprsek AD (pro jehož body je argument roven nule) sám v sebe; úsečka DC (pro jejíž body je argument roven $\frac{1}{2}\pi$) přejde v úsečku na záporné reálné poloose od O do $-h^2$ (pro $z = ih$, $\omega = -h^2$); úsečka CB přejde ve spodní okraj úsečky na záporné poloose a paprsek BA (pro jehož body je $\arg z = \pi$) ve spodní okraj reálné kladné poloosy. Oblast roviny z ležela při oběhu kontury $ABCDA$ stále vlevo a bude tedy ležet vlevo i odpovídající oblast v rovině (ω) při oběhu kontury odpovídající kontuře $ABCDA$. Vidíme tedy, že odpovídající oblastí je rovina (ω) s výřezem podél reálné osy: $\operatorname{Im}\omega = 0$, $\operatorname{Re}\omega \geqq -h^2$ (obr. 36b). Posuneme si nyní počátek výřezu do počátku souřadnic transformací

$$\omega_1 = \omega + h^2. \quad (2)$$

Body B a D přejdou v body B a D reálné kladné poloosy roviny (ω_1) s úsečkami $+h^2$ (obr. 36c). V naší oblasti je možno konstruovat jednoznačnou větev funkce

$$w = \sqrt{\omega_1}. \quad (3)$$

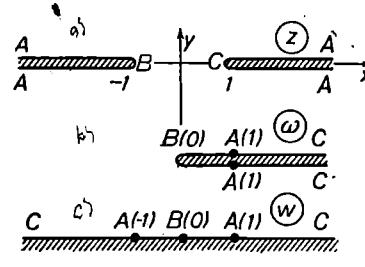
Při konstrukci budeme počítat argumenty bodů oblasti v intervalu od 0 do 2π. Funkce $w = \sqrt{\omega_1}$ zmenšuje úhly dvakrát a oblasti roviny (ω_1) odpovídá zřejmě horní polorovina (obr. 36d) a bodům A, B, C, D body ∞, $+h$, 0, $-h$ v témže pořádku.

Funkce zprostředkující konformní zobrazení dané oblasti na polorovinu má tedy tvar

$$(z) \to w = \sqrt{\omega_1} = \sqrt{\omega + h^2} = \sqrt{z^2 + h^2}. \tag{13}$$

Příklad 2. Hledejme konformní zobrazení roviny (z) s dvěma výřezy $-\infty \leq x \leq -1$ a $1 \leq x \leq \infty$ podél reálné osy na vrchní polorovinu. (Na kouli komplexních čísel se oba výřezy zřejmě stýkají v bodě ∞ a oblast je tedy jednoduše souvislá). Lineární lomenou funkcí zobrazíme bod B do bodu O a bod C do bodu ∞:

$$\omega = \frac{z+1}{z-1}. \tag{14}$$



Obr. 37.

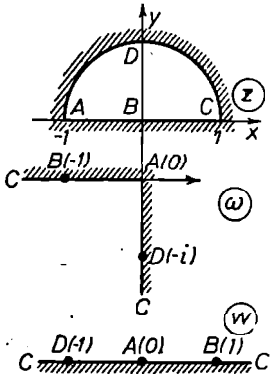
Našim dvěma výřezům odpovídá nyní jediný polopaprsek spojující O s ∞ (viz obr. 37a,b). Protože (14) má pouze reálné koeficienty, odpovídají dosazení reálných z reálná ω a výše zmíněný polopaprsek může být buď kladná nebo záporná reálná poloosa. Bod $z = \infty$ přechází v bod $\omega = 1$, musí tedy ležet bod $\omega = 1$ na výřezu a výřez je tedy tvořen kladnou poloosou. Nyní stačí jen odmocnit dvěma a máme hledané zobrazení

$$w = \sqrt{\omega} = \sqrt{\frac{z+1}{z-1}}. \tag{15}$$

Příklad 3. Hledejme konformní zobrazení půlkruhu $|z| < 1$, $\operatorname{Im} z > 0$ na horní polorovinu (obr. 38). Pomocí lineární lomené funkce můžeme zobrazit půlkružnici na polopřímku tak, že průměr zůstává

ležet na jisté přímce. K tomu stačí zobrazit jeden z konců průměru na bod ∞ *). To zprostředkuje na př. funkce

$$\omega = \frac{z+1}{z-1}.$$



Obr. 38.

Průměr AC se při tom zobrazí na tu reálnou poloosu, která obsahuje obraz bodu $z = 0$, t. j. bod $\omega = -1$, tedy na zápornou poloosu (viz předcházející př.). Půlkružnice se zobrazí též na poloosu $O\infty$, a to na tu, která je kolmá na obraz průměru (zobrazení je konformní!) a obsahuje obraz bodu $z = \mathrm{i}$, t. j. bod $\omega = \frac{\mathrm{i}+1}{\mathrm{i}-1} = -\mathrm{i}$, tedy na zápornou imaginární poloosu. Oblast v rovině ω musí ležet vlevo od kontury ABC a je to tedy zřejmě celý třetí kvadrant $\pi < \arg\omega < \frac{3}{2}\pi$. Zbývá jen aplikovat ještě zobrazení $w = \omega^2$, při němž se argument mění v intervalu od 2π do 3π; obrazem našeho kvadrantu bude zřejmě horní polorovina. Máme tedy výsledek

$$w = \omega^2 = \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2. \tag{16}$$

Mohli bychom též zjistit přímo a najednou, že zobrazení

$$w = \tfrac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$$

zobrazuje náš půlkruh na dolní polorovinu a zobrazení

$$w = -\tfrac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) \tag{17}$$

je tedy také řešením naší úlohy. Odpovídající dvojice bodů budou ovšem pro oba případy různé. Tak pro zobrazení (17) máme: $A \longleftrightarrow 1$, $B \longleftrightarrow \infty$, $C \longleftrightarrow -1$, $D \longleftrightarrow 0$ a pro případ (16): $A \longleftrightarrow 0$, $B \longleftrightarrow 1$,

*) Jestliže zobrazíme na nekonečně vzdálený bod některý z bodů půlkružnice, který neleží na reálné ose, nebude obraz reálné osy obsahovat nekonečně vzdálený bod, t. j. bude kružnicí a nikoli přímkou.

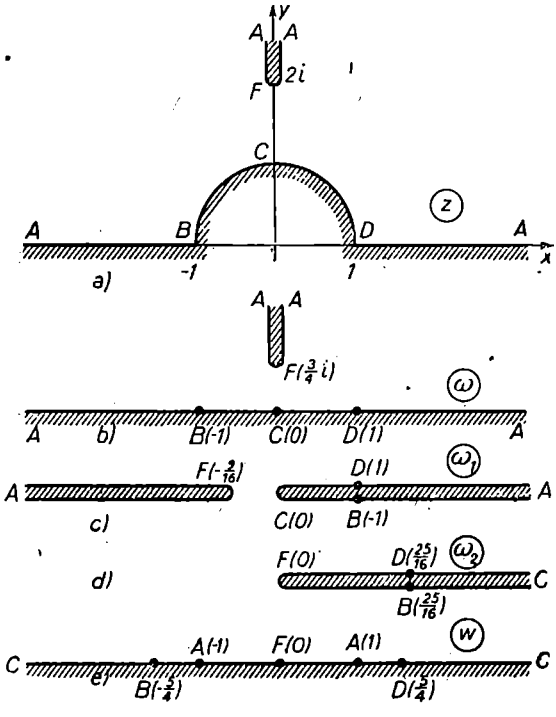
$C \longleftrightarrow \infty$, $D \longleftrightarrow -1$. Konstruujme ještě doplňující zobrazení poloroviny $\operatorname{Im} w > 0$ na polorovinu $\operatorname{Im} W > 0$ převádějící body $w = 0, 1, \infty$ v body $W = 1, \infty, -1$ v tomtéž pořádku. (Vzorec odvodíme podle (21) kap. II):

$$W = \frac{1 + w}{1 - w}.$$

Dosadíme (16) a máme

$$W = \frac{1 + \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2}{1 - \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2} = \mp -\tfrac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right).$$

Vidíme, že ve shodě s větou § 23 zobrazení (16) a (17) se dají navzájem převést pomocí lineární lomené funkce.



Obr. 39.

Příklad 4. Z horní poloroviny vyjmeme vnitřek jednotkové kružnice a výřez podél imaginární osy $y > 2$, $x = 0$. Hledejme zobrazení této oblasti na horní půlrovinu. Použijeme-li zobrazení

$$\omega = \tfrac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$$

(které je jedno-jednoznačné v naší oblasti), zobrazíme půlkružnici na úsečku do reálné osy, aniž tím principiálně změníme ostatní části hranice oblasti (viz obr. 39a,b). Funkce

$$\omega_1 = \omega^2$$

zobrazí tuto oblast na rovinu s dvěma výřezy (obr. 39c). Zobrazením

$$\omega_2 = \frac{1}{\omega_1}\left(\omega_1 + \frac{9}{16}\right) = 1 + \frac{9}{16\omega_1}$$

převedeme naši oblast v rovinu s výřezem podél kladné reálné poloosy. Zbývá jen provést zobrazení

$$w = \sqrt{w_2}.$$

Hledané zobrazení je pak superposicí všech dílčích zobrazení a má tvar

$$w = \frac{\sqrt{4z^2 + 17z^2 + 4}}{2(z^2 + 1)}, \tag{18}$$

čímž je naše úloha vyřešena.

§ 28. Profil Žukovského. Příklad, který zde uvádíme, má velkou důležitost v theorii křídla letadla. Hledejme konformní zobrazení vnějšku oblouku $\widehat{AB}$ jisté kružnice na vnějšek oblouku kružnice C (obr. 40). Pomocí lineární lomené funkce

$$\zeta = \frac{z - 2}{z + 2} \tag{19}$$

zobrazíme vnějšek oblouku $\widehat{AB}$ roviny (z) na vnějšek polopřímky AB v rovině (ζ). Je

$$\left(\frac{d\zeta}{dz}\right)_{z=2} > 0$$

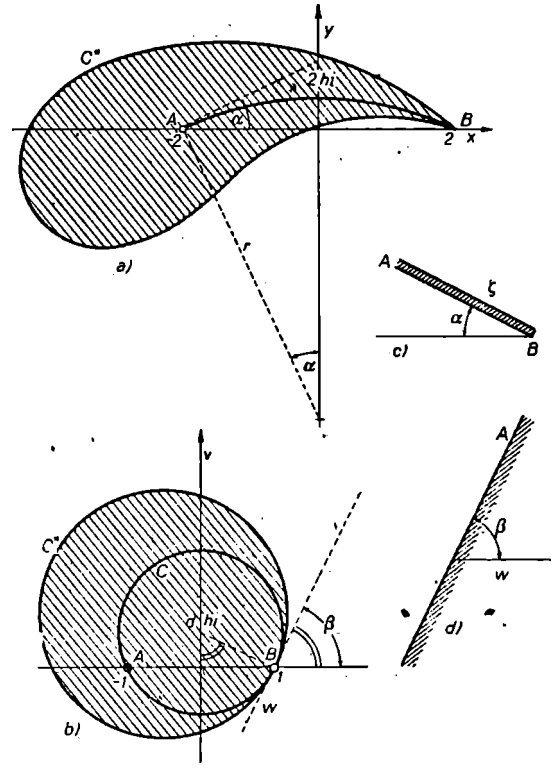
a sklon polopřímky, měřeno od záporné poloosy, je

$$\alpha = 2 \operatorname{arctg} h.$$

Z obr. 40a plyne: $\sin\alpha = \frac{2}{r}$; $\cos\alpha = \frac{r - 2h}{r} = 1 - h\sin\alpha$, kde r je poloměr oblouku $\widehat{AB}$ a tedy $h = \frac{1 - \cos\alpha}{\sin\alpha} = \operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha$. Dále místo toho, abychom hledali zobrazení naší nové oblasti na vnějšek oblouku

kruhu C, budeme se snažit najít inversní zobrazení vnějšku kruhu na naši oblast. K tomu účelu opět použijeme lineární lomené funkce

$$\omega = \frac{w - 1}{w + 1}.$$



Obr. 40.

Přitom C přejde v přímku, která — protože $\left(\frac{d\omega}{dw}\right)_{\omega=1} = > 0$ — bude s kladnou poloosou svírat úhel $\beta = \frac{1}{2}\pi - \operatorname{arctg} h$ (obr. 40b, odtud $\operatorname{cotg}\beta = h$) a vnějšek kruhu přejde v polorovinu ohraničenou touto přímkou. Zobrazení

$$\zeta = \omega^2 = \left(\frac{w-1}{w+1}\right)^2 \tag{20}$$

zobrazí tuto polorovinu na vnějšek polopřímky svírající s kladnou poloosou úhel $2\beta = \pi - 2 \operatorname{arctg} h = \pi - \alpha$. Tímto způsobem dosáhneme toho, že obě polopřímky jsou shodné (obr. 40c). Vyloučením ζ z rovnic (19) a (20) dostáváme hledané zobrazení

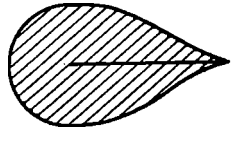
$$\left(\frac{w-1}{w+1}\right)^2 = \frac{z-2}{z+2}$$

a z poslední rovnice

$$z = w + \frac{1}{w}, \quad w = \tfrac{1}{2}(z + \sqrt{z^2 - 4}). \tag{21}$$

Sestrojíme nejprve v rovině (w) kružnici C^* dotýkající se kružnice C v bodě $w = 1$, Zobrazení (21) ji převede v jistou uzavřenou křivku $^*C$ roviny (z), v jejímž vnitřku bude ležet oblouk $\overset{\frown}{AB}$. Křivka se dotýká oblouku v bodě $z = 2$ a má tam tedy bod zvratu (obr. 40a). Křivka $^*C$ připomíná svým tvarem profil křídla.

Právě popsaná methoda zkoumání profilu křídel pochází od znamenitého ruského vědce N. J. Žukovského. Profil získaný tímto způsobem se nazývá *profil Žukovského* a jeho výpočet je velmi prostý.



Obr. 41.

Nikolaj Jegorovič Žukovskij (1847—1921) první použil v širokém měřítku methody konformního zobrazení v hydro- a aeromechanice. Jeho práce byly základem theorie vzduchoplavby.

Tvar uvedených profilů Žukovského závisí na dvou parametrech: h — který charakterisuje *prohnutí* křídla a d — který je vzdáleností středů kružnice C a C^* a charakterisuje *tloušťku* křídla.

V speciálním případě pro $h = 0$ je profil symetrický podle osy (obr. 41).

§ 29. Exponenciální funkce a její Riemannova plocha. Exponenciální funkci komplexní proměnné budeme definovat vztahem

$$w = e^z = e^x \cos y + i e^x \sin y = e^x (\cos y + i \sin y). \tag{22}$$

Ve speciálním případě dostaneme pro $x = 0$ známý Eulerův vzorec

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y,$$

který můžeme považovat za definici ryze imaginární mocniny čísla e (viz § 2). Pro reálná $z = x$ funkce (22) je totožná s obyčejnou exponenciální funkcí reálné proměnné. Pro komplexní hodnoty z má všechny vlastnosti této reálné exponenciální funkce. Tak na př.

$$\begin{aligned} e^{z_1}e^{z_2} &= e^{x_1}(\cos y_1 + i \sin y_1)\, e^{x_2}(\cos y_2 + i \sin y_2) = \\ &= e^{x_1+x_2}[\cos(y_1 + y_2) + i \sin(y_1 + y_2)] = e^{z_1+z_2} \end{aligned} \tag{23}$$

nebo

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = e^z \tag{24}$$

(viz př. 3a ke kap. I.). To ověřuje naši definici (22).

Zbývá ukázat, že funkce e^z má ještě některé nové vlastnosti. Tak na př. že je *periodická s imaginární periodou* $2\pi i$, *neboť zřejmě pro* libovolné k celé plyne ze vzorce (23)

$$e^{z+2k\pi i} = e^z \,.\, e^{2k\pi i} = e^z.$$

Funkce e^z je též *regulární v celé otevřené rovině*, neboť z (22) máme ihned

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = e^x \cos y, \quad -\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} = e^x \sin y,$$

t. j. podmínky Cauchy-Riemannovy jsou splněny pro všechna komplexní z. Diferencovatelnost obou funkcí u a v je zřejmá (viz § 14).

Podobně jako v analyse reálné proměnné platí o derivaci

$$\frac{de^z}{dz} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = e^x \cos y + ie^x \sin y = e^z. \tag{26}$$

Abychom si objasnili vlastnosti zobrazení $w = e^z$, položme $z = x + iy$, $w = \varrho e^{i\varphi}$ a z rovnice (22) dostaneme

$$\varrho = e^x, \varphi = y.$$

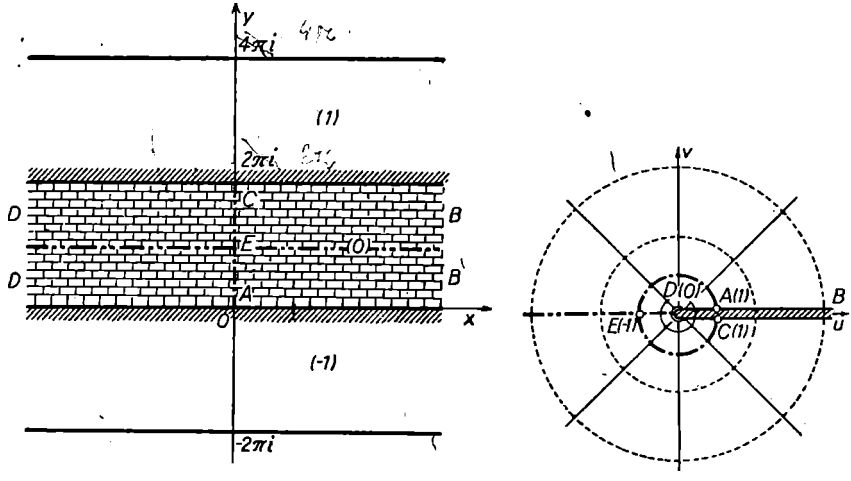
Zkoumejme podmínky pro jedno-jednoznačnost zobrazení. Z rovnice $w_1 = w_2$ čili $\varrho_1 = \varrho_2$, $\varphi_1 = \varphi_2 + 2k\pi$ vyplývá $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2 + 2k\pi$ čili

$$z_1 - z_2 = 2k\pi i, \tag{28}$$

kde k je libovolné celé číslo. Aby zobrazení $w = e^z$ bylo *jedno-jednoznačné* v oblasti D, je nutné a stačí, aby oblast D neobsahovala žádné dva body vyhovující rovnicím (28).

Těmto podmínkám vyhovují pásy rovnoběžné s osou x o šířce 2π, na př. pásy

$$\left.\begin{array}{l} -\infty < x < \infty \\ 2k\pi < y < 2(k+1)\,\pi \end{array}\right\} \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$



Obr. 42.

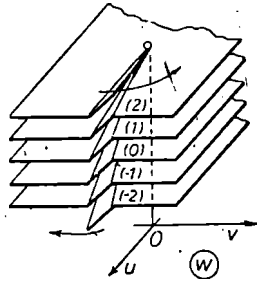
Každému takovému pásu odpovídá oblast bodů w, pro které platí

$$0 < \varrho < \infty, \quad 2k\pi < \varphi < 2(k+1)\,\pi,$$

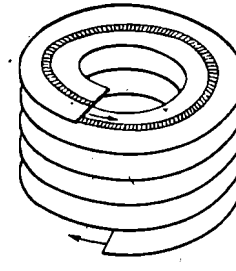
t. j. rovina (w) s výřezem podél kladné reálné poloosy. Při tom přímky $y = \text{const}$ přecházejí v polopaprsky $\varphi = \text{const}$ a úsečky na přímkách $x = \text{const}$ (pokud leží v pásu) v kružnice. *Funkce $w = e^z$ zobrazí konformně a jedno-jednoznačně pás $-\infty < x < \infty$, $0 < y < \pi$ šířky π na horní polorovinu, zápornou část tohoto pásu na jednotkový kruh atd.* (*viz obr.* 42).

Hranicím každého pásu odpovídají okraje výřezu, a to spodním hranicím horního okraje a horním spodní okraje. Abychom zkonstruovali jedno-jednoznačný a spojitý obraz roviny (z), nutno vzít

nekonečně mnoho rovin (w) s výřezy podél reálné poloosy u; každému číslu k přiřadit jeden list (k) a slepit je v tom pořádku, jak jsou na sebe přilepeny odpovídající pásy v rovině (z). Začneme s rovinou (0) a ke spodnímu okraji jejího výřezu přilepíme horní okraj výřezu roviny (1). K volnému (spodnímu) okraji výřezu roviny (1) připojíme horní okraj výřezu roviny (2) atd., aniž tuto operaci ukončíme. V rovině (0) zůstal ještě volným horní okraj výřezu a ten nyní spojíme s dolním okrajem výřezu roviny (—1). Volný horní okraj výřezu roviny (—1) spojíme s dolním okrajem výřezu roviny (—2) a tak opět bez ustání pokračujeme do nekonečna. Viz obr. 43.



Obr. 43.



Obr. 44.

Konstruovaná plocha o nekonečně mnoha listech tvoří *Riemannovu plochu funkce* e^z. Funkce e^z zobrazí jedno-jednoznačně a konformně plochu na otevřenou rovinu z.*)

Pro ujasnění uvažujeme zobrazení vertikálního pásu $0 < x < a$. Tento pás se zřejmě zobrazí na nekonečný závit nad mezikružím $1 < |w| < e^a$, podobný šroubové ploše (konoidu). Viz obr. 44.

Dodejme ještě, že naše funkce nikde nenabývá hodnot $w = 0$ a $w = \infty$ a že se tedy nad těmito body nerozprostírá plocha R. Budeme-li obcházet bod $w = 0$ nebo bod $w = \infty$ po ploše R po křivce ležící nad kružnicí $|w| = r$ v jednom směru, obejdeme tyto body, jak ukazuje

*) Nemůžeme spojitě pokračovat naše zobrazení do bodu $z = \infty$, neboť $\lim_{z \to \infty} e^z$ neexistuje (pro $z \to \infty$ po kladné reálné poloose $e^z \to 0$, jestliže $z \to \infty$ po záporné reálné poloose $e^z \to 0$).

obr. 44, nekonečně mnohokrát. Z tohoto důvodu nazýváme body $w = 0$ a $w = \infty$ body rozvětvení nekonečně velkého řádu. Tyto body nepatří ploše R.

§ 30. Logaritmická funkce. Logaritmickou funkci budeme definovat jako funkci inversní k funkci exponenciální, t. j.

$$w = \mathrm{Ln}\, z, \tag{29}$$

jestliže platí

$$e^w = z. \tag{30}$$

Položíme $z = re^{i(\varphi+2k\pi)}$, $w = u + iv$ a z (30) dostaneme

$$e^u = r, \quad v = \varphi + 2k\pi.$$

Z toho $u = \ln r = \ln|z|$, $v = \varphi + 2k\pi = \mathrm{Arg}\, z$ a

$$w = \mathrm{Ln}\, z = \ln|z| + i\, \mathrm{Arg}\, z. \tag{31}$$

Logaritmická funkce je nekonečně mnohoznačná a zobrazí Riemannovu plochu funkce $z = e^w$ na rovinu (w). Je definována pro všechna konečná $z \neq 0$, neboť funkce e^w nenabývá hodnoty nula pro žádné w (to je patrno z (31) nebo z toho, že $\mathrm{Arg}\, z$ není definován pro $z = 0$).

Nad body $z = 0$ a $z = \infty$, jak jsme již viděli v předešlém paragrafu (t. j. nad body $w = 0$ a $w = \infty$ v označení předešlého §), leží body rozvětvení naší funkce. Nazývají se logaritmické body rozvětvení a jsou zřejmě nekonečně velkého řádu.

Ze vztahu (31) plyne ještě

$$e^{\mathrm{Ln}\, z} = z; \quad \mathrm{Ln}\, e^z = z + 2k\pi i. \tag{32}$$

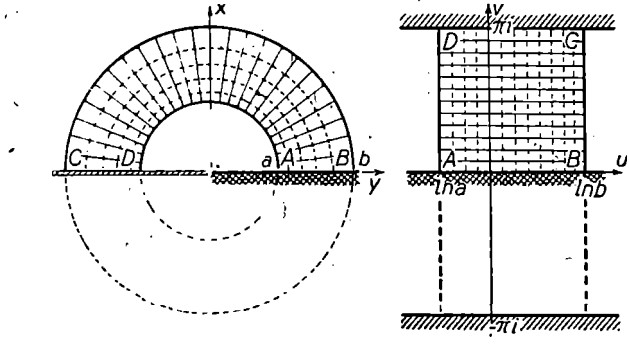
Funkce $w = \mathrm{Ln}\, z$ je další příklad mnohoznačné analytické funkce (viz § 63). Podle své definice dovoluje funkce $w = \mathrm{Ln}\, z$ konstrukci regulárních větví v těch a jen v těch oblastech, kde je možno konstruovat jednoznačné větve funkce $\mathrm{Arg}\, z$. Budiž na př. oblastí D rovina (z) s výřezem podél záporné reálné poloosy. Tuto oblast možno zřejmě nekonečně mnoha způsoby rozprostřít na Riemannovu plochu funkce e^w. Učiníme to tak, že vrchní polorovina leží na listu (0) a dolní polorovina na listu (— 1). Pak $v = \mathrm{Arg}\, z$ se mění v intervalu od $-\pi$ do π a je totožná s hlavní hodnotou argumentu, kterou jsme v § 2

označili symbolem $\arg z$. Získanou jednoznačnou větev funkce $\operatorname{Ln} z$ budeme analogicky nazývat *hlavní hodnotou logaritmu* a označíme ji symbolem

$$w = \ln z = \ln|z| + \mathrm{i} \arg z. \tag{33}$$

Tato funkce je *regulární* v uvažované oblasti, protože podle věty o derivaci inversní funkce existuje

$$\frac{\mathrm{d}\ln z}{\mathrm{d}z} = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}e^w}{\mathrm{d}w}} = \frac{1}{e^w} = \frac{1}{z}. \tag{34}$$



Obr. 45.

Funkce (33) zobrazí jedno-jednoznačně a konformně (protože podle (34) $\frac{\mathrm{d}\ln z}{\mathrm{d}z} \neq 0$) *rovinu s výřezem podél záporné reálné poloosy*) na pás* $-\pi < v < \pi$. Na různých okrajích výřezu nabývá různých hodnot.

Horní polorovina se přitom zobrazí na pás $0 < v < \pi$, polomezikruží $y > 0$, $a < |z| < b$ na čtyrúhelník atd. (obr. 45).

Pro reálné hodnoty z $\arg z = 0$ a $\ln z = \ln|z|$ přechází v obyčejný logaritmus reálné proměnné. Můžeme tedy považovat funkci (33) za „prodloužení" logaritmu do komplexní roviny. Čtenář si snadno dokáže, že funkce (33) má i vlastnost obyčejného logaritmu

$$\ln(z_1 z_2) = \ln z_1 + \ln z_2, \tag{35}$$

ovšem jen pro taková z_1, z_2, jejichž argumenty i součet jejich argumentů leží v intervalu $(-\pi, \pi\rangle$. Hodnoty funkce Lnz dostaneme z hodnot funkce ln$z$ připočtením příslušného celistvého násobku $2\pi i$.

§ 31. Goniometrické a hyperbolické funkce. Budeme si definovat *goniometrické funkce* komplexní proměnné vztahy

$$\left.\begin{aligned} &\sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}), \quad \cos z = \tfrac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}), \\ &\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \operatorname{cotg} z = \frac{1}{\operatorname{tg} z}. \end{aligned}\right\} \tag{36}$$

Pomocí Eulerova vzorce si čtenář snadno dokáže, že pro reálná z jsou tyto funkce totožné s obyčejnými goniometrickými funkcemi reálné proměnné. Zachovávají mnohé jejich vlastnosti. Tak na př. z periodicity funkce e^z plyne i periodicita funkcí (36); funkce $\sin z$ a $\cos z$ mají periodu 2π a funkce $\operatorname{tg} z$ a $\operatorname{cotg} z$ mají periodu π. Ověřme si ještě platnost adičního teoremu pro $\sin z$:

$$\begin{aligned} \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2 &= \frac{1}{2i}(e^{iz_1} - e^{-iz_1}) \tfrac{1}{2}(e^{iz_2} + e^{-iz_2}) + \\ &+ \tfrac{1}{2}(e^{iz_1} + e^{-iz_1}) \frac{1}{2i}(e^{iz_2} - e^{-iz_2}) = \frac{1}{2i}[e^{i(z_1+z_2)} - e^{-i(z_1+z_2)}] = \\ &= \sin(z_1 + z_2). \end{aligned} \tag{37}$$

Stejně bychom si ověřili i platnost ostatních vztahů mezi goniometrickými funkcemi.

Ze vztahů (36) a vzorce pro derivaci exponenciální funkce plynou rovnice

$$\frac{\mathrm{d}\sin z}{\mathrm{d}z} = \cos z, \quad \frac{\mathrm{d}\cos z}{\mathrm{d}z} = -\sin z, \quad \frac{\mathrm{d}\operatorname{tg} z}{\mathrm{d}z} = \frac{1}{\cos^2 z},$$
$$\frac{\mathrm{d}\operatorname{cotg} z}{\mathrm{d}z} = -\frac{1}{\sin^2 z}. \tag{38}$$

Z nich bezprostředně plyne *regularita* goniometrických funkcí $\sin z$ a $\cos z$ v celé otevřené rovině (z) a funkcí $\operatorname{tg} z$ pro body $z \neq (2k + 1)\frac{1}{2}\pi$ a funkce $\operatorname{cotg} z$ pro body $z \neq k\pi$. Ne ovšem všechny vlastnosti goniometrických funkcí reálné proměnné zůstanou zachovány při jejich

prodloužení do komplexní roviny. Tak na př. nemůžeme tvrdit, že by funkce sinz, resp. cosz, měly vždy modul menší než 1. Je na př.

$$\cos i = \tfrac{1}{2}(e + e^{-1}) \doteq 1{,}54, \quad \sin i = \frac{1}{2i}(e - e^{-1}) \doteq -1{,}17i.$$

Prozkoumejme blíže jako příklad zobrazení zprostředkované funkcí

$$w = \cos z. \tag{39}$$

Jak plyne z rovnice (36), můžeme je pokládat za superposici tří zobrazení

$$(I)\ \zeta = iz, \quad (II)\ \omega = e^{\zeta}, \quad (III)\ w = \tfrac{1}{2}\left(\omega + \frac{1}{\omega}\right), \tag{40}$$

z nichž každé jsme už vyšetřili dříve. Nejprve pokud se týká jedno-jednoznačnosti zobrazení (39). Nechť oblast D se zobrazí zobrazením (I) na D_1, při (II) přejde D_1 v Δ_1 a při (III) přejde Δ_1 v Δ. Zobrazení (I) je jedno-jednoznačné všude, k jedno-jednoznačnosti (II) je nutné a stačí, aby D_1 neobsahovala body, pro něž $\zeta_1 - \zeta_2 = 2k\pi i$ (viz (28)), t. j. aby D neobsahovala body, pro něž

$$z_1 - z_2 = 2k\pi. \tag{41}$$

Pro jedno-jednoznačnost (III) je nutné a stačí, aby Δ_1 neobsahovala body, pro něž $\omega_1\omega_2 = 1$ [viz (10)], t. j. aby v D neležely body, pro něž $e^{iz_1} \cdot e^{iz_2} = e^{i(z_1+z_2)} = 1$, to jest body, pro které platí

$$z_1 + z_2 = 2k\pi. \tag{42}$$

Pro *jedno-jednoznačnost zobrazení (39)* tedy je nutné a stačí, aby oblast D neobsahovala body vyhovující některé z rovnic (41), (42). Této podmínce vyhovují na př. polopásy

$$0 < x < 2\pi, \quad y > 0.$$

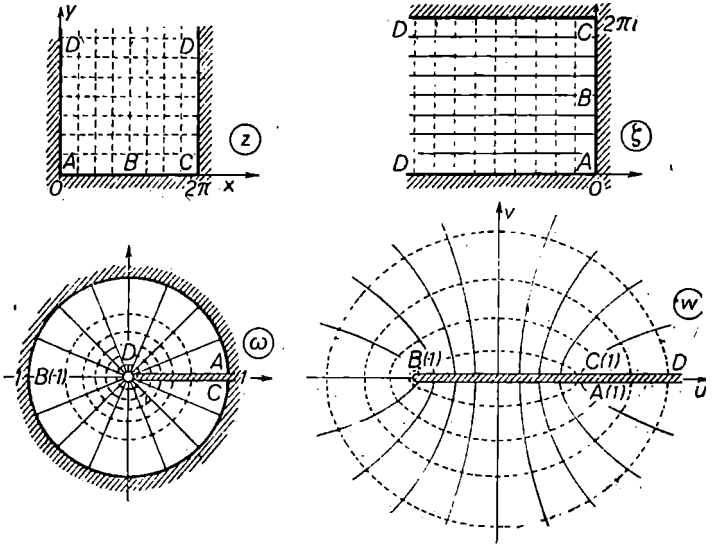
Na obr. 46 jsou vyznačeny postupné etapy našeho zobrazení. Výše zmíněný polopás se zobrazí na rovinu (w) s výřezem $-1 \leq u \leq \infty$, $v = 0$ podél reálné osy.*) Riemannova plocha funkce $w = \cos z$ bude mít složitější strukturu než předešlé. Bude zřejmě nekonečně

*) Pro vyjasnění etapy (III) si vzpomeňme (§ 26), že jednotkový kruh se zobrazil vně úsečky $\langle -1, 1\rangle$ a výřezu podél poloměru přitom odpovídá úsečka $(1, \infty)$ reálné osy.

mnoholistá a podrobnější zkoumání ukazuje, že bude mít nekonečně mnoho bodů rozvětvení druhého řádu ležících nad body $w = \pm 1$ a logaritmický bod rozvětvení nad bodem $w = \infty$. Lehce si ověříme, že na př. obrazem reálné osy roviny (z) na této ploše je nekonečná klikatá čára složená z nekonečně mnoha úseček $(-1, 1)$.

Funkce

$$\sin z = \cos(z - \tfrac{1}{2}\pi)$$



Obr. 46.

a s ní i zobrazení jí zprostředkované se liší od předešlé jen posunutím roviny (z). Zobrazení prostředkovaná funkcemi tgz a cotgz se zkoumají zcela obdobným způsobem.

Funkce inversní k funkcím (36) se nazývají *cyklometrické funkce* komplexní proměnné. Protože jsou všechny Riemannovy plochy funkcí (36) nekonečně mnoholisté, jsou cyklometrické funkce nekonečně mnohoznačné. Jsou to opět další mnohoznačné analytické funkce (viz § 63). Funkce (36) jsme vyjádřili pomocí exponenciální funkce a je tedy nasnadě se domnívat, že funkce cyklometrické

budou mít vyjádření pomocí funkce logaritmické. Najděme si takové vyjádření aspoň pro jednu z nich, na př. pro $w = \operatorname{Arccos} z$. Z definice $w = \operatorname{Arccos} z$ máme

$$z = \cos w = \tfrac{1}{2}(e^{iw} + e^{-iw}),$$

z toho

$$e^{2iw} - 2ze^{iw} + 1 = 0, \quad e^{iw} = z + \sqrt{z^2 - 1}$$

a

$$w = \operatorname{Arccos} z = -i \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1}).$$

V důsledku vztahu

$$\frac{1}{z - \sqrt{z^2 - 1}} = z + \sqrt{z^2 - 1}$$

znamená změna znaménka před odmocninou změnu znaménka před logaritmem a protože v posledním vzorci jak logaritmus tak odmocnina jsou víceznačné funkce, můžeme znaménko potlačit:

$$w = \operatorname{Arccos} z = i \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1}). \tag{43}$$

Právě odvozený vztah zřejmě značí, že je možno pro $\operatorname{Arccos} z$ konstruovat jednoznačnou regulární větev na př. v rovině (z) s výřezem $-1 \leq x \geq \infty$, $y = 0$ podél reálné osy. Tuto větev budeme značit $\operatorname{arccos} z$ a nazývat *hlavní hodnota arkuskosinu.*

Podobné vzorce můžeme odvodit i pro ostatní cyklometrické funkce:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{Arcsin} z &= \tfrac{1}{2}\pi - \operatorname{Arccos} z = \tfrac{1}{2}\pi - i \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1}); \\ \operatorname{Arctg} z &= \tfrac{1}{2}\pi - \operatorname{Arccotg} z = \frac{1}{2i} \operatorname{Ln} \frac{i - z}{i + z}. \end{aligned}\right\} \tag{44}$$

Hyperbolické funkce komplexní proměnné

$$\left.\begin{aligned} \sinh z &= \tfrac{1}{2}(e^z - e^{-z}), \quad \cosh z = \tfrac{1}{2}(e^z + e^{-z}), \\ \operatorname{tgh} z &= \frac{\sinh z}{\cosh z}, \quad \operatorname{cotgh} z = \frac{1}{\operatorname{tgh} z} \end{aligned}\right\} \tag{45}$$

se dají vyjádřit velmi jednoduše pomocí goniometrických funkcí:

$$\left.\begin{aligned} \sinh z = -i \sin iz, \quad \cosh z = \cos iz, \quad \operatorname{tgh} z = -i \operatorname{tg} iz, \\ \operatorname{cotgh} z = i \operatorname{cotg} iz \end{aligned}\right\} \tag{46}$$

a nijak podstatně se od nich neliší. *Hyperbolometrické funkce* komplexní proměnné jsou definovány jako inversní funkce k funkcím (45). Dají se jednoduše vyjádřiti pomocí logaritmu:

$$\operatorname{Argsin} z = \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 + 1}), \quad \operatorname{Argcos} z = \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1}),$$
$$\operatorname{Argtg} z = \tfrac{1}{2} \operatorname{Ln} \frac{1 + z}{1 - z}, \quad \operatorname{Argcotg} z = \tfrac{1}{2} \operatorname{Ln} \frac{z + 1}{z - 1}. \tag{47}$$

§ 32. Obecná exponenciální funkce. $w = z^a$, kde $a = \alpha + i\beta$ je libovolné komplexní číslo, je definována rovnicí

$$z^a = e^{a \operatorname{Ln} z}. \tag{48}$$

Položíme-li $z = re^{i\varphi}$, dostaneme $\operatorname{Ln} z = \ln r + i(\varphi + 2k\pi)$ a tedy

$$z^a = e^{(\alpha+i\beta)\operatorname{Ln} z} = e^{\alpha \ln r - \beta(\varphi + 2k\pi)} \cdot e^{i[\alpha(\varphi+2k\pi)+\beta \ln r]}. \tag{49}$$

Z (49) je vidět, že funkce z^a je pro $\beta \neq 0$ nekonečně mnohoznačná a její hodnoty pro pevná z a a leží na soustavě kružnic

$$|w| = e^{\alpha \ln r - \beta(\varphi + 2k\pi)}, \; k = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots,$$

jejichž poloměry

$$\varrho_k = e^{\alpha \ln r - \beta\varphi} \cdot e^{-2k\pi\beta} = \varrho_0 e^{-2k\pi\beta} \tag{50}$$

tvoří dvě geometrické posloupnosti s kvocientem $e^{-2\pi\beta}$ pro kladná k a kvocientem $e^{2\pi\beta}$ pro záporná k. Přitom argumenty hodnot funkce z^a tvoří aritmetické posloupnosti

$$\varphi_k = \alpha(\varphi + 2k\pi) + \beta \ln r = \varphi_0 + 2k\pi\alpha \tag{51}$$

s diferencemi $\pm 2\pi\alpha$. Pro $\beta = 0$, t. j. pro reálná a, leží všechny hodnoty, jak je ihned vidět z (50), na kružnici

$$|w| = e^{a \ln r} = r^a. \tag{52}$$

Z (51) plyne, že argumenty těchto hodnot jsou

$$\varphi_k = a\varphi + 2k\pi a. \tag{53}$$

Budiž *a racionální číslo*, pak je můžeme psát ve tvaru $a = \frac{p}{q}$, kde p, q jsou dvě nesoudělná celá čísla, a mezi hodnotami (53) je jen q různých hodnot argumentu φ_k definujících různé hodnoty funkce z^a.

Důkaz: položíme-li $\forall$ (53) $k = 0, 1, 2, \ldots, q-1$, pak mezi hodnotami φ_k

$$\varphi_0 = a\varphi,\ \varphi_1 = a\varphi + 2\pi\frac{p}{q},\ \varphi_2 = a\varphi + \frac{p}{q}4\pi, \ldots, \tag{54}$$
$$\varphi_{q-1} = a\varphi + \frac{p}{q}(q-1)\,2\pi$$

se žádné dvě nebudou lišit o celistvý násobek 2π, neboť jestliže pro některé celé $k < q$ $k\frac{p}{q}$ bude rovno celému číslu n, pak $\frac{p}{q} = \frac{n}{k}$ představuje zlomek s jmenovatelem menším než q, což je proti předpokladu o nesoudělnosti čísel p a q. Naopak všechna ostatní k dají pouze hodnoty φ_k lišící se od (54) o násobek 2π.

Vidíme tedy, že pro *racionální* $a = \frac{p}{q}$ *se funkce* z^a *shoduje s funkcí* $\sqrt[q]{z^p}$:

$$z^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{z^p},$$

(viz §§ 4 a 25) a je tedy *konečně víceznačná.*

Pro *iracionální* (reálná) a mezi hodnotami (53) se žádné dvě neliší navzájem o násobek 2π, neboť kdyby pro dvě celá čísla k_1, k_2, $k_1 \neq k_2$ bylo $2k_1\pi a - 2k_2\pi a = 2\pi n$, kde n je celé, bylo by $a = \frac{n}{k_1 - k_2}$ racionální, což není možné. Je tedy v tomto případě funkce

$$z^a = \mathrm{e}^{a\,\mathrm{Ln}\,z}$$

nekonečně mnohoznačná a dává nám tak příklad další mnohoznačné analytické funkce.

Příklad 1. Funkce

$$w = z^{\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{-(\varphi+2k\pi)}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\ln r}$$

je definována pro $z \neq 0, \neq \infty$ a je nekonečně mnohoznačná. Pro pevné z se její hodnoty rozprostírají na polopaprsku $\arg w = \ln r$ tak, že jejich moduly tvoří dvě geometrické posloupnosti s kvocienty $\mathrm{e}^{\pm 2\pi}$. Hodnoty odpovídající kladným k konvergují k bodu $w = 0$

a body odpovídající záporným k k bodu $w = \infty$. V případě $r = 1$ jsou všechny tyto hodnoty reálné.

Příklad 2. Funkce

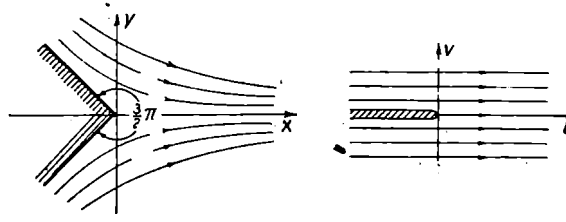
$$w = z^{\frac{1}{4}} = e^{\frac{1}{4}\ln r} \cdot e^{i(\frac{1}{4}\varphi + \frac{1}{4}2k\pi)} = \sqrt[4]{r}\, e^{\frac{1}{4}i(\varphi + 2k\pi)}$$

je čtyřznačná. Abychom získali všechny její hodnoty, nutno postupně dosazovat za k čísla 0, 1, 2, 3 ($k = 4$ nedává nic nového, dostaneme tytéž hodnoty jako pro $k = 0$).

Příklad 3. Funkce

$$w = z^{\pi} = r^{\pi} e^{i(\pi\varphi + 2k\pi^2)}$$

je nekonečně mnohoznačná. Její hodnoty leží pro pevné z na kružnici $|w| = r^{\pi}$, při čemž je možno dokázat, že jsou po ní rozprostřeny všude stejně hustě.



Obr. 47.

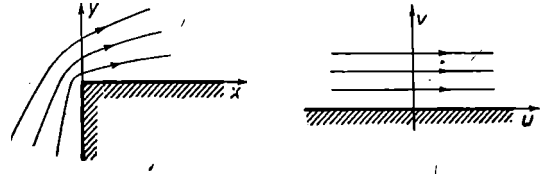
Regulární větve obecné exponenciální funkce, jak je vidět ihned z její definice, možno konstruovat všude tam, kde je možno konstruovat jednoznačnou větev funkce Arg z. Tak na př. je tato konstrukce možná v rovině s výřezem podél záporné reálné poloosy (*hlavní hodnota*). Tato větev je regulární, neboť podle věty o derivaci složené funkce a vztahu (34) existuje derivace

$$\frac{dz^a}{dz} = \frac{de^{a\ln z}}{dz} = e^{a\ln z}\frac{a}{z} = az^{a-1}. \qquad (55)$$

Omezme se na případ kladných reálných a. Pro $a > 1$ zprostředkuje hlavní hodnota z^a jedno-jednoznačné a konformní zobrazení výseče $-\frac{\pi}{a} < \arg z < \frac{\pi}{a}$ na rovinu (w) s výřezem podél záporné poloosy

(viz obr. 47 pro $a = \frac{4}{3}$). Výseč $0 < \arg z < \frac{\pi}{a}$ se při tom zobrazí na horní polorovinu.

Pro $a < 1$ není možné jedno-jednoznačné zobrazení na rovinu s výřezem. Pro hodnoty $\frac{1}{2} < a < 1$ je však možné jedno-jednoznačné zobrazení sektoru $0 < \arg z < \frac{\pi}{a}$ na horní polorovinu (viz obr. 48 pro $a = \frac{2}{3}$).



Obr. 48.

§ 33. Příklady. Uvedeme ještě řadu příkladů řešení úlohy o konformním zobrazení pomocí elementárních funkcí.

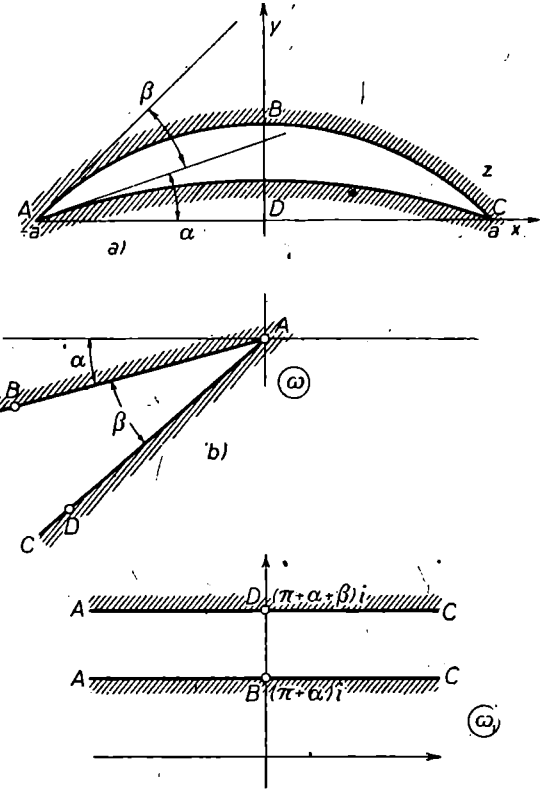
Příklad 1. Hledejme zobrazení srpku z obr. 49a na pás $0 < \mathrm{Im}\, w < h$. Nejprve lineární lomenou funkcí zobrazíme srpek na sektor

$$\omega = \frac{z + a}{z - a}$$

(obr. 49b) a tuto výseč pomocí větve logaritmu

$$\omega_1 = \ln \omega = \ln|\omega| + i \arg \omega,$$

$$0 \leq \arg \omega < 2\pi$$

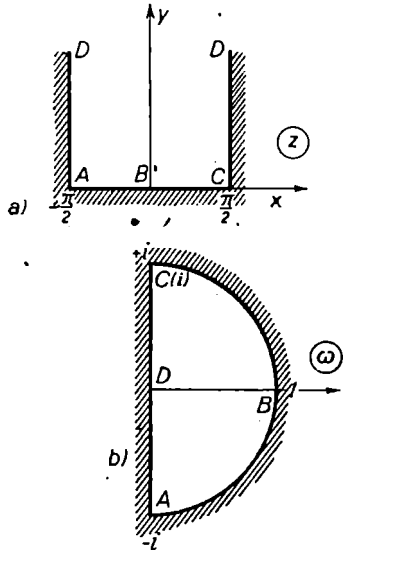


Obr. 49.

na pás šířky β: $\pi + \alpha < \operatorname{Im}\omega_1 < \pi + \alpha + \beta$. Při prvém zobrazení bod $B = \mathrm{i}\cot g\frac{1}{2}\alpha$ přejde v bod $-(\cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha)$ a při druhém kroku v bod $(\pi + \alpha)\mathrm{i}$. Body A a C se při tom zobrazí na konce pásu. A zbývá jen převést získaný pás vhodným lineárním zobrazením v daný a výsledné zobrazení má tvar:

$$w = \frac{h}{\beta}\omega_1 - \frac{(\pi + \alpha)\,h}{\beta}\,\mathrm{i} = \frac{h}{\beta}\left[\ln\frac{z+a}{z-a} - (\pi + \alpha)\,\mathrm{i}.\right] \qquad (56)$$

Příklad 2. Hledejme zobrazení $w = f(z)$ polopásu $-\frac{1}{2}\pi < x < \frac{1}{2}\pi$, $y > 0$ na polorovinu tak, aby bylo: $f(\pm\frac{1}{2}\pi) = \pm 1$, $f(0) = 0$.



Obr. 50.

Pootočíme polopás o pravý úhel proti směru hodinových ručiček a zobrazením (22) jej znázorníme na jednotkový půlkruh:

$$\omega = \mathrm{e}^{\mathrm{i}z}.$$

Pravý jednotkový polokruh, který jsme takto získali (obr. 50b), pootočíme o pravý úhel ve směru hodinových ručiček a zobrazíme pomocí funkce (9). Po úpravě dostáváme hledané zobrazení

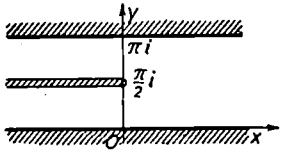
$$w = \tfrac{1}{2}\left(-\mathrm{i}\omega + \frac{1}{-\mathrm{i}\omega}\right) = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\omega - \frac{1}{\omega}\right) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}} = \sin z. \qquad (57)$$

Je ihned vidět, že výsledná oblast je horní polorovina a že zobrazení

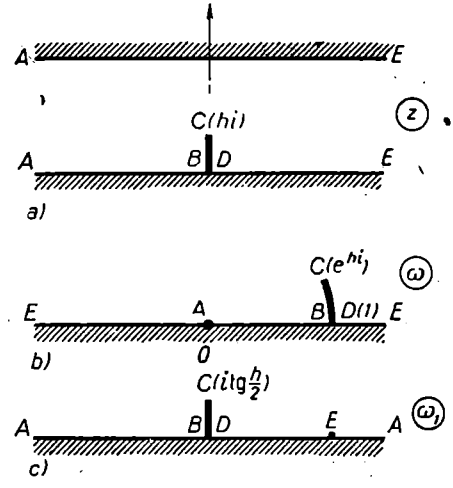
má předepsanou vlastnost, pokud se týká zobrazení bodů $\pm \frac{1}{2}\pi$, resp. 0. Ještě jednodušeji bychom dostali výsledek pomocí § 31.

Příklad 3. Pás s výřezem (obr. 51) zobrazíme pomocí funkce $w = e^z$ na horní polorovinu s výřezem $0 \leq \operatorname{Im} \omega \leq 1$ podél imaginární osy. Její zobrazení na polorovinu bylo diskutováno v § 27, vzorec (13). Máme tedy konečné zobrazení

$$w = \sqrt{\omega^2 + 1} = \sqrt{e^{2z} + 1}. \tag{58}$$



Obr. 51.



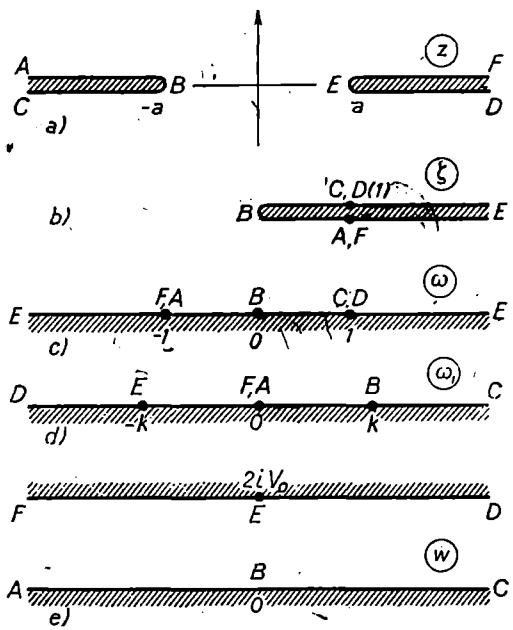
Obr. 52.

Příklad 4. Tentýž pás s vertikálním výřezem (obr. 52a) se zobrazí pomocí funkce $\omega = e^z$ na polorovinu s výřezem podél oblouku jednotkové kružnice (obr. 52b). Zobrazení $\omega_1 = \dfrac{\omega - 1}{\omega + 1}$ zobrazí tento oblouk na úsečku, jejíž koncový bod bude ležet v bodě $\dfrac{e^{ih} - 1}{e^{ih} + 1} = i \operatorname{tg} \frac{1}{2}h$ (obr. 52c). V závěru použijeme znovu zmíněné formule (13) § 27 a výsledná superposice zobrazení má tvar:

$$w = \sqrt{\omega_1^2 + \operatorname{tg}^2 \tfrac{1}{2}h} = \sqrt{\left(\frac{e^z - 1}{e^z + 1}\right)^2 + \operatorname{tg}^2 \tfrac{1}{2}h} = \sqrt{\operatorname{tgh}^2 \tfrac{1}{2}z + \operatorname{tg}^2 \tfrac{1}{2}h}. \tag{59}$$

Příklad 5. Hledejme konformní zobrazení roviny (z) s dvěma výřezy $-\infty \leq x \leq -a$ a $a \leq x \leq \infty$ podél reálné poloosy na pás

$0 < \operatorname{Im} w < 2V_0$. Kromě toho budem klást podmínku, aby levý výřez přešel v dolní okraj pásu a pravý výřez v horní okraj pásu. To určuje pouze dva parametry zobrazení a třetí tedy zůstane libovolný. Nejprve převedeme náš výřez ve výřez $(0, \infty)$ zobrazením



Obr. 53.

$$\zeta = \frac{z + a}{z - a}$$

(obr. 53b) a pak v reálnou osu zobrazením

$$\omega = \sqrt{\zeta} = \sqrt{\frac{z + a}{z - a}}.$$

Uvažovaná oblast se při tom zobrazí na horní polorovinu (obr. 53c). Posléze ji pomocí logaritmické funkce zobrazíme na pás. Abychom však splnili podmínky kladené na zobrazení výřezů, musíme předem zobrazit polorovinu na sebe samu tak, aby body A, F, resp. C, D přešly v 0, resp. ∞. Toto zobrazení zprostředkuje lineární lomená funkce

$$\omega_1 = k\,\frac{1 + \omega}{1 - \omega} = k\,\frac{\sqrt{z - a} + \sqrt{z + a}}{\sqrt{z - a} - \sqrt{z + a}} = -\frac{k}{a}\,(z + \sqrt{z^2 - a^2}),$$

kde k je libovolná kladná konstanta. Nyní už zbývá jen provést zobrazení pomocí logaritmické funkce a máme hledaný výsledek

$$w = \frac{2V_0}{\pi}\,\ln\omega_1 = \frac{2V_0}{\pi}\,\ln(z + \sqrt{z^2 - a^2}) + 2iV_0 + C, \qquad (50)$$

kde $C = \ln\dfrac{k}{a}$ je libovolná reálná konstanta.

ÚLOHY.

1. Najděte reálnou a imaginární část funkcí $w = \sin z$, $w = \cos z$, $w = \operatorname{tg} z$.

2. Odvoďte vzorce (46) a (47).

3. Dokažte platnost vztahů: $\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$, $\cosh 2z = \cosh^2 z + \sinh^2 z$, $\sinh 2z = 2 \sinh z \cosh z$.

4. Dokažte, že je možno konstruovat regulární větev funkce $\sqrt[3]{(1-z)z^2}$ vně úsečky $0 \leq x \leq 1$ osy x. Stanovte hodnotu v bodě $z = i$ té větve, která má v bodě $z = 2$ zápornou hodnotu. Jak veliké jsou ostatní hodnoty v tomto bodě?

5. Dokažte, že je možno konstruovat regulární větve funkce $\operatorname{Ln}(1 - z^2)$ v rovině s výřezem podél úseček $(-1, i)$, $(1, i)$ a polopřímky $x = 0$, $y \geq 1$ na ose y. Jaká je v bodě $z = 2$ hodnota té větve, která má v bodě $z = 0$ hodnotu 0?

6. Dokažte, že je možno konstruovat regulární větev funkce $w = \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1})$ v rovině s výřezy $-\infty \leq x \leq -1$, $1 \leq x \leq \infty$ podél reálné osy.

7. Pod funkcí $z^z = e^{z \ln z}$ budeme rozumět funkci, kde ln je hlavní hodnota logaritmu. Jaká je hodnota této funkce v bodě $z = -e$ na horním i dolním okraji výřezu?

8. Najděte rovnice křivek jednotkového modulu a jednotkového argumentu zobrazení pro zobrazení $w = z^2$.

9. Dokažte, že funkce $w = z^2 + 2z + 3$ zprostředkuje jedno-jednoznačné zobrazení vnitřku jednotkového kruhu na sebe sama.

10. Dokažte, že zobrazení $\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ je jedno-jednoznačné v horní polorovině a stanovte oblast, v kterou zobrazí horní polorovinu!

11. V jakou oblast zobrazí:

a) $w = \cos z$ pás $0 < x < \frac{1}{2}\pi$;

b) $w = \operatorname{tg} z$ pás $-\frac{1}{4}\pi < x < \frac{1}{4}\pi$;

Jak vypadá síť konformně ekvivalentní s kartézskou souřadnicovou sítí roviny (z)?

c) $w = z + e^z$ pás $-\pi < y < \pi$;

d) regulární větev funkce $w = \sqrt{z}$, která má v bodech kladné reálné poloosy kladné hodnoty, oblast ohraničenou kardioidou

$$x = 2(1 - \cos\varphi)\cos\varphi, \quad y = 2(1 - \cos\varphi)\sin\varphi;$$

e*) funkce $w = z - \frac{1}{4}z^3$ oblast ohraničenou levou polovinou Bernouilliho lemniskaty $(x^2 + y^2)[(x-4)^2 + y^2] = 16$; co v tomto zobrazení odpovídá síti polárních souřadnic v rovině (w)?

12. Dokažte, že je možno v horní polorovině konstruovat regulární větve funkcí a) $w = \operatorname{Ln} \cos z$; b) $w = \operatorname{Arccos} \cosh(k \cos z)$; ($k$ reálná konstanta). V jakou oblast je zobrazena horní polorovina

a) libovolnou větví funkce $w = \operatorname{Ln} \cos z$;

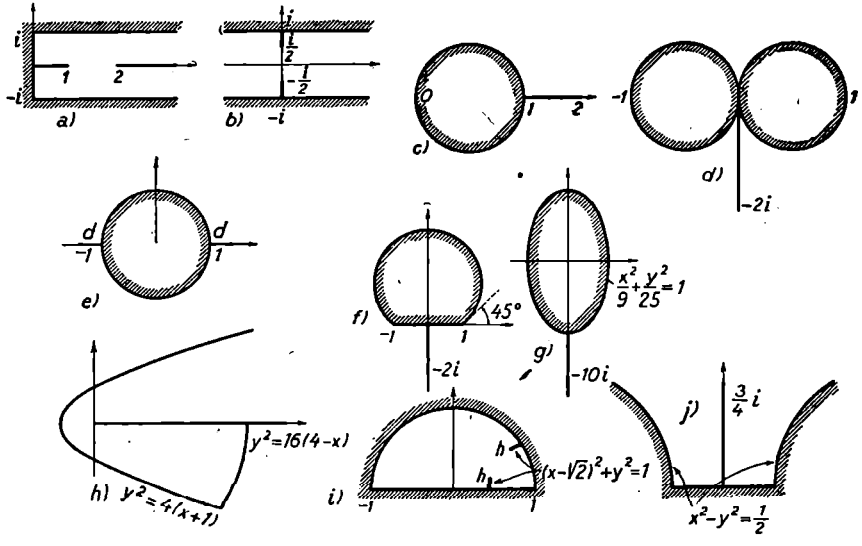
b) tou větví funkce $\operatorname{Arccos} \cosh (k \cos z)$, která má v bodě $\frac{1}{2}\pi$ hodnotu $\frac{1}{2}\pi$?

13. Najděte konformní zobrazení:

a) výseče jednotkového kruhu $0 < \arg z < \alpha$, $|z| < 1$ na kruh $|w| < 1$;

b) jednotkového kruhu $|z| < 1$ na pás $0 < v < 1$ s podmínkami $f(-1) = -\infty, f(1) = \infty, f(\mathrm{i}) = \mathrm{i}$;

c) vnějšku elipsy $\frac{x^2}{2v} + \frac{y^2}{16} = 1$ na vnějšek jednotkové kružnice;



Obr. 54.

d) vnějšku paraboly (t. j. oblasti, v níž neleží ohnisko) $y^2 = 2px$ na horní polorovinu;

e) vnějšku hyperboly (t. j. oblasti, v níž neleží ohnisko) $\frac{x^2}{\cos^2\alpha} - \frac{y^2}{\sin^2\alpha} = 1$ na horní polorovinu;

f) oblasti omezené dvěma podobnými logaritmickými spirálami $r = \alpha e^{k\varphi}$, $r = \beta e^{k\varphi}$ ($\alpha < \beta$ a k reálné konstanty) na pás $0 < v < 1$.

14. Najděte konformní zobrazení oblastí vyznačených v obr. 54 na horní polorovinu, resp. na jednotkový kruh.

APLIKACE NA THEORII ROVINNÉHO POLE.

§ 34. Rovinné vektorové pole. Vektorovým polem rozumíme část prostoru, v jehož každém bodě je definován jistý vektor. Budeme se zvláště zajímat o tyto tři případy vektorových polí:

a) *Rychlostní pole proudění kapaliny.* V každém bodě jisté oblasti D, kterou proudí nějaká kapalina, je v každém okamžiku definován vektor rychlosti pohybující se kapaliny. Souhrn všech těchto bodů oblasti D spolu se všemi vektory $\boldsymbol{V}$ v nich definovanými zobrazuje naše pole.

b) *Elektrostatické pole.* V prostoru obklopujícím náboj existují jisté elektrické síly, o jejichž existenci se přesvědčíme vnesením t. zv. „zkušebních" nábojů do tohoto pole. Síla působící na jednotkový náboj přenesený do jistého bodu pole se nazývá *intensita pole* v tomto bodě. Souhrn všech bodů prostoru obklopujících daný náboj spolu s vektory intensity $\boldsymbol{E}$ tvoří naše pole.

c) *Pole tepelného proudění.* V prostoru obklopujícím zahřáté těleso s body o různé temperatuře $v(M)$ proudí teplo z míst o vyšší temperatuře na místa s nižší temperaturou. Vektorem *tepelného toku* nazýváme vektor

$$\mathbf{Q} = -k \operatorname{grad} v(M), \tag{1}$$

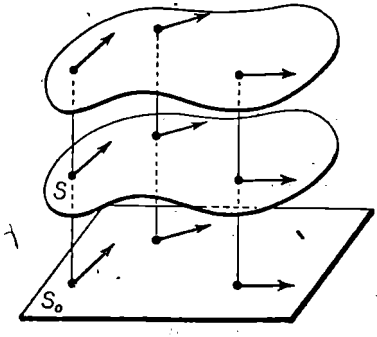
kde k je koeficient vnitřní tepelné vodivosti. Vektor má směr normály k ekvithermálním plochám a míří na místa s menším tepelným obsahem (t. j. v tu stranu, kam se šíří teplo). Souhrn vektorů $\mathbf{Q}$ zobrazí naše pole.

Naše další úvahy se budou týkat vektorových polí vektorů libovolné fysikální povahy, nicméně pro konkretnost našich úvah budeme mít vždycky především před očima uvedená tři pole.*)

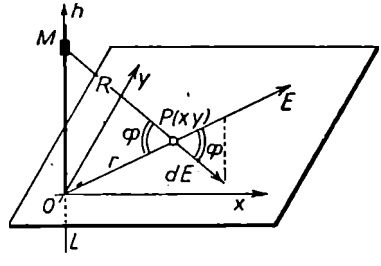
*) Mnoho číselných příkladů z theorie pružnosti nalezne čtenář v knihách: G. V. Kolosov: Priměněnije kompleksnoj pereměnnoj k těorii uprugosti, ONTI 1935 a N. I. Muschelišvili: Někotoryje zadači těorii uprugosti, izd. AN SSSR, 1935.

V obecném případě budeme zkoumat vektorová pole měnící se s časem. Analyticky jsou taková pole dána třemi skalárními funkcemi (komponenty vektorů pole) čtyř proměnných (tři souřadnice x, y, z bodů pole a čas t).

Omezíme se zde jen na zkoumání stacionárních polí, t. j. polí časově neproměnných, jejichž vektory se s průběhem času nemění a závisí jen na poloze bodů daného pole. Vzhledem k tomuto omezení je pole určeno třemi skalárními funkcemi tří proměnných.



Obr. 55.



Obr. 56.

Omezíme se dále pouze na pole *pseudorovinná*, t. j. taková pole, jejichž všechny vektory jsou rovnoběžné s jistou rovinou a vektory všech bodů ležících na některé kolmici k této rovině jsou stejné co do velikosti i co do směru. Takové pole je úplně určeno rovinným vektorovým polem ležícím v některé z rovin π, rovnoběžných s naší rovinou π_0.

Pseudorovinná pole jsou tedy určena dvěma skalárními funkcemi (komponenty vektorů rovinného pole) dvou proměnných (souřadnice bodů roviny rovinného pole). Komponenty vektoru $\boldsymbol{A}$ vzhledem k osám x a y budeme značit A_x, resp. A_y, takže platí

$$\boldsymbol{A} = A_x + \mathrm{i}A_y.$$

§ 35. Příklady rovinných polí.

Příklad 1. Zkoumejme elektrické pole *homogenně nabité přímky*. Je zřejmě pseudorovinné a za rovinu π_0 můžeme volit kteroukoliv

z rovin kolmých k přímce l. Budiž q lineární hustota náboje na l (t. j. množství náboje na jednotku délky) a hledejme vektor intensity $\boldsymbol{E}$ našeho pole v libovolném bodě P roviny π_0. Pro výpočet si zvolíme kartézskou souřadnou soustavu (x, y, h), jak ukazuje obr. 56. Podle principu superposice známého z fysiky můžeme vektor $\boldsymbol{E}$ považovat za vektorový součet intensit elementárních nábojů $\mathrm{d}\boldsymbol{E}$ soustředěných na elementu $\mathrm{d}h$ přímky l. Podle Coulombova zákona je element intensity $\mathrm{d}\boldsymbol{E}$ pole bodového náboje $q\,\mathrm{d}h$ umístěného ve vzdálenosti h na přímce l roven

$$|\mathrm{d}\boldsymbol{E}| = \frac{q\,\mathrm{d}h}{\overline{MP}^2} = \frac{q\,\mathrm{d}h}{r^2 + h^2},$$

kde $r^2 = \overline{OP} = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$ je vzdálenost bodu P od počátku souřadnic. Protože vektor $\boldsymbol{E}$ leží v rovině π_0, je jeho modul roven součtu projekcí vektorů elementárních intensit $\mathrm{d}\boldsymbol{E}$ na rovinu π_0:

$$|\boldsymbol{E}| = \int \cos\varphi |\mathrm{d}\boldsymbol{E}| = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{q\cos\varphi}{v^2 + h^2}\,\mathrm{d}h,$$

kde ψ je úhel, který svírá vektor $\mathrm{d}\boldsymbol{E}$ a rovina π_0. Z pravoúhlého trojúhelníka MOP máme $h = r\,\mathrm{tg}\varphi$ a

$$\frac{1}{r^2 + h^2} = \frac{\cos^2\varphi}{r^2},$$

tedy

$$|\boldsymbol{E}| = \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \frac{q\cos\varphi}{r}\,\mathrm{d}\varphi = \frac{2q}{r}. \tag{2}$$

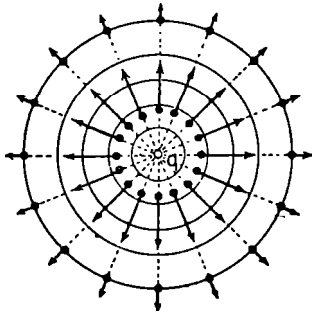
Vektor $\boldsymbol{E}$ má směr vektoru $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = z$ a jednotkový vektor v tomto směru bude zřejmě $\frac{z}{|z|}$, a tedy

$$\boldsymbol{E} = \frac{2q}{r} \cdot \frac{z}{|z|} = \frac{2qz}{|z|^2} = \frac{2qx}{x^2 + y^2} + \mathrm{i}\,\frac{2qy}{x^2 + y^2}. \tag{3}$$

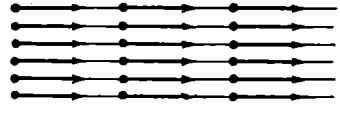
Zkoumané pole je úplně určeno rozprostřením vektorů $\boldsymbol{E}$ v rovině π_0. Budeme tedy dále pod *rovinným polem bodového náboje* vždy rozumět pole homogenně nabité přímky l. Veličina q udává lineární

hustotu náboje, t. j. velikost náboje úsečky délky 1. Silové čáry takového pole (t. j. čáry, které mají v každém svém bodě za tečnu vektor pole) jsou tvořeny svazkem přímek s vrcholem v počátku (obr. 57). Pro kladný náboj směřují vektory $\boldsymbol{E}$ od počátku, pro záporný náboj — k počátku.

Vzorec (2) ukazuje, že modul intensity rovinného pole bodového náboje je nepřímo úměrný vzdálenosti bodu od náboje a ne čtverci vzdálenosti, jak je tomu v prostoru. Vlastnosti rovinného pole odlišné od prostorového pole poznáme dále ještě hlouběji.



Obr. 57.



Obr. 58.

Příklad 2. Pro pole *soustavy bodových nábojů* $q_1, q_2, \ldots, q_n$, v bodech $z_1, z_2, \ldots, z_n$, je vektor intensity $\boldsymbol{E}$ roven

$$\boldsymbol{E} = \sum_{k=1}^{n} \frac{2q_k(z - z_k)}{|z - z_k|^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{2q_k(x - x_k)}{(x - x_k)^2 + (y - y_k)^2} + \\ + \mathrm{i} \sum_{k=1}^{n} \frac{2q_k(y - y_k)}{(x - x_k)^2 + (y - y_k)^2}. \tag{4}$$

Neboť zřejmě bude-li bodový náboj q_k v bodě $z = z_k$ a ne v počátku, přejde (3) na tvar

$$\boldsymbol{E}_k = \frac{2q_k(z - z_k)}{|z - z_k|^2}.$$

Podle principu superposice je intensita pole systému nábojů rovna součtu intensit $\boldsymbol{E}_k$ jednotlivých nábojů. Sečtením dostáváme vzorec (4).

Příklad 3. Vektor rychlosti $\boldsymbol{V}$ *postupně proudící kapaliny* je konstantní co do velikosti i směru. Vybereme si za rovinu π_0 libovolnou

rovinu rovnoběžnou s rovinou vektorů $\boldsymbol{V}$. Pak je pohyb popsán rovinným polem konstantního vektoru

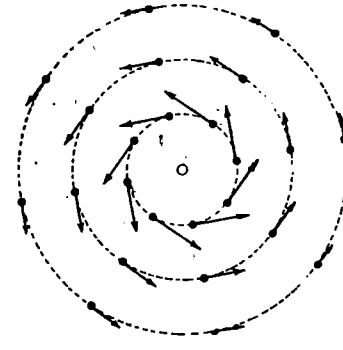
$$\boldsymbol{V} = V_x + \mathrm{i}V_y \tag{5}$$

($V_x = \text{const}$, $V_y = \text{const}$). Proudové čáry — proudnice — (silové čáry vektoru pole $\boldsymbol{V}$) tvoří svazek rovnoběžných přímek (obr. 58).

Příklad 4. Zkoumejme proudění kapaliny charakterisované vektorem rychlosti

$$\boldsymbol{V} = \frac{Q}{2\pi}\,\frac{z}{|z|^2}, \tag{6}$$

kde Q je reálná konstanta, jejíž fysikální význam se teprve ukáže. Proudnice tvoří svazek přímek s vrcholem v počátku (obr. 57). Pro $Q > 0$ mají vektory $\boldsymbol{V}$ směr od počátku, pro $Q < 0$ — k počátku. V obou dvou případech ubývá modul rychlosti s reciprokou hodnotou vzdálenosti od počátku. Pole se nazývá *rovinné pole bodového zdroje* (zřídla). V případě $Q < 0$ *rovinné pole bodového noru*. Rovinné pole bodového zřídla můžeme pokládat za pseudorovinné pole přímky, z níž vytéká kapalina do okolního prostoru.



Obr. 59.

Příklad 5. Zkoumejme proudění kapaliny charakterisované vektorem rychlosti

$$\boldsymbol{V} = \frac{\Gamma\mathrm{i}}{2\pi}\cdot\frac{z}{|z|^2} = -\frac{\Gamma y}{2\pi(x^2+y^2)} + \mathrm{i}\,\frac{\Gamma x}{2\pi(x^2+y^2)}, \tag{7}$$

kde Γ je reálná konstanta, jejíž fysikální smysl se objeví teprve později. V každém bodě z je vektor rychlosti vzhledem k vektoru z otočen o pravý úhel, a to proti pohybu ručiček hodinových pro $\Gamma < 0$ a souhlasně s ručičkami hodinovými pro $\Gamma < 0$. Z toho: proudnice tvoří kružnice se středem v počátku. Modulu rychlosti ubývá s reciprokou hodnotou $|z|$ (obr. 59). Takové pole se nazývá *rovinným víři-*

vým polem. Pro $\Gamma > 0$ kapalina víří proti pohybu hodinových ručiček, pro $\Gamma < 0$ souhlasně s jejich pohybem.

Příklad 6. *Tepelný tok bodového zdroje*

$$\mathbf{Q} = \frac{q}{2\pi} \frac{z}{|z|^2}, \tag{8}$$

kde q je reálná konstanta. Pole (8) je úplně shodné s rovinným polem bodového zdroje kapaliny (6).

§ 36. Vlastnosti rovinných vektorových polí. Zkoumejme nejprve rovinné elektrostatické pole tvořené libovolným systémem nábojů (bodových, přímkových i plošných). Podle Gaussovy věty, jejíž znalost předpokládáme, tok*) N vektoru intensity pole libovolnou uzavřenou křivkou C je roven 4π-násobku celkového náboje uzavřeného křivkou:

$$N = \oint_C (\boldsymbol{E}, \boldsymbol{n}^0)\, \mathrm{d}s = 4\pi q \tag{9}$$

(kde $\boldsymbol{n}^0$ je jednotkový vektor vnější normály ke křivce C). Gaussova věta objasňuje fysikální smysl toku vektoru intensity elektrostatického pole. Povrchovou hustotu náboje v libovolném bodě pole charakterisuje *divergence vektoru intensity* pole, která je, jak známo, definována takto:

$$\mathrm{div}\boldsymbol{E} = \lim_{\Delta\sigma \to 0} \frac{1}{\Delta\sigma} \oint_C (\boldsymbol{E}, \boldsymbol{n}^0)\, \mathrm{d}s = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y}, \tag{10}$$

kde $\Delta\sigma$ je ploška ohraničená libovolnou uzavřenou křivkou C, která ve svém vnitřku uzavírá zkoumaný bod. Limitní pochod provádíme pak zřejmě tak, aby křivka C přešla v limitě v náš zkoumaný bod. Podle vzorce (9) tok $\oint_C (\boldsymbol{E}, \boldsymbol{n}^0)\, \mathrm{d}s$ křivkou C je roven 4π-násobku celkového náboje Δq uvnitř křivky C a tedy

$$\mathrm{div}\boldsymbol{E} = 4\pi \lim_{\Delta\sigma \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta\sigma} = 4\pi\varrho, \tag{11}$$

*) D. Ilkovič: Vektorový počet, II. vyd., Přírodovědecké nakladatelství, Praha 1950 nebo M. Lagally: Vorlesungen über Vektorrechnung, Akademische Verlagsgesellschaft Leipzig 1928. [*Pozn. překl.*]

kde ϱ je plošná hustota náboje v bodě z. Z toho ihned plyne, že v bodě, v němž není žádný náboj, je

$$\mathrm{div}\boldsymbol{E} = 0. \tag{12}$$

Pole, jehož divergence je rovna nule identicky ve všech jeho bodech, se nazývá *solenoidální*. Z (10) a (12) plyne, že podmínku solenoidálnosti pole lze vyjádřit analyticky takto:

$$\mathrm{div}\boldsymbol{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} = 0. \tag{13}$$

Cirkulace vektoru intensity $\boldsymbol{E}$ podél uzavřené křivky C je

$$A = \oint_C (\boldsymbol{E}, \boldsymbol{s}^0)\, \mathrm{d}s, \tag{14}$$

kde $\boldsymbol{s}^0$ je jednotkový vektor tečny ke křivce C. Jeho fysikální význam: je to práce potřebná pro přenesení jednotkového náboje po křivce C.*) V důsledku konservativnosti elektrického pole je tato práce rovna nule. V opačném případě bychom po proběhnutí určité uzavřené dráhy kolem dokola určitým směrem získali práci konečnou a $\neq 0$. Opakováním tohoto procesu bychom dostali perpetuum mobile, což není možné.

Je tedy v každém bodě pole

$$(\mathrm{rot}\boldsymbol{E})_n = \lim_{\Delta\sigma\to 0} \frac{1}{\Delta\sigma} \oint_C (\boldsymbol{E}, \boldsymbol{s}^0)\, \mathrm{d}s = \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = 0, \tag{15}$$

kde $(\mathrm{rot}\boldsymbol{E})_n$ značí projekci rotace na normálu k plošce $\Delta\sigma$ ohraničené křivkou C (jediná nenulová komponenta rotace rovinného pole), kde při limitním pochodu se křivka C, obklopující zkoumaný bod, v tento bod stahuje. Pole, jehož rotace je v celém poli identicky rovna nule, se nazývá *potenciální* (nerotační, irrotacionální, nevírové). Vzorec (15) pak ukazuje, že *elektrostatické pole je všude potenciální.*

Zkoumejme jiné druhy polí. Pro rovinné proudění kapaliny je tok vektoru rychlosti $\boldsymbol{V}$ uzavřenou křivkou C roven

$$Q = \oint_C (\boldsymbol{V}, \boldsymbol{n}^0)\, \mathrm{d}s \tag{16}$$

*) Skalární součin $(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{s}^0)\, \mathrm{d}s = E_s\, \mathrm{d}s$ vyjadřuje element práce. Integrováním podél C dostaneme úhrnnou práci podél křivky C.

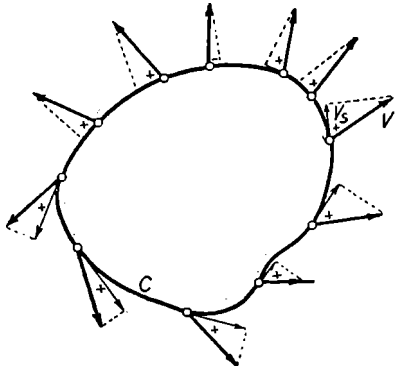
Fysikálně značí množství kapaliny protékající za jednotku časovou uzavřenou křivkou C ven.*) Na př. pro rovinné pole bodového zdroje (§ 34 př. 4) a kružnici $|z| = r$ máme $(\boldsymbol{V}, \boldsymbol{n}^0) = \pm |\boldsymbol{V}| = \frac{Q}{2\pi r}$ a

$$\oint_C (\boldsymbol{V}, \boldsymbol{n}^0)\, \mathrm{d}s = \oint_C \frac{Q}{2\pi r}\, \mathrm{d}s = \frac{Q}{2\pi r}\, 2\pi r = Q.$$

Tím je vyjasněn i fysikální smysl konstanty Q ve vzorci (6). Jestliže je pro nějakou uzavřenou křivku tok kapaliny nenulový a kladný, pak v důsledku *nestlačitelnosti* kapaliny, kterou předpokládáme, musí ležet uvnitř křivky nějaká zřídla. V případě záporného toku leží uvnitř křivky nějaké nory.

Divergence rychlosti

$$\mathrm{div}\boldsymbol{V} = \lim_{\Delta\sigma \to 0} \frac{1}{\Delta\sigma} \oint_C (\boldsymbol{V}, \boldsymbol{n}^0)\, \mathrm{d}s = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} \tag{17}$$



Obr. 60.

charakterisuje intensitu (vydatnost) zdroje (noru). Fakt, že *v jisté oblasti neexistuje ani zřídlo ani nor při proudění nestlačitelné (incompressibilní) kapaliny vyjádříme analyticky* tedy takto

$$\mathrm{div}\boldsymbol{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} = 0. \tag{18}$$

Cirkulace rychlosti podél uzavřené křivky C je

$$\Gamma = \oint_C (\boldsymbol{V}, \boldsymbol{s}^0)\, \mathrm{d}s \tag{19}$$

a rovná se tedy integrálu z projekce vektoru $\boldsymbol{V}$ na tečnu ke křivce C. Jestliže je pro nějakou křivku cirkulace různá od nuly, převládají v integrálu (19) projekce jednoho znaménka nad projekcemi druhého

*) D. Ilkovič: Vektorový počet, II. vyd., Přírodovědecké nakladatelství, Praha 1950. [*Pozn. překl.*]

znaménka (viz obr. 60, kde převládají projekce kladného znaménka). Na př. pro rovinné vířivé pole (§ 35 př. 5) a pro křivku $|z| = r$ máme $(\boldsymbol{V}, \boldsymbol{s}^0) = \pm |\boldsymbol{V}| = \frac{\Gamma}{2\pi r}$ a

$$\oint_C (\boldsymbol{V}, \boldsymbol{s}^0)\, \mathrm{d}s = \oint_C \frac{\Gamma}{2\pi r}\, \mathrm{d}s = \frac{\Gamma}{2\pi r}\, 2\pi r = \Gamma.$$

Tím je objasněn i fysikální smysl konstanty Γ ve vzorci (7).

Rotace rychlosti v jistém bodě pole je dána vztahem

$$(\mathrm{rot}\boldsymbol{V})_n = \lim_{\Delta\sigma \to 0} \frac{1}{\Delta\sigma} \oint_C (\boldsymbol{V}, \boldsymbol{s}^0)\, \mathrm{d}s = \frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y}$$

a charakterisuje vířivost pole v okolí tohoto bodu. Body s nenulovou rotací se nazývají *víry*.

Analytické vyjádření stacionárního nevířivého rovinného proudění má tvar

$$(\mathrm{rot}\boldsymbol{V})_n = \frac{\partial V_x}{\partial x} - \frac{\partial V_y}{\partial y} = 0. \tag{20}$$

Zkoumejme ještě stacionární rovinné tepelné proudění. V theorii tepelné vodivosti se dokazuje, že množství tepla protékajícího za jednotku času elementem délky je úměrné elementu délky a derivaci temperatury ve směru normály $\frac{\partial v}{\partial n}$, t. j.

$$-k \frac{\partial v}{\partial n}\, \mathrm{d}s = (-k \,\mathrm{grad}\, v,\ \boldsymbol{n}^0)\, \mathrm{d}s = (\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{n}^0)\, \mathrm{d}s,$$

kde k je koeficient vnitřní tepelné vodivosti. Znaménko minus bereme proto, že teplo teče s míst o vysokém tepelném obsahu na místa s nižším tepelným obsahem (t. j. proti směru grad v).

Tok vektoru uzavřenou křivkou C tedy udává množství tepla protékajícího za jednotku času z kontury ven a divergence $\boldsymbol{Q}$ v jistém bodě

$$\mathrm{div}\boldsymbol{Q} = \lim_{\Delta\sigma \to 0} \frac{1}{\Delta\sigma} \oint_C (\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{n}^0)\, \mathrm{d}s = \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y}$$

charakterisuje vydatnost tepelného zdroje umístěného v tomto bodě.

Fakt, že *neexistují zdroje tepla při stacionárním rovinném tepelném proudění je analyticky vyjádřen takto*:

$$\operatorname{div}\mathbf{Q} = \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} = 0. \tag{21}$$

Pokládáme-li k za konstantu, je

$$\operatorname{rot}\mathbf{Q} = -k \operatorname{rot} \operatorname{grad} v = 0$$

a pole je potenciální

$$\frac{\partial Q_y}{\partial x} - \frac{\partial Q_x}{\partial y} = 0. \tag{22}$$

§ 37. Potenciál a silová funkce. Protože každé elektrostatické pole je potenciální, platí v něm všude

$$(\operatorname{rot}\mathbf{E})_n = \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = 0 \tag{15}$$

a existuje funkce $V = V(x, y)$, jejíž totální diferenciál má tvar

$$\mathrm{d}V = -E_x \,\mathrm{d}x - E_y \,\mathrm{d}y$$

nebo, což jest totéž,

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}. \tag{23}$$

Důkaz je snadný. Jak známo, je výraz $P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$ tehdy a jen tehdy totálním diferenciálem jisté funkce, je-li $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.*) Pro výraz $-E_x\,\mathrm{d}y - E_y\,\mathrm{d}y$ je tato podmínka splněna podle rovnice (15) $\frac{\partial E_x}{\partial y} = \frac{\partial E_y}{\partial x}$. Funkce $V(x, y)$ je pak definována svým diferenciálem a integrací dostaneme

$$V(x, y) = -\int_{z_0}^{z} {}_L E_x \,\mathrm{d}x + E_y \,\mathrm{d}y + C, \tag{24}$$

*) Viz Vojtěch: Základy vyšší matematiky II, str. 252, vyd. VI., 1946, JČMF Praha nebo K. Petr: Počet integrální str. 458, vyd. II., 1931 JČMF Praha [*Pozn. překl.*]

kde integrujeme podél libovolné cesty spojující daný bod z_0 našeho pole s libovolným bodem $z = x + iy$. C je libovolná konstanta.

Rovnice (23) je možno psát kratčeji ve vektorovém tvaru

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial V}{\partial x} - i\frac{\partial V}{\partial y} = -\operatorname{grad} V. \tag{25}$$

Funkce $V(x, y)$ se nazývá *potenciální funkce* (*potenciál*) *pole*, křivky $V(x, y) = \text{const}$ se nazývají *ekvipotenciální křivky*. Z rovnice (25) je ihned vidět, že v každém bodě pole vektor intensity $\mathbf{E}$ má směr normály k ekvipotenciální křivce.

Snadno se vyjádří pomocí potenciálu práce, kterou musíme vykonat při přenesení náboje $q = +1$ z bodu $z_1 = x_1 + iy$, do bodu $z_2 = x_2 + iy_2$ (podle rovnice (15) je nezávislá na zvolené cestě). Je $\mathbf{E} = -\frac{\partial V}{\partial x} - i\frac{\partial V}{\partial y}$ a $\mathbf{s}^0\,ds = dx + i\,dy = dz$ je vektor délky ds ve směru tečny k C, dále $(\mathbf{E}, \mathbf{s}^0)\,ds = -\frac{\partial V}{\partial x}\,dx - \frac{\partial V}{\partial y}\,dy = d\,V(x, y)$ a konečně hledaná práce

$$A = -\int_C (\mathbf{E}, \mathbf{s}^0)\,ds = \int_C dV(x, y) = V(x_2, y_2) - V(x_1, y_1) \tag{26}$$

je rovna rozdílu potenciálů v koncových bodech.

Příklad 1. Pro *rovinné pole bodového náboje* q složky vektoru intensity jsou

$$E_x = \frac{2qx}{x^2 + y^2}, \quad E_y = \frac{2qy}{x^2 + y^2}$$

a podle (24) je potenciál tohoto pole

$$V = -2q\int_{z_0}^{z}{}_L \frac{x\,dx + y\,dy}{x^2 + y^2} = -q\ln(x^2 + y^2) + C = 2q\ln\frac{1}{|z|} + C,$$

kde L je libovolná cesta s koncovými body z_0 a z neprocházející bodem $z = 0$, a C libovolná konstanta. Pro $z = \infty$ potenciál zřejmě vzrůstá nade všechny meze. Ekvipotenciální čáry jsou soustředné kružnice

se středem v počátku (obr. 57). Je-li náboj q v bodě ζ, pak potenciál pole, jak je ihned vidět,

$$V = 2q \ln \frac{1}{|z - \zeta|} + C. \tag{27}$$

Příklad 2. *Potenciál pole homogenně nabité křivky* je*)

$$V = \int_L 2\eta(\zeta) \ln \frac{1}{|z - \zeta|} \, \mathrm{d}s, \tag{28}$$

kde ζ je proměnný bod čáry L, reálná funkce $\eta(\zeta)$ je lineární hustota náboje v bodě ζ a $\mathrm{d}s$ element oblouku. Abychom dokázali vzorec (28) rozdělíme křivku L na n dílků délky Δs_k ($k = 1, 2, \ldots, n$) a zaměníme přibližně náboj na L systémem bodových nábojů velikosti $\eta(\zeta_k)\,\Delta s_k$ v bodech ζ_k (ζ_k leží na obloučku Δs_k). Pro hledaný potenciál pak dostaneme přibližnou hodnotu

$$V \approx \sum_{k=1}^{n} 2\eta(\zeta_k) \ln \frac{1}{|z - \zeta_k|} \Delta s_k$$

a přejdeme-li k limitě pro $n \to \infty$ a $\Delta s_k \to 0$, dostaneme přesné vyjádření pomocí integrálu (28).

Příklad 3. *Potenciál pole homogenní nabité oblasti**) se vypočte podle vzorce

$$V = \int_D \int 2\varrho(\zeta) \ln \frac{1}{|z - \zeta|} \, \mathrm{d}\sigma, \tag{29}$$

kde ζ je proměnný bod oblasti D, $\varrho(\zeta)$ plošná hustota náboje v bodě ζ a $\mathrm{d}\sigma$ element plochy. Odvození vzorce (29) je zcela obdobné odvození vzorce (28).

Zkoumejme velikost potenciálu rovinného pole *v nekonečně vzdáleném bodě*. Vezměme konkretní případ pole křivky L, která se celá rozprostírá v konečnu a je nabita s délkovou hustotou $\eta(\zeta)$. Nechť

*) V prostoru tomu odpovídá pole cylindrické plochy s vytvářejícími přímkami kolmými k rovině z a křivkou L jako řídicí. Plocha je nabita homogenně s plošnou hustotou $\eta(\zeta)$).

*) V prostoru tomu odpovídá pole cylindrického tělesa homogenně nabitého s prostorovou hustotou $\varrho(\zeta)$.

mimo ni leží bodový náboj v bodě ζ_0 velikosti $q = \int_L 2\eta(\zeta)\,\mathrm{d}s$. Bod ζ_0 leží v konečnu. Provedeme superposici obou polí a máme pro rozdíl potenciálů

$$V - V_0 = \int_L 2\eta(\zeta) \ln \frac{1}{|z-\zeta|}\,\mathrm{d}s - 2\ln\frac{1}{|z-\zeta_0|}\int_L 2\eta(\zeta)\,\mathrm{d}s =$$

$$= \int_L 2\eta(\zeta) \ln \left|\frac{z-\zeta_0}{z-\zeta}\right| \mathrm{d}s = \alpha$$

Protože oba body ζ a ζ_0 leží v konečnu, bude pro $z \to \infty$ $\left|\frac{z-\zeta_0}{z-\zeta}\right| \to 1$ stejnoměrně (podle ζ), a podobně i $\ln\left|\frac{z-\zeta_0}{z-\zeta}\right| \to 0$ stejnoměrně, z čehož konečně plyne $\alpha \to 0$. Tedy

$$V = V_0 + \alpha = 2q \ln \frac{1}{|\zeta_0 - z|} + \alpha,$$

kde q je úhrnný náboj křivky L, ζ_0 libovolný bod mimo ni a $\alpha \to 0$ pro $z \to \infty$.

Stejně tak bychom se přesvědčili o správnosti vztahu (30) i pro rovinné pole nabité oblasti a nebo obecně pro jakýkoliv systém bodových, křivkových či plošných nábojů ležících v konečnu. Při tom bude q patrně vždy značit úhrnný náboj.

Z (30) bezprostředně plyne, že *pro* $\varrho \neq 0$ *potenciál pole neomezeně vzrůstá pro* $z \to \infty$ a potenciál takového rovinného pole nelze definovat jako práci vykonanou přenesením jednotkového positivního náboje do bodu $z = \infty$ [srov. s (26)]. *Je-li úhrnný náboj* $q = 0$, *pak zřejmě pro* $z \to \infty$ *potenciál konverguje k nule.*

Přejděme k určení silové funkce. Budiž dána oblast D taková, že v ní neleží žádné zdroje ani nory (pole je uvnitř této oblasti solenoidální). Pak v této oblasti platí rovnice

$$\mathrm{div}\boldsymbol{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} = 0. \tag{13}$$

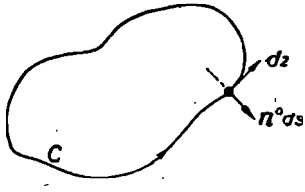
Z toho ihned plyne, že výraz $-E_y\,\mathrm{d}x + E_x\,\mathrm{d}y$ je totálním diferenciálem jisté funkce U v oblasti D, a v D platí

$$E_x = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad E_y = -\frac{\partial U}{\partial x}. \tag{31}$$

Funkce $U(x, y)$ je pak v oblasti D určena integrálem

$$U(x, y) = \int_{z_0}^{z} -E_y \, dx + E_x \, dy + C, \qquad (32)$$
L

kde integrujeme po libovolné křivce L, která leží celá uvnitř D a jejíž koncové body jsou daný bod z_0 a proměnný bod z; C je libovolná konstanta.



Obr. 61.

Z (31) je vidět, že ve všech bodech křivky $U(x, y) = \text{const}$ je směrnice tečny

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\dfrac{\partial U}{\partial x}}{\dfrac{\partial U}{\partial y}} = \frac{E_y}{E_x}$$

shodná se směrnicí vektoru pole $\boldsymbol{E}$. Tedy křivky $u(x, y) = \text{const}$ jsou silové křivky pole a budeme ve shodě s tím nazývat funkci $U(x, y)$ *silovou funkcí pole.*

Pomocí silové funkce pole můžeme snadno vyjádřit úhrnný náboj pole ležící uvnitř jisté uzavřené křivky C. Z (31) plyne $\boldsymbol{E} = \dfrac{\partial U}{\partial y} - i\dfrac{\partial U}{\partial x}$ a jednotkový vektor vnější normály $\boldsymbol{n}^0$ ke křivce C dostaneme z vektoru tečny otočením o pravý úhel (viz obr. 61) ve směru hodinových ručiček a máme postupně $\boldsymbol{n}^0 \, ds = -i \, dz = dy - i \, dx$, t. j. $(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{n}^0) \, ds = \dfrac{\partial U}{\partial y} dy + \dfrac{\partial U}{\partial x} dx = dU(x, y)$. Pak aplikujeme větu Gaussovu a *úhrnný náboj pole uvnitř uzavřené křivky* L je roven

$$q = \frac{1}{4\pi} \oint_C (\boldsymbol{E}, \boldsymbol{n}^0) \, ds = \frac{1}{4\pi} \oint_C dU(x, y). \qquad (33)$$

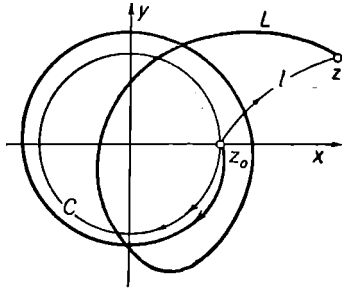
Příklad. Pro rovinné pole bodového náboje jsou komponenty vektoru intensity pole

$$E_x = \frac{2qx}{x^2 + y^2}, \quad E_y = \frac{2qy}{x^2 + y^2},$$

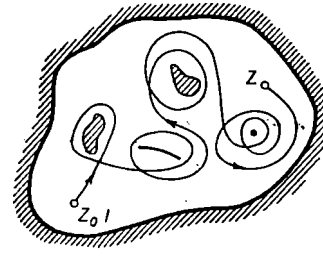
z toho podle (32)

$$U(x, y) = 2q \int_{z_0 L}^{z} \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2 + y^2} = 2q \operatorname{Arctg} \frac{y}{x} + C = 2q \operatorname{Arg} z + C, \tag{34}$$

kde L je libovolná cesta mající konečné body z_0 a z, neprocházející bodem $z = 0$. Ve vzorci (34) položíme $z_0 = 1$ a za $\operatorname{Arg} z$ vezmeme tu hodnotu argumentu, kterou dostaneme z hlavní větve $\arg z_0 = 0$ při spojitém pokračování podél křivky L. Tato hodnota se zřejmě nezmění, zaměníme-li cestu L libovolnou jinou cestou L', mající koncové body z_0 a z, takovou, že mezi L a L' neleží bod $z = 0$. Cestu L můžeme



Obr. 62.



Obr. 63.

zřejmě nahradit cestou l, spojující $z_0 = 1$ s z a ležící cele buď v horní nebo dolní polorovině a kružnicí C, která prochází jistým bodem n-krát (obr. 62, $n = 2$).

Integrál podél l nám dá hlavní hodnotu $\arg z$ a podél C hodnotu $\pm 2n\pi$, kde znaménko závisí na směru oběhu*) a tedy

$$U(x, y) = 2q \arg z \pm 2n\pi q + C.$$

Vidíme, že v našem případě je funkce $U(x, y)$ **mnohoznačná.**

Poznámka. Dodejme, že funkce definovaná svým totálním diferenciálem v jednoduše souvislé oblasti je jednoznačná. Mnohoznačnost

* Znaménko + odpovídá kladnému a znaménko — zápornému smyslu oběhu.

funkce (34) v předcházejícím případě je způsobena vícenásobnou souvislostí zkoumané oblasti (otevřená rovina s vyňatým bodem $z = 0$).

Při konstrukci silových a potenciálních funkcí elektrostatických polí máme velmi často co činit s mnohonásobně souvislými oblastmi. To je způsobeno tím, že funkce E_x a E_y jsou nespojité v jistých bodech (na jistých křivkách, v jistých oblastech), v nichž jsou rozloženy náboje pole, a takové body, křivky nebo oblasti pak musíme vyloučit z uvažované oblasti D, která je pak jistým způsobem „proděravěna".

Tak jako právě v uvažovaném případě zůstane obecně hodnota funkce $U(x, y)$ definované svým totálním diferenciálem beze změny při libovolné deformaci cesty L uvnitř oblasti tak, aby oblast mezi křivkou L a její deformací zůstala jednoduše souvislá! Ale při oběhu oblasti „díry" se hodnota funkce $U(x, y)$ změní podle toho, je-li integrál

$$c_k = \oint_{C_k} \frac{\partial U}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial U}{\partial y}\,\mathrm{d}y \tag{35}$$

podél uzavřené křivky, obsahující ve svém vnitřku oblast „díry", roven nule nebo od nuly různý. Jako v našem speciálním případě je možno dokázat, že hodnoty (obecně mnohoznačné) funkce $U(x, y)$ v daném bodě dostaneme podle vzorce

$$U(x, y) = U_0(x, y) + n_1 c_1 + n_2 c_2 + \ldots + n_m c_m, \tag{36}$$

kde $U_0(x, y)$ je daná hodnota funkce a $c_1, c_2, \ldots, c_m$ integrály (35) integrované po všech křivkách obsahujících všechny „díry" oblasti D a čísla $n_1, n_2, \ldots. n_m$ jsou celá (kladná, záporná nebo rovna nule) čísla udávající počet a smysl oběhů kolem děr po křivkách, které je obchvacují.

Integrály (35) se nazývají *cyklické konstanty* funkce $U(x, y)$ v oblasti D a ze vzorce (35) plyne, že *funkce $U(x, y)$ je tehdy a jen tehdy jednoznačná, jsou-li všechny její konstanty v dané oblasti rovny nule.*

Tento poslední případ nastává pro potenciál, neboť, jak víme z § 36, je práce podél libovolné uzavřené křivky rovna nule a jsou tedy nule rovny i všechny cyklické konstanty a můžeme vyslovit větu: *Potenciál rovinného elektrostatického pole je funkce všude jednoznačná.*

Naproti tomu, jak ukazuje vzorec (33), cyklická konstanta silové

funkce při oběhu díry s úhrnným nábojem q je rovna $4\pi q$. Silová funkce rovinného elektrostatického pole je mnohoznačná.

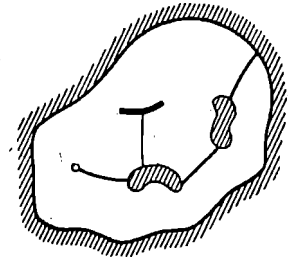
§ 38. Komplexní potenciál v elektrostatice. Porovnáním rovnic (23) a (31) vidíme, že v oblasti D, která neobsahuje žádné náboje, jsou potenciál a silová funkce vázány vztahy

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y}, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial V}{\partial x}. \tag{37}$$

Je-li oblast D jednoduše souvislá, budou v ní, jak bylo ukázáno v předešlém paragrafu, obě funkce jednoznačné. Pak můžeme rovnice (37), které mají zřejmě tvar rovnic Cauchy-Riemannových z § 14, považovat za podmínku regularity funkce komplexní proměnné

$$w = F(z) = U(x, y) + \mathrm{i}V(x, y). \tag{38}$$

Tuto funkci nazýváme *komplexním potenciálem* elektrostatického pole. Podobně jako funkce $U(x, y)$ a $V(x, y)$ je i komplexní potenciál jednoznačně určen až na jistou adiční konstantu.



Obr. 64.

Ve vícenásobně souvislé oblasti je obecně komplexní potenciál víceznačnou funkcí následkem mnohoznačnosti své reálné části. Jak vyplývá z úvah předcházejícího paragrafu, v libovolné jednoduše souvislé oblasti, kterou obdržíme z mnohonásobně souvislé oblasti vhodnými výřezy (obr. 64) nebo v obecně jednoduše souvislé oblasti, je možno konstruovat regulární větve komplexního potenciálu. Komplexní potenciál je v dalším případem analytické mnohoznačné funkce (její obecnou definici, viz § 63).

V důsledku jednoznačnosti derivací (37) mají všechny větve komplexního potenciálu jednu a tutéž derivaci v daném bodě. Tuto jednoznačnou funkci nazýváme derivací komplexního potenciálu.

Pomocí komplexního potenciálu je možno vyjádřit všechny základní veličiny spojené s pojmem pole. Tak na př. podle (37) a (23) máme

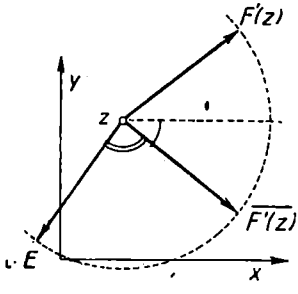
$$F'(z) = \frac{\partial U}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial y} + \mathrm{i}\frac{\partial V}{\partial x} = -E_y - \mathrm{i}E_x = -\mathrm{i}(E_x - \mathrm{i}E_y),$$

odtud $E_x = \mathrm{i}E_y = \mathrm{i}F'(z)$. Pomocí komplexně sdružených veličin snadno vyjádříme vektor intensity pole

$$\boldsymbol{E} = E_x + \mathrm{i}E_y = -\mathrm{i}\overline{F'(z)}. \tag{39}$$

Vzorec (39) ukazuje, že ke konstrukci vektoru intensity z vektoru derivace $F'(z)$ stačí poslední převrátit podle reálné osy a pak pootočit o pravý úhel ve směru pohybu ručiček hodinových (obr. 65). Z téhož vzorce plyne ještě, že *modul vektoru intensity pole* je

$$E = |\boldsymbol{E}| = |F'(z)| = \sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2}. \tag{40}$$



Obr. 65.

Komplexní potenciál zprostředkuje zobrazení pole roviny (z) na rovinu (w), jež je konformní ve všech bodech oblasti D, v nichž je intensita pole od nuly různá. Podle definice odpovídají tedy silovým a ekvipotenciálním čarám rovnoběžky s osami U a V. Známe-li tedy komplexní potenciál pole, můžeme (principiálně, ne vždy prakticky) sestrojit jeho silové a ekvipotenciální čáry, čili jak říkáme, můžeme „pole zmapovat".

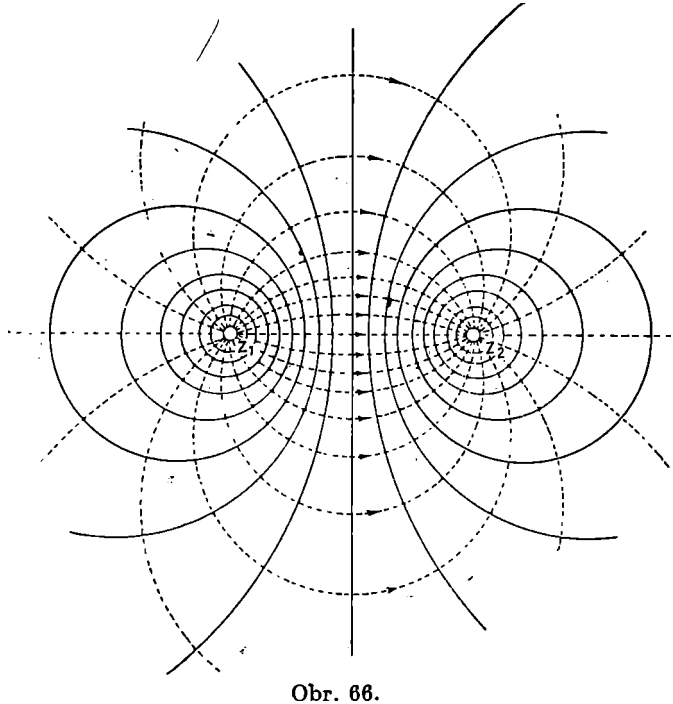
Jak jsme řekli již výše, je komplexní potenciál určen až na adiční konstantu jednoznačně. Protože velikost této adiční konstanty nemá vliv ani na mapu pole ani na intensitu pole, budeme ji v dalších úvahách prostě vypouštět.

Dokázali jsme si tedy, že libovolnému elektrostatickému poli bez nábojů v jisté jednoduše souvislé oblasti je přiřazena regulární funkce — jeho komplexní potenciál. Tvrzení platí však i naopak: *Je-li dána v libovolné jednoduše souvislé oblasti D jistá regulární funkce $F(z) = U(x, y) + \mathrm{i}V(x, y)$, pak jí odpovídá pole, jehož náboje leží vně oblasti D a jehož komplexní potenciál je právě funkce $F(z)$.*

Důkaz: Uvažujme pole vektorů $\boldsymbol{E} = -\mathrm{i}\overline{F'(z)}$. Z Cauchy-Riemannových rovnic plyne, že toto pole je v oblasti regularity funkce $F(z)$

potenciální a solenoidální, a je to tedy jisté elektrostatické pole. Existuje tedy v jistém, námi podrobně vyloženém smyslu, úplné přiřazení navzájem mezi elektrostatickými poli a regulárními funkcemi.

Příklad 1. *Pole bodového náboje* velikosti q, který je umístěn v počátku. Potenciál i silovou funkci našeho pole jsme si odvodili již



Obr. 66.

dříve (vzorce (27) a (34) předešlého §) a pro komplexní potenciál máme ihned

$$w = F(z) = 2q \operatorname{Arg} z + 2q\,\mathrm{i} \ln \frac{1}{|z|} = 2qi \left\{ \ln \frac{1}{|z|} + \mathrm{i} \operatorname{Arg} \frac{1}{z} \right\} =$$

$$= 2qi \operatorname{Ln} \frac{1}{z}.$$

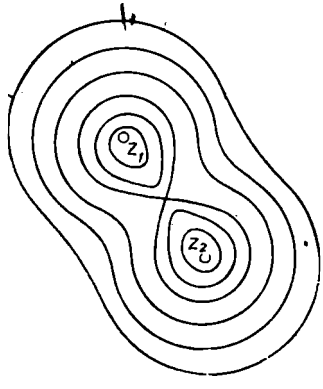
Mapa tohoto pole je zobrazena na obr. 57. Komplexní potenciál zobrazí dvojnásobně souvislou oblast (otevřenou rovinu s vyňatým

počátkem) na jednoduše souvislou oblast (otevřenou rovinu). To není ovšem nijak ve sporu s tvrzením § 23, neboť zobrazení je mnohoznačné. Je-li náboj v bodě $z = z_0$ a ne v počátku, pak je potenciál roven

$$w = 2qi \operatorname{Ln} \frac{1}{z - z_0}. \tag{41}$$

Příklad 2. Pro *systém dvou bodových nábojů* velikosti $+q$ a $-q$ v bodech z_1 a z_2 je komplexní potenciál

$$w = 2qi \operatorname{Ln} \frac{1}{z - z_1} - 2qi \operatorname{Ln} \frac{1}{z - z_2} = 2qi \operatorname{Ln} \frac{z - z_2}{z - z_1}. \tag{42}$$



Obr. 67.

Ekvipotenciální čáry pole jsou křivky

$$\operatorname{Im} w = 2q \ln \left| \frac{z - z_2}{z - z_1} \right| = \text{const},$$

což jest totéž jako

$$\left| \frac{z - z_2}{z - z_1} \right| = \text{const},$$

což jsou Apolloniovy kružnice, podle nichž jsou oba body z_1 a z_2 sdruženy (viz § 20). Silové čáry

$$\operatorname{Re} w = 2q \operatorname{Arg} \frac{z - z_2}{z - z_1} = \text{const}$$

jsou kružnice procházející body z_1 a z_2 (viz § 20). Na obr. 66 jsou ekvipotenciální čáry vytaženy plně a silové čáry čárkovaně.

Příklad 3. Pro *systém souhlasných bodových nábojů* velikosti q máme pro potenciál místo (42) vztah

$$w = 2q \operatorname{i} \operatorname{Ln} \frac{1}{z - z_1} + 2q \operatorname{i} \operatorname{Ln} \frac{1}{z - z_2} = 2qi \operatorname{Ln} \frac{1}{(z - z_1)(z - z_2)}. \tag{43}$$

Ekvipotenciální čáry

$$|z - z_1| \, |z - z_2| = \text{const}$$

jsou Cassiniho ovály. Jsou to geometrická místa bodů, jejichž součin vzdáleností od dvou daných pevných bodů z_1 a z_2 je konstantní (viz

př. 12 úvod). Pro const $= \frac{|z_1 - z_2|^2}{4}$ je to Bernouilliho lemniskata, pro const $= 0$ se rozpadnou v dvojici bodů z_1, z_2, pro $0 <$ const $<$ $< \frac{|z_1 - z_2|^2}{4}$ se rozpadnou ve dvojici křivek oválovitého tvaru a konečně pro $\frac{|z_1 - z_2|^2}{4} <$ const jsou tvořeny jedinou čarou, která má tvar promáčknutého oválu (viz obr. 67).

Příklad 4. Pro *systém bodových nábojů* $q_1, q_2, \ldots, q_n$ v bodech $z_1, z_2, \ldots, z_n$ má komplexní potenciál tvar

$$w = 2\mathrm{i} \sum_{k=1}^{n} q_k \operatorname{Ln} \frac{1}{z - z_k}. \tag{41}$$

Příklad 5. *Elektrostatické pole dipolu.* Dvojice nesouhlasných bodových nábojů $\pm q$ v bodech $z_1 = 0$ a $z_2 = -h$ má podle vzorce (37) komplexní potenciál

$$w = 2q\mathrm{i} \operatorname{Ln} \frac{z + h}{z} = 2q\mathrm{i} \operatorname{Ln} \left(1 + \frac{h}{z}\right) = 2p\mathrm{i} \operatorname{Ln} \left(1 + \frac{h}{z}\right)^{\frac{1}{h}},$$

kde $p = qh$. Budeme nyní náboje přibližovat k sobě a současně zvětšovat velikost náboje tak, aby součin $p = qh$ zůstal konstantní. Limitní případ, který tak dostaneme, budeme nazývat *bodový dipol s momentem p.*

Komplexní potenciál dipolu ležícího v počátku bude

$$w = 2p\mathrm{i} \lim_{h \to 0} \operatorname{Ln} \left(1 + \frac{h}{z}\right)^{\frac{1}{h}} = 2p\mathrm{i} \operatorname{Ln} \mathrm{e}^{\frac{1}{z}} = \frac{2p\mathrm{i}}{z}. \tag{45}$$

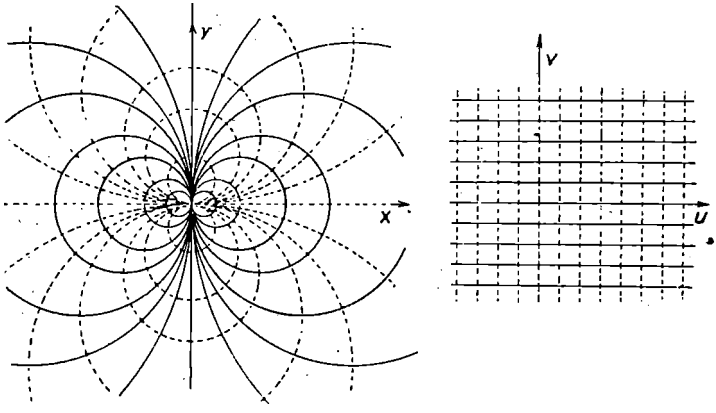
Je to lineární lomená funkce (při výpočtu jsme použili vzorců (24) a (32) kap. III).*) Mapa pole je konformně ekvivalentní síť k síti kartézských souřadnic v rovině (w) při zobrazení

$$w = \frac{2p\mathrm{i}}{z}.$$

Ekvipotenciální čáry $V = c$ tvoří na kouli (w) svazek kružnic dotýka-

*) Při použití vzorce (24) stačí dosadit $h = \frac{1}{n}$. Ve vzorci (32) jsme vypustili adiční konstantu $2k\pi\mathrm{i}$.

jících se v bodě $w = \infty$. Podle věty (4) kap. II odpovídá tomuto svazku svazek kružnic dotýkajících se v bodě $z = 0$. Reálné ose $V = 0$ odpovídá imaginární osa $x = 0$ (při dosazení reálných z do (36) dostáváme ryze imaginární w). Ekvipotenciální čáry v rovině z tvoří tedy svazek kružnic dotýkajících se osy y (na obr. 68 zakresleny plně). Zcela analogicky odvodíme, že silové čáry tvoří svazek kružnic dotýkajících se osy x (na obr. 68 vytaženy čárkovaně).



Obr. 68.

Vektor intensity pole odvodíme podle (39) a dostaneme

$$E = + \mathrm{i}\left(\overline{\frac{2p\mathrm{i}}{z^2}}\right) = \frac{2p}{z^2} = \frac{2p}{r^2}\,\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\varphi},$$

kde $z = re^{\mathrm{i}\varphi}$. Jeho modul je nepřímo úměrný čtverci vzdálenosti bodu od dipolu, jeho složky jsou

$$E_x = \frac{2p\cos 2\varphi}{r^2},\quad E_y = \frac{2p\sin 2\varphi}{r^2}.$$

§ 39. Komplexní potenciál v hydromechanice a theorii vedení tepla. Pro oblast D, ve které nejsou ani zřídla ani víry při stacionárním proudění nestlačitelné kapaliny, plyne z analytického vyjádření

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} = 0,\quad \frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} = 0,$$

že v oblasti D jsou výrazy $-V_y\,dx + V_x\,dy$ a $V_x\,dx + V_y\,dy$ totálními diferenciály jistých funkcí:

$$-V_y\,dx + V_x\,dy = d\psi(x, y);\ V_x\,dx + V_y\,dy = d\varphi(x, y). \tag{46}$$

Druhou z nich nazýváme potenciální a platí

$$V_x = \frac{\partial\varphi}{\partial x},\ V_y = \frac{\partial\varphi}{\partial y},\quad V = \operatorname{grad}\varphi(x, y); \tag{47}$$

$$\varphi(x, y) = \int_{z_0}^{z}{}_{L} V_x\,dx + V_y\,dy + C.$$

Pomocí funkce φ můžeme vyjádřit cirkulaci vektoru rychlosti podél uzavřené křivky C. Je (viz str. 121)

$$(\boldsymbol{V}, \boldsymbol{s}^0)\,ds = (\boldsymbol{V}, dz) = (V_x + iV_y,\ dx + i\,dy) = V_x\,dx + V_y\,dy$$

a podle poslední rovnice (46) je poslední výraz roven $d\varphi(x, y)$ a *cirkulace vektoru rychlosti*

$$\Gamma = \oint_C (\boldsymbol{V}, \boldsymbol{s}^0)\,ds = \oint_C d\varphi(x, y). \tag{48}$$

Ekvidistantní čáry $\psi(x, y) = c$ prvé funkce souhlasí s trajektoriemi pohybujících se částic kapaliny, t. j. s proudovými čarami kapaliny. Proto nazýváme druhou funkci *proudovou funkcí* a je

$$V_x = \frac{\partial\psi}{\partial x},\ V_y = -\frac{\partial\psi}{\partial y};$$

$$\psi(x, y) = \int_{z_0}^{z}{}_{L_1} -V_y\,dx + V_x\,dy + C. \tag{49}$$

Ve vzorcích (49) a (47) mají křivky L a L_1 tentýž smysl jako v (24) a (32).

Pomocí proudové funkce ψ můžeme vyjádřit *tok kapaliny* křivkou ležící cele v oblasti D. Je (viz str. 124)

$$(\boldsymbol{V}, \boldsymbol{n}^0)\,ds = (\boldsymbol{V}, -i\,dz) = (V_x + iV_y,\ dy - i\,dx) = V_x\,dy - V_y\,dx.$$

Podle rovnice (46) je poslední výraz roven $d\psi$ a tok

$$Q = \int_C (\boldsymbol{V}, \boldsymbol{n}^0)\,ds = \int_C d\psi = \psi(x_2, y_2) - \psi(x_1, y_1), \tag{50}$$

kde $z_1 = x_1 + iy_1$ a $z_2 = x_2 + iy_2$ jsou koncové body křivky C.

Funkce

$$w = \Phi(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y) \tag{51}$$

se nazývá *komplexním potenciálem proudění*. Rovnice (47) a (49) ukazují, že *komplexní potenciál proudění je jednoznačná funkce* v jednoduše souvislé oblasti D, která neobsahuje ani zřídel ani vírů.

Podle vzorce (48) je v případě vícenásobně souvislé oblasti cyklická konstanta funkce $\varphi(x, y)$ při oběhu jisté „díry" jen tehdy nenulová, je-li při tom nenulová cirkulace Γ (t. j. je-li nenulová celková vydatnost vírů v této oblasti). Z (50) pak vidíme, že cyklická konstanta funkce $\psi(x, y)$ je nenulová při oběhu jisté díry jen tehdy, je-li $Q \neq 0$ (t. j. je-li nenulová vydatnost všech zřídel v této díře). Zřejmě tedy ve vícenásobně souvislé oblasti se může jak reálná tak i imaginární část funkce $\Phi(z)$ stát mnohoznačnou. V tom spočívá rozdíl v zavedení potenciálu v hydromechanice a v elektrostatice.

Poznamenejme, že i zde jsou spojité větve funkce $\Phi(z)$ všude regulární a $\Phi(z)$ je dalším příkladem analytické funkce. Tak jako v předešlém paragrafu je derivace $\Phi'(z)$, všude jednoznačná.

Pomocí komplexního potenciálu můžeme vyjádřit všechny základní veličiny svázané s rovinným prouděním. Tak na př. z (47) a (49) máme

$$\Phi'(z) = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + i\frac{\partial \psi}{\partial x} = V_x - i V_y,$$

a pro vektor rychlosti proudění

$$\mathbf{V} = V_x + iV_y = \overline{\Phi'(z)} \tag{52}$$

a pro jeho modul

$$V = |\Phi'(z)| = \sqrt{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2}. \tag{53}$$

V rovině komplexního potenciálu odpovídají proudnicím přímky $\operatorname{Im} w = \text{const}$ a ekvipotenciálním liniím přímky $\operatorname{Re} w = \text{const}$.

Příklad 1. Pro *postupné proudění* (př. 3 § 35) potenciální funkce i funkce proudová jsou lineární

$$\varphi = V_x x + V_y y + C_1, \quad \psi = -V_y x + V_x y + C_2.$$

Komplexní potenciál je

$$w = \Phi(z) = \varphi + \mathrm{i}\psi = x(V_x - \mathrm{i}V_y) + \mathrm{i}y(V_x - \mathrm{i}V_y) = \overline{V}z, \qquad (54)$$

kde $\overline{V} = V_x - \mathrm{i}V_y$ je komplexní číslo — t. zv. komplexně sdružená rychlost. Potenciál je zřejmě lineární funkce.

Příklad 2. Pro *bodové zřídlo* (př. 4 § 35) jsou komponenty rychlosti

$$V_x = \frac{Q}{2\pi}\frac{x}{x^2 + y^2}, \quad V_y = \frac{Q}{2\pi}\frac{y}{x^2 + y^2}$$

a potenciální a proudová funkce se stanoví podle (47) a (49):

$$\varphi = \frac{Q}{2\pi}\ln|z|, \quad \psi = \frac{Q}{2\pi}\operatorname{Arg} z$$

a komplexní potenciál:

$$w = \Phi(z) = \frac{Q}{2\pi}\operatorname{Ln} z. \qquad (55)$$

Příklad 3. Pro *bodový vířivý pohyb* (př. 5 § 35) se najde analogicky

$$\varphi = \frac{\Gamma}{2\pi}\operatorname{Arg} z, \quad \psi = -\frac{\Gamma}{2\pi}\ln|z|$$

a komplexní potenciál

$$w = \frac{\Gamma}{2\pi\mathrm{i}}\operatorname{Ln} z \qquad (56)$$

se liší od (55) jen faktorem $\frac{1}{\mathrm{i}}$. Z toho plyne, že ekvipotenciální linie a proudnice si v př. 2 a 3 vymění místa.

Příklad 4. *Bodový dipol* je v hydromechanice zcela analogický dipolu v elektrostatice (př. 5 § 38). Pro komplexní potenciál místo (45) dostaneme

$$w = -\frac{M}{2\pi}\frac{1}{z}, \qquad (57)$$

kde $M = Qh$ je moment dipolu. Proudnice (57) souhlasí s ekvipotenciálními čarami (45) a ekvipotenciální čáry (57) se silovými čarami (45).

Komplexní potenciál v nauce o vedení tepla se definuje zcela ana-

logicky. Pro stacionární rovinné tepelné proudění v oblasti D, v které nejsou tepelné zdroje, platí podle (21) a (22)

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} = 0 \qquad \frac{\partial Q_y}{\partial x} - \frac{\partial Q_x}{\partial y} = 0. \tag{58}$$

Roli potenciálu φ hraje temperatura v:

$$\mathbf{Q} = -k \operatorname{grad} v; \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{k} Q_x, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{k} Q_y.$$

Z prvého z výrazů (58) plyne, že výraz $-\frac{1}{k}(Q_y \, dx - Q_x \, dy)$ je totálním diferenciálem jisté funkce $u = u(x, y)$, která se nazývá funkcí proudění (proudovou) a je s temperaturou spojena vztahy

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{k} Q_y, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{k} Q_x,$$

což jsou zřejmě Cauchy-Riemannovy rovnice. Funkce $u(x, y)$ je konstantní podél čar zvaných opět analogicky proudnice. Funkce komplexní proměnné

$$w = \Psi(z) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$$

se nazývá *komplexním potenciálem tepelného proudění*. Je regulární v celé jednoduše souvislé oblasti D, v níž proudění vyhovuje rovnicím (58). *Vektor tepelného proudění* je

$$\mathbf{Q} = -k \operatorname{grad} v = -k\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial y}\right) = -k\mathrm{i}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}\right) = \\ = -k\mathrm{i}\Psi'(z). \tag{59}$$

§ 40. Methoda konformního zobrazení. Uvedeme zde čtyři typy charakteristických úloh, pro jejichž řešení je velmi výhodné použít methody konformního zobrazení. Budeme je formulovat pro elektrostatické pole a pak uvedeme příslušné změny, které je třeba učinit v jejich formulaci pro jiné fysikální případy.

Jsou to tyto úlohy:

I. *Stanovení elektrostatického pole v zakřiveném „pásu" mezi dvěma vodiči C_1 a C_2, které mají obecně společné jen svoje konce ležící v bodě $z = \infty$. Potenciální spád mezi C_1 a C_2 je dán.*

II. *Stanovení uzavřeného pole v zakřiveném „mezikruží" (prstenci) mezi dvěma uzavřenými navzájem nesouvisícími vodiči, rozprostírajícími se cele v konečnu. Potenciální spád mezi oběma vodiči je dán.*

III. *Stanovení pole nekonečného vodiče C. Je dán modul vektoru intensity pole v bodě* $z = \infty$ *a předpokládáme, že v bodě* $z = \infty$ *nemá nekonečný vodič násobné body.*

IV. *Stanovení pole vně uzavřeného vodiče, rozprostírajícího se zcela v konečnu. Je dán vektor intensity pole v bodě* $z = \infty$ *co do směru i velikosti.*

Vodičem ve všech těchto případech rozumíme křivku C, v jejíchž všech bodech má potenciální funkce pole konstantní hodnotu (je to průsečnice vodivého válce s osou kolmou k rovině pole s rovinou pole). Pole je určeno až na adiční konstantu svým komplexním potenciálem.

V hydromechanice tyto úlohy jsou *úlohami obtékání*. Jako cíl si klademe popsání proudění kapaliny obtékající dané křivky C. Kapalinu pokládáme za ideální, bez vírů a bez zřídel. Křivky C v tomto případě jsou proudnicemi příslušného proudění. Úlohu potenciálního spádu zde má spád, tak jak mu rozumíme v běžném životě, t. j. množství kapaliny protékající za jednotku časovou libovolným průřezem oblasti D (viz vzorce (50) a (39)). V úl. III a IV je dán modul, resp. i směr vektoru rychlosti v nekonečnu.

Tytéž otázky mohou být též dány v theorii tepelného proudění. Úlohu vodičů převezmou tepelné vodiče konstantní teploty, potenciální spád je dán teplotním spádem a konečně vektor intensity pole je totožný s gradientem teploty.

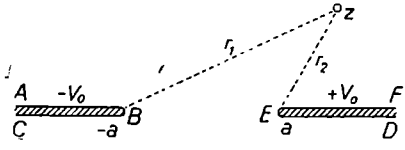
V dalším budeme zkoumat z každé kategorie různé konkretní příklady z rozličných fysikálních oborů.

Ve všech těchto případech získáme jedno z možných řešení. V § 70 dokážeme, že podmínky v případě IV lze doplnit tak, že existuje jedno jediné řešení našeho příkladu. Totéž je možno provést i v ostatních případech, ale důkazy zde nebudeme provádět. V našich příkladech je jednoznačnost řešení ihned vidět z fysikální podstaty, takže nalezené obecné řešení bude i jednoznačným řešením našeho problému.

§ 41. Pole v pásu. Začněme s příklady typu I. Předpokládáme, že pás D neobsahuje žádné náboje, které vytvářejí pole. Pak podle

tvrzení § 38 existuje v pásu D komplexní potenciál, který je regulární funkcí komplexní proměnné (protože D je jednoduše souvislá oblast, je i potenciál jednoznačná funkce). Potenciální funkce $V(x, y)$ má na křivkách C_1 a C_2 konstantní hodnotu a rozdíl těchto hodnot $V_2 - V_1$ je dán (V_2 a V_1 jsou zřejmě hodnoty potenciální funkce na křivkách C_2 a C_1).

Z toho plyne, že funkce $w = F(z)$ zobrazí jednoznačně oblast D na vodorovný pás roviny (w) šíře $V_2 - V_1 = V_0$. Dále dvojici totožných bodů (budeme je označovat symboly $+\infty$ a $-\infty$) na koncích okrajů přímého pásu v rovině (w) odpovídají body hranice oblasti D ležící v nekonečnu (které budeme souhlasně označovat $\pm\infty$). To plyne okamžitě z toho, že body $w = \pm\infty$ prochází nekonečně mnoho ekvipotenciálních čar $V = \text{const}$ a podobně se musí dít i pro body, které jim odpovídají. Z fysikálních podmínek je jasné, že to nemohou být hraniční body v konečnu.



Obr. 69.

Všem uvedeným podmínkám vyhovuje jedno-jednoznačné konformní zobrazení oblasti D na pás $0 < \operatorname{Im} w < V_0$ s okrajovými podmínkami pro nekonečně vzdálené body $F(\pm\infty) = \pm\infty$. Z věty § 23 plyne, že takové zobrazení vždy existuje a je určeno až na adiční konstantu jednoznačně, t. j. *řešení úlohy I je vždy možné.*

Příklad 1. *Kondensátor skládající se ze dvou nekonečně velkých desek, z nichž druhá leží v úrovni první ve vzdálenosti* $2a$. *Potenciální spád činí* $2V_0$.

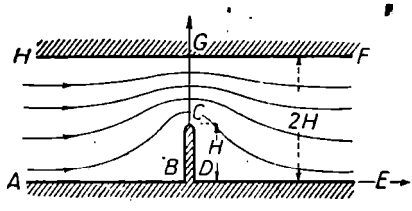
Na obr. 69 je řez kondensátoru rovinou kolmou k rovině desek. Úloha přejde v určení pole dvou polopřímek $-\infty < x < -a$ a $a < x < \infty$ s daným potenciálním spádem. Je to speciální případ případu 1: čára C_1 představuje výřez ABC podél záporné reálné poloosy a čára C_2 výřez DEF podél kladné reálné poloosy. Zobrazení oblasti D na vodorovný pás šířky $2V_0$ zprostředkuje funkce (60) § 33 s příslušným normováním. Vypustíme-li pro naše úvahy nepodstatnou adiční konstantu, dostaneme komplexní potenciál

$$w = \frac{2V_0}{\pi} \ln(z + \sqrt{z^2 - a^2}). \tag{60}$$

Modul vektoru intensity pole podle (40) je

$$E = \left|\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\right| = \frac{2V_0}{\pi} \frac{1}{|\sqrt{z^2 - a^2}|} = \frac{2V_0}{\pi} \frac{1}{\sqrt{r_1 r_2}},$$

kde $r_1 = |z + a|$ a $r_2 = |z - a|$ jsou vzdálenosti bodu z od konců obou polopřímek. V počátku souřadnic je $E = \frac{2V_0}{\pi a}$, t. j. E se jen málo liší od intensity pole obyčejného deskového kondensátoru $\frac{V}{a}$. Při přibližování ke koncovým bodům polopřímek intensita vzrůstá (defekt na hraně), při vzdalování bodu z do nekonečna intensita konverguje k nule.



Obr. 70.

Příklad 2. *Proudění ideální kapaliny v přímé trubici šířky* $2H$, *v níž je kolmo na její stěny umístěna přepážka vysoká polovinu její celkové výšky. Potenciální spád* Q *je dán.* Úloha spočívá v podstatě v tom, zobrazit oblast D (obr. 70) na vodorovný pás. Funkcí tvaru $\zeta = \frac{\pi}{2H} z$ převedeme oblast D na oblast př. 4 § 33, kde je $h = \frac{\pi}{2}$. Vzorec (59) předcházejícího paragrafu nám dává možnost zobrazit oblast D na horní polorovinu $\operatorname{Im} \omega > 0$:

$$\omega = \sqrt{\operatorname{tgh}^2 \tfrac{1}{2}\zeta + \operatorname{tg}^2 \tfrac{1}{4}\pi} = \sqrt{\operatorname{tgh}^2 \frac{\pi z}{4H} + 1}.$$

Přitom okraji $ABCDE$ trubice odpovídá úsečka $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ a okraji FGH polopřímky $(\sqrt{2}, \infty)$ a $(-\infty, -\sqrt{2})$. Zobrazíme ještě polorovinu ω na sebe samu tak, aby body A, H a E, F přešly v body 0 a ∞:

$$\omega_1 = \frac{\sqrt{2} + \omega}{\sqrt{2} - \omega} = \frac{\left(\sqrt{2} + \sqrt{\operatorname{tgh}^2 \frac{\pi z}{4H} + 1}\right)^2}{1 - \operatorname{tgh}^2 \frac{\pi z}{4H}} = \left(\sqrt{2} \cosh \frac{\pi z}{4H} +\right.$$

$$+\sqrt{\cosh^2\frac{\pi z}{4H}+\sinh^2\frac{\pi z}{4H}}\Big)^2=\left(\sqrt{2}\cosh\frac{\pi z}{4H}+\sqrt{\cosh\frac{\pi z}{2H}}\right)^2$$

(pro výpočet zobrazení viz vzorec (45) a př. 3 kap. III.). Protože bod $C = Hi$ přejde postupně v bod $\omega = 0$ a pak v $\omega_1 = 1$, odpovídá okraji $ABCDE$ kladná a okraji FGH záporná reálná poloosa. Nakonec zobrazíme ještě polorovinu na pás šířky Q, což zprostředkuje logaritmická funkce:

$$w=\frac{Q}{\pi}\ln\omega_1=\frac{2Q}{\pi}\ln\left(\sqrt{2}\cos\frac{\pi z}{4H}+\sqrt{\cosh\frac{\pi z}{2H}}\right). \tag{61}$$

§ 42. Prstencové pole. Případ II se liší od případu I tím, že okraje oblasti D nemají společné body a oblast jimi uzavřená je dvojnásobně souvislá. Methoda použitá v předešlém paragrafu zde nevede k cíli, protože není možné zobrazit jedno-jednoznačně a konformně oblast D na pás (viz § 23). Úloha se snadno vyřeší, budeme-li znát jedno-jednoznačné a konformní zobrazení oblasti D na mezikruží*) $r < |\omega| < R$. Pro mezikruží je zřejmě komplexním potenciálem logaritmická funkce

$$w = ki\,\mathrm{Ln}\omega, \tag{62}$$

kde k je reálná konstanta (imaginární část funkce (62) nabývá na okrajích mezikruží, t. j. na kružnicích $|\omega| = r$ a $|\omega| = R$, konstantních hodnot). Velikost konstanty určíme z daného potenciálního spádu V_0. Stačí potom jen dosadit $f(z)$ za ω do (62) a dostáváme komplexní potenciál v dané oblasti řešící naši úlohu:

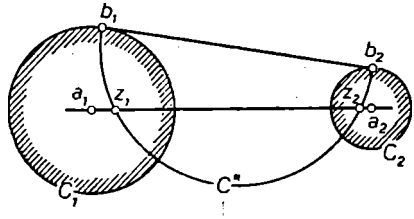
$$w = ki\,\mathrm{Ln}f(z).$$

Potenciál, který jsme zkonstruovali, je zřejmě funkcí mnohoznačnou v důsledku mnohoznačnosti své reálné části $U = -k\,\mathrm{Arg}\,f(z)$. Fysikálně je tento fakt zcela přípustný, neboť derivace potenciálu, která charakterisuje pole, je jednoznačná.

Příklad 1. *Pole dvou souhlasně nabitých kruhových válců s rovnoběžnými osami.*

*) V podrobnějších učebnicích theorie funkcí komplexní proměnné se dokazuje, že se libovolná dvojnásobně souvislá oblast dá zobrazit konformně na mezikruží.

Úloha vlastně přechází v úlohu sestrojit pole vně dvou kružnic C_1 a C_2. Buďtež a_1 a a_2 středy těchto kružnic. Sestrojíme nad jejich společnou vnější tečnou b_1b_2 jako nad průměrem půlkružnici C^* (obr. 71). Průsečíky kružnice C^* se střednou a_1a_2, které označíme z_1 resp. z_2, jsou současně sdruženy v kruhové inversi podle obou kružnic. To plyne z toho, že kružnice C^* a přímka a_1a_2 jsou orthogonální k oběma kružnicím C_1 a C_2 (viz § 20).

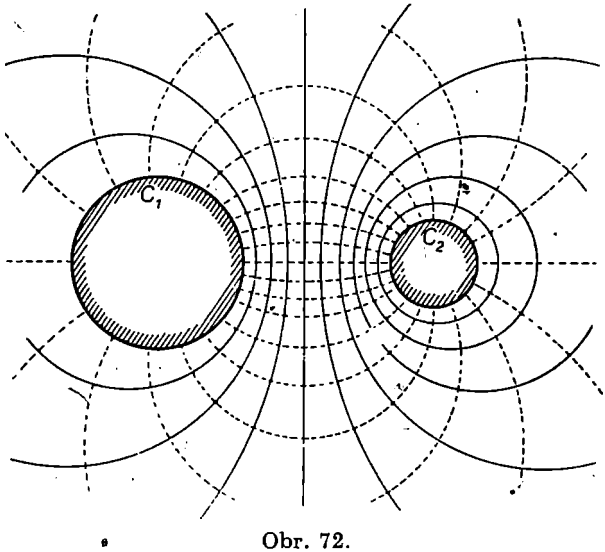


Obr. 71.

Pomocí lineární lomené funkce

$$\omega = \frac{z - z_1}{z - z_2}$$

zobrazíme nyní rovinu (z) na pomocnou rovinu (ω) tak, že body z_1 a z_2 přejdou v body 0 a ∞, a dále nechť kružnicím C_1 a C_2 odpovídají



Obr. 72.

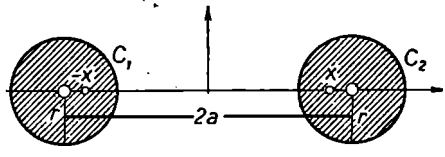
kružnice C_1' a C_2' v rovině (ω). Body 0 a ∞ jsou pak sdruženy v inversi podle kružnic C_1' a C_2' (§ 20). To však znamená, že C_1' a C_2' jsou kon-

centrické se středem v $\omega = 0$. Komplexní potenciál pomocného pole je podle (50) $w = ki \operatorname{Ln}\omega$ a pro dané pole

$$w = ki \operatorname{Ln} \frac{z - z_1}{z - z_2}. \tag{62}$$

Žádaného potenciálního spádu dosáhneme vhodnou volbou konstanty k.

Komplexní potenciál našeho pole souhlasí s komplexním potenciálem (42) pole dvou souhlasně nabitých bodových nábojů (př. 2, § 38), jestliže položíme $k = 2q$.*) Mapa pole vně kruhů C_1 a C_2 tedy zcela souhlasí s mapou pole na obr. 65. Ekvipotenciální čáry jsou Apolloniovy kružnice a silokřivky jsou kružnice procházející body z_1 a z_2 (obr. 72). Křivky C_1, C_2 patří do svazku ekvipotenciálních křivek.



Obr. 73.

Z našeho příkladu vidíme, že se mapa pole nezmění, nahradíme-li kteroukoliv ekvipotenciální čáru vodičem (aspoň v jisté části pole). V hydromechanice tomu fysikálně odpovídá umístění tvrdých stěn podél některé z proudnic.

Příklad 2. *Pole dvojžilného vedení* je speciálním případem právě uvažované úlohy (obr. 73). x-ové souřadnice bodů z_1 a z_2, současně sdružených v inversi podle obou kružnic, určíme z rovnice $(a + x)(a - x) = r^2$, odkud

$$x_{1,2} = \pm \sqrt{a^2 - r^2}.$$

Vzorec (62) nabývá tvaru

$$w = ki \operatorname{Ln} \frac{z + \sqrt{a^2 - r^2}}{z - \sqrt{a^2 - r^2}}. \tag{63}$$

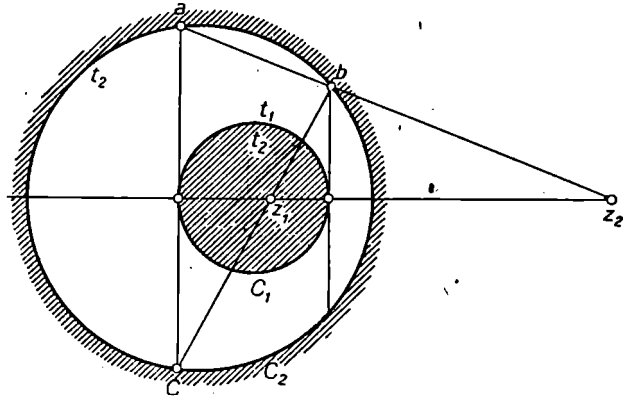
Vyjádříme si ještě podmínku toho, že potenciální spád mezi C_1 a C_2

*) Snadno se dokáže, že i v našem případě $q' = \frac{1}{2}k$ udává velikost úhrnného náboje na jednotlivých kružnicích. Důkaz: Podle Gaussovy věty § 36 je vektorový tok intensity pole libovolnou uzavřenou křivkou C, uvnitř které leží některá z kružnic, na př. C_2, roven $4\pi q$, kde q je úhrnný náboj na C_2. Protože (62) je shodná s (42), je tento tok v souhlase s výše uvedeným výkladem roven $2\pi k$.

je V_0. Vyčíslíme si rozdíl imaginárních částí funkce (58) v bodech $a - r$ a $-a + r$:

$$V_0 = k \ln \left| \frac{a - r + \sqrt{a^2 - r^2}}{a - r - \sqrt{a^2 - r^2}} \right| - k \ln \left| \frac{-a + r + \sqrt{a^2 - r^2}}{-a + r - \sqrt{a^2 - r^2}} \right| =$$

$$= 2k \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - r^2}}{r}.$$



Obr. 74.

Z toho vypočteme k pomocí V_0:

$$k = \frac{V_0}{2 \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - r^2}}{r}} \approx \frac{V_0}{2 \ln \frac{2a}{r}},$$

kde r je veličina nekonečně malá oproti a.

Příklad 3. *Rozdělení temperatury mezi dvěma cylindrickými excentrickými troubami vyhřátými na temperaturu t_1 resp. t_2* (obr. 74).

Naší úlohou je konstruovat tepelný tok v prstenci mezi kružnicemi C_1 a C_2. Sestrojíme nejprve dva body současně sdružené v inversi podle obou kružnic C_1 a C_2. Konstrukce je provedena na obr. 74. (V koncových bodech středné na kružnici C_1 vztyčíme kolmice, až protnou v bodech a, b a c kružniči C_2. Průsečíky spojnice ab resp. bc se střednou

jsou hledané body z_2 resp. z_1). Důkaz přenecháváme čtenáři. Pomocí pomocného zobrazení

$$\omega = \frac{z - z_1}{z - z_2}$$

převedeme úlohu na konstrukci pole v mezikruží C_1' a C_2'. Řešení dává imaginární část komplexního potenciálu

$$v = \operatorname{Im} \Psi(\omega) = k \ln|\omega| + l,$$

kde konstanty k a l určíme z daných hodnot temperatury na kružnicích C_1 a C_2. Po dosazení $\frac{z - z_1}{z - z_2}$ za ω do naší logaritmické funkce dostáváme hledaný průběh teploty v rovině (z).

§ 43. Úloha o obtékání nekonečné křivky. Při rozboru úlohy III budeme používat hydrodynamické terminologie. Oblast D bude v našich úvahách jednoduše souvislá; komplexní potenciál $w = \Phi(z)$ bude tedy jednoznačná funkce. Proudnice budou vyjádřeny křivkami $\operatorname{Im} \Phi(z) = \text{const}$ a kromě toho můžeme jako v § 41 dokázat, že bodu $z = \infty$ odpovídá nekonečně vzdálený bod křivky C. Funkce $w = \Phi(z)$ zobrazí jedno-jednoznačně a konformně oblast D na horní polorovinu s okrajovou podmínkou $\Phi(\infty) = \infty$. Není-li bod $z = \infty$ násobným bodem křivky C, můžeme ještě stanovit velikost rychlosti v bodě $z = \infty$, t. j. $|\Phi'(\infty)| = v_\infty$.* Je možno dokázat, že takové zobrazení je jednoznačně určeno až na adiční konstantu. V případě, že bod $z = \infty$ je dvojným bodem křivky C, je hodnota $|\Phi'(z)|$ rovna buď 0, nebo ∞, podle toho, je-li úhel tečen ostrý nebo tupý (viz § 23); rychlost musíme definovat v jiném, regulárním bodě křivky C.

Příklad 1. *Obtékání desky výšky H nekonečně širokým proudem kapaliny danou rychlostí v_∞* (obr. 75). Známe již z dřívějších úvah funkci zobrazující oblast D na polorovinu:

$$w = \sqrt{z^2 + H^2}.$$

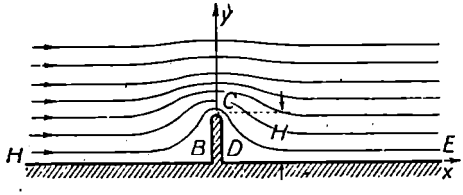
*) Hodnotou derivace $\Phi'(z)$ v bodě $z = \infty$, t. j. $\Phi'(\infty)$, budeme rozumět limitu $\lim_{z \to \infty} \Phi'(z)$, pokud tato limita existuje. Viz § 69.

(§ 27, př. 1). Derivace této funkce je

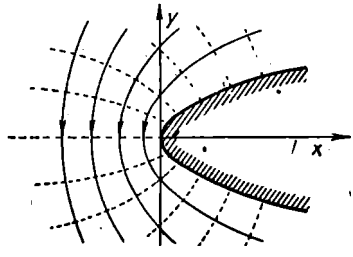
$$\frac{dw}{dz} = \frac{z}{\sqrt{z^2 + H^2}}.$$

odkud $\left|\frac{dw}{dz}\right|_{z=\infty} = \lim_{z\to\infty}\left|\frac{z}{\sqrt{z^2 + H^2}}\right| = 1$; hledaný komplexní potenciál tedy bude

$$w = v_\infty \sqrt{z^2 + H^2}. \tag{64}$$



Obr. 75.



Obr. 76.

Rychlost proudění (64) nekonečně vzrůstá v bodě desky C, pro nějž $z = iH$ (defekt na hraně), a klesá k nule v bodech B a D, kde $z = 0$. Výsledek je fysikálně zcela samozřejmý.

Příklad 2. *Obtékání paraboly* $y^2 = 2px$. *Rychlost proudění v bodě* $z = 0$ je v_0 (obr. 76). Hledejme zobrazení oblasti D na horní polorovinu. Vzpomeneme si, že funkce $w = \sqrt{z}$ zobrazí na polorovinu vnějšek parabol s ohniskem v bodě $z = 0$ (§ 25). Ohnisko naší paraboly je v bodě $z = \frac{1}{2}p$; použijeme tedy funkce

$$w = \sqrt{z - \tfrac{1}{2}p}. \tag{65}$$

Položíme $w = u + iv$ a $z = x + iy$ a najdeme

$$u^2 - v^2 = x - \tfrac{1}{2}p, \quad 2uv = y.$$

Dosadíme $u = \frac{y}{2v}$ z druhé rovnice do prvé a máme

$$\frac{y^2}{4v^2} - v^2 = x - \tfrac{1}{2}p.$$

Z poslední rovnice je ihned vidět, že parabole odpovídá přímka $v = \sqrt{\frac{1}{2}p}$. Funkce (65) zobrazí oblast D na polorovinu $\operatorname{Im} w > \sqrt{\frac{1}{2}p}$ a modul derivace v bodě $z = 0$ je

$$\left|\frac{dw}{dz}\right|_{z=0} = \lim_{z\to 0}\left|\frac{1}{2\sqrt{z - \frac{1}{2}p}}\right| = \frac{1}{\sqrt{2p}};$$

komplexní potenciál řešící danou úlohu bude

$$w = v_0\sqrt{2pz - p^2}. \tag{66}$$

Rychlost proudění v obecném bodě $z = x + iy$ dané paraboly bude

$$\left|\frac{dw}{dz}\right| = \frac{pv_0}{\sqrt[4]{(2px - p^2)^2 + 4p^2y^2}} = \frac{v_0\sqrt{p}}{\sqrt{2x + p}}.$$

Rychlost proudění se bude zmenšovat k nule s postupným vzdalováním bodu po parabole do nekonečna. Bude maximální ve vrcholu paraboly. Proudnice jsou paraboly konfokální s danou parabolou (obr. 76).

Příklad 3. *Obtékání téže paraboly. Proudění je symetrické podle reálné osy a blíží se parabole zleva* (viz obr. 77).

Z daných podmínek je vidět, že záporná reálná poloosa je proudnicí, a podle principu vyloženého v § 42 můžeme místo dané úlohy zkoumat obtékání kontury ABC (obr. 77). Funkce (65) zobrazí oblast D ohraničenou konturou ABC v kvadrant roviny. Přitom se oblouk BC zobrazí na přímku $v = \sqrt{\frac{1}{2}p}$ a přímka AB na přímku $u = 0$. Funkce

$$w = \left(\sqrt{z - \tfrac{1}{2}p} - \mathrm{i}\sqrt{\frac{p}{2}}\right)^2 = z - p - \mathrm{i}\sqrt{2pz - p^2}$$

zobrazuje tedy oblast D na horní polorovinu. Snadno se přesvědčíme, že rychlost v nekonečně vzdáleném bodě definovaná naší funkcí jako komplexním potenciálem je rovna jedné, a tedy proudění s rychlostí v_∞ má komplexní potenciál

$$w = v_\infty(z - p - \mathrm{i}\sqrt{2pz - p^2}). \tag{67}$$

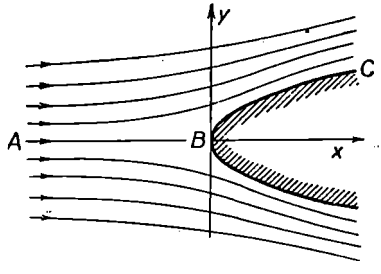
Poznamenejme ještě, že rychlost proudění ve vrcholu paraboly je

$$\frac{dw}{dz}_{z=0} = v_\infty\left(1 - \mathrm{i}\frac{p}{\sqrt{2p - p^2}}\right)_{z=0} = 0.$$

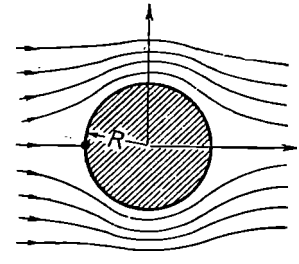
Rychlost konstruovaného proudění v bodě $z = 0$ je tedy rovna nule (takové body se nazývají kritické). Tento výsledek je fysikálně ihned zřejmý.

§ 44. Úloha o úplném obtékání. Podmínky Čaplyginovy.

Příklad 1. Rozbor úlohy IV začneme speciálním případem, kdy křivkou C bude kružnice $|z| = R$. Diskusi provedeme opět v hydromechanické terminologii. Řešme nejprve tuto úlohu: *Najít proudění ideální kapaliny kolem kružnice* $|z| = R$ *rychlostí* $V_\infty = 1$, *kde směr proudění je dán směrem kladné reálné poloosy* (obr. 78).



Obr. 77.



Obr. 78.

Doplníme předpoklady ještě tím, že proudění je symetrické podle reálné osy, to znamená, že polopřímky $(-\infty, -R)$ a (R, ∞) jsou proudnicemi našeho proudění. Podle principu vyloženého v § 42 budeme tedy řešit proudění obtékající tyto polopřímky a horní půlkružnici $|z| = R$, což je v podstatě úloha III. Podle § 43 bude komplexním potenciálem funkce $w = \Phi(z)$, zobrazující konformně naši oblast na horní polorovinu s okrajovými podmínkami $\Phi(\infty) = \infty$, $\Phi'(\infty) = 1$. Touto funkcí je zřejmě funkce

$$w = \Phi(z) = z + \frac{R^2}{z},$$

která zobrazí půlkružnici $|z| = R$ na úsečku $-2R < u < 2R$ a polopřímky $-\infty < x < -R$ a $R < x < \infty$ na polopřímky $-\infty < u < -2R$ a $2R < u < \infty$ (viz § 26, kde $R = 1$, důkaz pro obecné R přenecháváme čtenáři). Vedle sestrojeného symetrického proudění

dostáváme vířivé proudění s vírem v bodě $z = 0$, jehož komplexní potenciál je

$$w = \Phi_1(z) = \frac{\Gamma}{2\pi i} \operatorname{Ln} z,$$

kde Γ je libovolná reálná konstanta (§ 39). Protože rychlost vířivého proudění v nekonečnu je nula, má proudění s komplexním potenciálem

$$w = \Phi(z) + \Phi_1(z) = z + \frac{R^2}{z} + \frac{\Gamma}{2\pi i} \operatorname{Ln} z, \tag{68}$$

které obtéká $|z| = R$ rychlostí v nekonečnu rovnou jedné. V § 70 dokážeme, že (68) řeší tuto úlohu pro všechny možné případy, nabývá-li jen konstanta Γ všech možných hodnot.

Rychlost proudění (68) je

$$\left|\frac{dw}{dz}\right| = \left|1 - \frac{R^2}{z^2} + \frac{\Gamma}{2\pi i z}\right|;$$

kritické body proudění jsou tedy body vyhovující rovnici

$$z^2 + \frac{\Gamma}{2\pi i} z - R^2 = 0,$$

odkud

$$z_{kr} = \frac{\Gamma i}{4\pi} \pm \frac{1}{4\pi} \sqrt{16\pi^2 R^2 - \Gamma^2}.$$

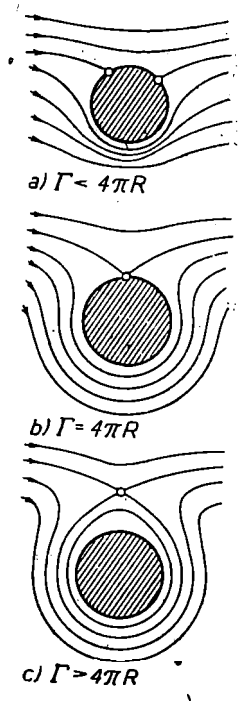
Je-li $|\Gamma| \leqq 4\pi R$, pak $|z_{kr}| = \frac{1}{4\pi} \sqrt{\Gamma^2 + 16\pi^2 R^2 - \Gamma^2} = R$, pro $|\Gamma| > 4\pi R$ je $|z_{kr}| = \frac{1}{4\pi} |\Gamma \pm \sqrt{\Gamma^2 - 16\pi^2 R^2}|$. Odtud je ihned vidět, že v prvém případě leží kritické body na kružnici $|z| = R$ a v druhém případě nikoli, při čemž jeden z nich leží vně kružnice a druhý uvnitř (jak ihned plyne z vlastnosti kořenů kvadratické rovnice $z'_{kr} z''_{kr} = -R^2$. Dále se omezíme na zkoumání prvého případu. Položíme pro body kružnice $z = Re^{i\varphi}$ a dostaneme

$$\left|\frac{dw}{dz}\right| = \left|1 - e^{-2i\varphi} - \frac{\Gamma i}{2\pi R} e^{-i\varphi}\right| = \left|2 \sin\varphi - \frac{\Gamma}{2\pi R}\right|;$$

pro argumenty kritických bodů platí:

$$\varphi_1 = \arcsin \frac{\Gamma}{4\pi R}, \qquad \varphi_2 = \pi - \arcsin \frac{\Gamma}{4\pi R}. \tag{69}$$

V bodě $Re^{i\varphi_2}$ se proudnice rozdělí ve dvě části; jedna z nich obtéká po svrchní části, druhá po spodní části oblouku kružnice. V bodě $Re^{i\varphi_1}$ se obě opět spojují (obr. 79a). Prvý z obou bodů se nazývá *bod rozvětvení*, druhý *bod sjednocení*.



Obr. 79.

Pro symetrické proudění ($\Gamma = 0$) jsou kritické body v bodech $\pm R$. Vířivé proudění se snaží sblížit oba body; se vzrůstáním konstanty Γ se oba body k sobě přibližují, až pro $\Gamma = 4\pi R$ splynou (obr. 79b). Při dalším zvětšování vznikají při proudění uzavřené křivky.

Konstrukce proudění obtékajícího s danou rychlostí V_∞ a s danou cirkulací Γ jistou uzavřenou konturou, nazývá se *úloha o úplném obtékání*. Vzorec (68) řeší úlohu o úplném obtékání pro případ kružnice $|z| = R$ a $V_\infty = 1$. Při dostatečně malých hodnotách Γ je možno k řešení použít místo hodnoty Γ souřadnic bodu sjednocení, které jsou s hodnotou Γ svázány rovnicí (69).

Budiž nyní dána libovolná uzavřená kontura C ležící cele v konečnu, na ní bod z_0 (bod sjednocení) a komplexní číslo V_∞ (rychlost v nekonečnu). Abychom vyřešili úlohu o úplném obtékání, najdeme konformní zobrazení

$$\zeta = f(z)$$

vnějšku kontury na vnějšek kruhu $|\zeta| > R$ s okrajovými podmínkami*)

*) V našem příkladě sice normujeme velikost derivace $f'(\infty)$, ale zato nechováme livobolnou velikost poloměru R, která se určí z okrajových podmínek (viz př. 2).

$$f(\infty) = \infty, \quad f'(\infty) = \overline{V}_\infty \tag{70}$$

(kde jsme označili pruhem komplexně sdruženou hodnotu). Přitom přejde bod z_0 v bod $\zeta_0 = Re^{i\varphi_0}$. Pro zobrazení potřebujeme, aby $|\varphi_0| \leqq \frac{1}{2}\pi$. Pak sestrojíme podle vzorce (68) proudění s rychlostí 1 v nekonečnu a s bodem sjednocení ζ_0:

$$w = \Phi_1(\zeta) = \zeta + \frac{R^2}{\zeta} + \frac{\Gamma}{2\pi i} \operatorname{Ln}\zeta \tag{71}$$

(cirkulaci Γ ve vzorci (71) určíme podle (69) ze vztahu $\Gamma = 4\pi R \sin\varphi_0$).

Superposice $w = \Phi_1[f(z)]$ dává komplexní potenciál proudění obtékajícího konturu C s bodem sjednocení z_0 a s rychlostí v nekonečnu:

$$\overline{\frac{dw}{dz}}\bigg|_{z=\infty} = \overline{\Phi_1'(\infty)} \cdot \overline{f'(\infty)} = V_\infty.$$

Je tedy (71) zřejmě řešením naší úlohy.

Příklad 2. *Úplné obtékání kružnice* $|z| = R$ *s danou rychlostí* V_∞ *v bodě* $z = \infty$.

Funkce (70) má v našem případě tvar $\zeta = \overline{V}_\infty z$; poloměr R ve vzorci (71) je zřejmě $|V_\infty|R$ a posledně jmenovaný vzorec nabude tvaru

$$w = \overline{V}_\infty z + \frac{R^2|V_\infty|^2}{\overline{V}_\infty z} + \frac{\Gamma}{2\pi i} \operatorname{Ln} z =$$

$$= \overline{V}_\infty z + \frac{V_\infty R^2}{z} + \frac{\Gamma}{2\pi i} \operatorname{Ln} z \tag{72}$$

(kde jsme zanedbali adiční konstantu $\frac{\Gamma}{2\pi i} \operatorname{Ln}\overline{V}_\infty$).

Čtenář si sám dokáže, že vztah (69) mezi cirkulací a souřadnicemi kritických bodů má v našem případě tvar

$$\Gamma = 4\pi v_\infty R \sin(\varphi_0 - \Theta), \tag{73}$$

kde $v_\infty = |V_\infty|$, $\Theta = \arg V_\infty$ a φ_0 je argument bodu sjednocení.

Poznámka. Místo (70) je možno zkoumat konformní zobrazení $\zeta = g(z)$ vnějšku kontury C na vnějšek kruhu $|\zeta| > R$ s okrajovými podmínkami $g(\infty) = \infty$, $g'(\infty) = 1$, a potom sestrojit proudění

s rychlostí V_∞ podle vzorce (72). Toto řešení úlohy o úplném obtékání bude dáno funkcí

$$w = \overline{V}_\infty g(z) + \frac{V_\infty R^2}{g(z)} + \frac{\Gamma}{2\pi i} \operatorname{Ln} g(z). \tag{74}$$

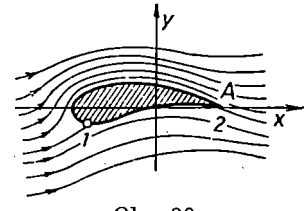
Příklad 3. *Úplné obtékání profilu Žukovského* (viz § 28).

Funkce (21) předcházející kapitoly,

$$\omega = \omega(z) = \tfrac{1}{2}(z + \sqrt{z^2 - 4}), \tag{75}$$

zprostředkuje konformní zobrazení vnějšku kontury C na vnějšek jistého kruhu C^* (§ 28). Sestrojíme ještě lineární lomenou funkci s okrajovými podmínkami

$$\zeta = l(\omega),\ l(\infty) = \infty,\ l'(\infty) = 1,$$



Obr. 80.

která zobrazí vnějšek C^* na vnějšek jistého kruhu $|\zeta| > R$. Pak superposice funkcí $l(\omega)$ a (75) $\zeta = l[\omega(z)] = g(z)$ zobrazí vnějšek kontury C na vnějšek kruhu $|\zeta| > R$ s okrajovými podmínkami $g(\infty) = \infty$, $g'(\infty) = l'(\infty) \cdot \omega'(\infty) = 1$. Hledaný komplexní potenciál má proto tvar (74).

Na ostré hraně křídla A ($z = 2$) má derivace funkce (75) hodnotu $\left.\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}z}\right|_{z=2} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{z}{\sqrt{z^2-4}}\right)\Big|_{z=2} = \infty$ (defekt hrany), protože derivace $\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}\omega} = l'(\omega)$ je konečná všude na C^*, je

$$\left.\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}z}\right|_{z=2} = l'(\omega) \left.\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}z}\right|_{z=2} = \infty.$$

Čili, jak dokázal známý ruský vědec S. A. Čaplygin (1869—1942), *při obtékání profilu s ostrou hranou A je na ní vlivem vazkosti a vířivosti bod sjednocení proudění.* Podle této Čaplyginovy věty v tom bodě kružnice $|\zeta| = R$, který odpovídá hraně A, je derivace $\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}\zeta}$ nulová a výsledná velikost $\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z} = \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}\zeta} \cdot \frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}z}$ rychlosti je konečná.

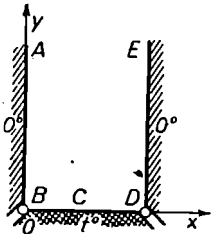
Výše uvedená věta se nazývá větou Čaplyginovou. Podle věty Čaplyginovy je při obtékání profilu s ostrou hranou jednoznačně

určena poloha bodu sjednocení a tedy podle rovnice (73) i velikost cirkulace Γ ve vzorci (74). Rychlost V_∞ zůstává komplexním parametrem (tak na př. změna směru vektoru $\boldsymbol{V}_\infty$ znamená změnu směru proudění).

§ 45. Jiné methody. Uvedeme ještě několik typických příkladů, které budeme řešit jinými methodami než těmi, které byly vyloženy v předcházejících paragrafech.

Příklad 1. *Rozprostření temperatury v prostoru ohraničeném dvěma nekonečnými vertikálními stěnami s teplotami* 0° *a dnem vyhřátém na temperaturu* $t°$ *(mezi vertikálními stěnami a dnem je tepelná isolace).*

Úlohou je konstrukce komplexního potenciálu v pásu D zobrazeném na obr. 81, kde pro jednoduchost předpokládáme šířku pásu π.



Obr. 81.

Úloha patří vlastně do skupiny III, ale přítomnost isolujících bodů v dolním okraji poněkud mění úlohu. Budeme předpokládat, že řešení úlohy je z fysikálních důvodů zřejmě jednoznačné. Tak jako v případě III zobrazíme nejprve oblast D na horní polorovinu. Toto zobrazení nám zprostředkuje funkce

$$\omega = \sin(z - \tfrac{1}{2}\pi) = -\cos z$$

(viz př. 2 § 33). Isolující body 0 a π přejdou při tom v body -1, 1. Budeme se nyní snažit najít funkci regulární v horní polorovině $w = g(\omega)$ takovou, že její imaginární část nabývá na úsečce reálné osy $(-1, 1)$, která odpovídá dnu AD, hodnoty t a na polopřímkách $(-\infty, -1)$ a $(1, \infty)$, odpovídajících stěnám AB a DE, hodnoty 0. Pak stačí pouze provést superposici $w = g(-\cos z)$, abychom obdrželi hledaný komplexní potenciál.

Imaginární část funkce $g(\omega)$ získáme zřejmě jako lineární kombinaci funkcí $\arg(\omega + 1)$ a $\arg(\omega - 1)$:*)

*) Funkce reálné proměnné

$$\arg x = \begin{cases} 0 \text{ pro } x > 0 \\ \pi \text{ pro } x < 0 \end{cases}$$

má nespojitost v bodě $x = 0$, takže funkce $\arg(\omega + 1)$ a $\arg(w - 1)$ mají nespojitosti v uvedených bodech reálné osy.

$$\operatorname{Im} g(\omega) = C_1 \arg(\omega + 1) + C_2 \arg(\omega - 1) + C_3.$$

Pro výpočet tří konstant C_1, C_2, C_3 máme tyto určující rovnice:

$$\begin{aligned} &\text{pro } -\infty < x < -1 \quad \operatorname{Im} g(\omega) = C_1\pi + C_2\pi + C_3 = 0, \\ &\text{pro } -1 < x < +1 \quad \operatorname{Im} g(\omega) = C_2\pi + C_3 = t, \\ &\text{pro } 1 < x < \infty \quad \operatorname{Im} g(\omega) = C_3 = 0. \end{aligned}$$

Odtud $C_3 = 0$, $C_2 = \frac{1}{\pi} t$, $C_1 = -\frac{1}{\pi} t$ a

$$\operatorname{Im} g(\omega) = \frac{1}{\pi} t[\arg(\omega - 1) - \arg(\omega + 1)] = \frac{t}{\pi} \arg \frac{\omega - 1}{\omega + 1}.$$

Regulární funkce, která má výše uvedenou imaginární část, je funkce

$$w = \frac{t}{\pi} \ln \frac{\omega - 1}{\omega + 1}.$$

Dosadíme-li ještě $\omega = -\cos z$, dostaneme hledaný komplexní potenciál

$$w = \Psi(z) = \frac{t}{\pi} \ln \frac{\cos z + 1}{\cos z - 1} = \frac{2t}{\pi} \ln(\mathrm{i} \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2} z).$$

Máme

$$\Psi(z) = \frac{2t}{\pi} \ln\left(-\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}\right) = \frac{2t}{\pi} \ln \frac{\cos\frac{1}{2}x \cosh\frac{1}{2}y - \mathrm{i} \sin\frac{1}{2}x \sinh\frac{1}{2}y}{\cos\frac{1}{2}x \sinh\frac{1}{2}y - \mathrm{i} \sin\frac{1}{2}x \cosh\frac{1}{2}y} =$$

$$= \frac{2t}{\pi} \ln \frac{\sinh\frac{1}{2}y \cosh\frac{1}{2}y + \mathrm{i} \sin\frac{1}{2}x \cos\frac{1}{2}x}{\cos^2\frac{1}{2}x \sinh^2\frac{1}{2}y + \sin^2\frac{1}{2}x \cosh^2\frac{1}{2}y}$$

a konečně

$$\Psi(z) = \frac{2t}{\pi} \ln \frac{\sinh y + \mathrm{i} \sin x}{\cosh y - \cos x}. \tag{76}$$

Odtud vypočteme výraz pro teplotu

$$v(x, y) = \operatorname{Im} \Psi(z) = \frac{2t}{\pi} \arg \frac{\sinh y + \mathrm{i} \sin x}{\cosh y - \cos x} = \frac{2t}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\sin x}{\sinh y} \tag{77}$$

a pro proudovou funkci tepla

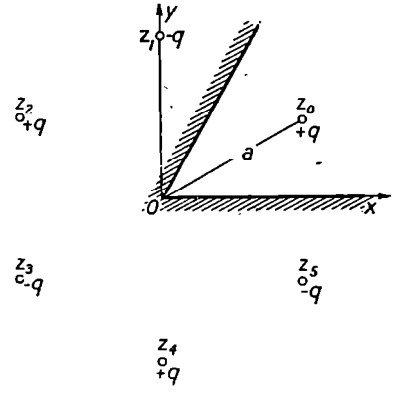
$$\mu(x, y) = \operatorname{Re} \Psi(z) = \frac{2t}{\pi} \ln \left| \frac{\sinh y + \mathrm{i} \sin x}{\cosh y - \cos x} \right| = \frac{t}{\pi} \ln \frac{\sinh^2 y + \sin^2 x}{(\cosh y - \cos x)^2} =$$

$$= \frac{t}{\pi} \ln \frac{\cosh y + \cos x}{\cosh y - \cos x}. \tag{78}$$

Z rovnic (77) a (78) snadno najdeme rovnice isothermických čar a proudnic:

$$\frac{\sin x}{\sinh y} = \text{const}, \quad \frac{\cos x}{\cosh y} = \text{const}. \tag{79}$$

Popsané methody lze použít i pro řešení př. 1 a 2 § 41: Je-li známo zobrazení oblasti D na polorovinu, pak místo dalšího hledání zobrazení poloroviny na pás, odpovídající podmínkám příkladu, je možno najít regulární funkci v této polorovině s hledanými vlastnostmi (jak jsme to dělali výše).



Obr. 82.

Této methody používáme též pro konstrukci pole v libovolné jednoduše souvislé oblasti, na jejíž kontuře má imaginární část komplexního potenciálu po úsecích dané hodnoty (srov. dále § 57). Tato methoda je zvláště výhodná pro řešení elektrostatických úloh, v kterých je na hranici jednoduše souvislé oblasti dáno několik isolujících bodů, rozdělujících hranici C na několik úseků s různými potenciály.

Příklad 2. *Elektrostatické pole uvnitř úhlové výseče* $0 < \arg z < \frac{1}{3}\pi$ *vytvářené bodovým nábojem* q *v bodě* $z_0 = ae^{\mathrm{i}\frac{1}{6}\pi}$ (obr. 82). V prostoru tomuto poli odpovídá pole mezi dvěma nekonečnými rovinami svírajícími daný úhel, vytvářený homogenně nabitou přímkou rovnoběžnou s průsečnicí obou rovin. Zobrazíme výseč D na horní polorovinu pomocí funkce

$$\zeta = z^3.$$

Náboj q přejde při tom do bodu $\zeta_1 = a^3\mathrm{i}$.

Úloha se tím změnila na konstrukci komplexního potenciálu bodového náboje v polorovině. K řešení úlohy použijeme toho, že vliv vodiče tvořeného přímkou $\operatorname{Im}\zeta = 0$ může být nahrazen účinkem náboje $-q$ v bodě $\zeta_2 = -a^3\mathrm{i}$. Důkaz: Pro pole daných dvou nábojů je zřejmě osa $\operatorname{Im}\zeta = 0$ jednou z ekvipotenciálních čar; v horní polorovině je

tedy pole dvou bodových nábojů shodné s polem jednoho bodového náboje a nábojů jím indukovaných na přímce $\operatorname{Im}\zeta = 0$. Komplexní potenciál pomocného pole bude podle (42) § 38

$$w = 2qi \operatorname{Ln} \frac{\zeta + a^3 i}{\zeta - a^3 i}$$

a hledaný komplexní potenciál dostaneme substitucí $\zeta = z^3$:

$$w = 2qi \operatorname{Ln} \frac{z^3 + a^3 i}{z^3 - a^3 i}. \tag{80}$$

Ekvipotenciální čáry pole jsou dány rovnicí

$$\left| \frac{z^3 + a^3 i}{z^3 - a^3 i} \right| = \text{const.}$$

Pomocí polárních souřadnic $z = re^{i\varphi}$ přejde tato rovnice na tvar

$$r^6 + 2a^3 r^3 \sin 3\varphi + a^6 = c^2(r^6 - 2a^3 r \sin 3\varphi + a^6),$$

odkud

$$\frac{c^2 - 1}{c^2 + 1}(r^6 + a^6) = 4a^3 r^3 \sin 3\varphi$$

a konečně

$$\sin 3\varphi = C\left(r^3 + \frac{a^6}{r^3}\right),$$

kde C je libovolná konstanta. Speciálně v případě $C = 0$ tvoří ekvipotenciální čáru polopaprsky $\varphi = 0$ a $\varphi = \frac{1}{3}\pi$, tvořící hranici pole.

Methoda použitá k řešení poslední úlohy (záměna přímého vodiče bodovým nábojem symetrickým s daným nábojem podle daného přímého vodiče) se nazývá *methoda zrcadlení*. Místo tohoto pomocného konformního zobrazení, jsme mohli též použít právě odvozené methody a nahradit hranice úhlové výseče systémem nábojů $q_1 = -q$, $q_2 = +q$, $q_3 = -q$, $q_4 = +q$, $q_5 = -q$ v bodech $z_1 = ai$, $z_2 = -ae^{-i\frac{1}{6}\pi}$, $z_3 = -ae^{i\frac{1}{6}\pi}$, $z_4 = -ai$, $z_5 = ae^{-i\frac{1}{6}\pi}$ (obr. 82). Čtenář se sám snadno přesvědčí, že toto pole a pole s komplexním potenciálem (80) navzájem souhlasí.

Methody zrcadlení se může s úspěchem použít i při řešení dalších příkladů jak z elektrostatiky, tak z hydromechaniky. V hydromechanice při této methodě v poli bodového víru s cirkulací Γ nahrazujeme

stěnu ohraničující polorovinu bodovým vírem cirkulace $-\Gamma$ v bodě symetricky sdruženém s prvním bodem podle vyňaté stěny. Při řešení analogického případu pole bodového zřídla vydatnosti Q je možno stěnu nahradit symetricky položeným zřídlem téže vydatnosti Q (a ne vydatnosti $-Q$ jako v případě víru resp. bodového náboje). Přenecháváme čtenáři podrobnější rozbor tohoto případu.

ÚLOHY.

1. Najděte ekvipotenciální čáry, silokřivky a vektor intensity pole komplexního potenciálu
$$w = \frac{1}{z^2}.$$

2. Potenciální funkce pole má rovnici $V = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} \pi y}{\operatorname{tgh} \pi x}$. Najděte silokřivky a komplexní potenciál pole.

3. Ekvipotenciální křivky pole jsou kružnice $x^2 + y^2 = 2ax$. Stanovte velikost intensity pole v bodech $(2a, 0)$ a (a, a).

4. Proudění kapaliny má v počátku vír s cirkulací Γ a zřídlo vydatnosti Q („vířivé zřídlo"). Dokažte, že proudnice jsou logaritmické spirály.

5. Stanovte ekvipotenciální čáry v př. 1 § 41 a proudnice v př. 1 § 43.

6. Jakými náboji je určeno pole s komplexním potenciálem
$$w = 2qi \operatorname{Ln} \left(z^2 + \frac{1}{z^2} \right)?$$

7. V bodech $z_1 = a$, $z_2 = \frac{1}{a}$ jsou zřídla vydatnosti Q a v bodě $z = 0$ nor téže vydatnosti. Dokažte, že kružnice $|z| = 1$ je proudnicí tohoto proudění. (Srv. s methodou zrcadlení v § 45).

8. Na polopřímce $x = 0$, $y > 1$ je potenciál roven V_0 a na reálné ose je roven nule. Stanovte hustotu rozdělení nábojů na reálné ose (v elektrostatice se učí, že hustota náboje na vodiči je rovna $\sigma = \frac{1}{4\pi} E$).

9. Na kružnici $|z - 2i| = 1$ je hustota náboje $\sigma = 1$. Jak se rozprostře náboj, uzemníme-li reálnou osu?

10. Najděte elektrostatické pole v prostoru mezi dvěma válci, jejichž průsečnice s rovinou kolmou k jejich osám jsou kružnice $|z| = 1$ a $|z - 1| = \frac{1}{2}$. (Válce jsou zřejmě kruhové a mají rovnoběžné osy.) Potenciální spád mezi válci je roven jedné. Jaká je nejmenší a největší hustota náboje na válcích?

11. Na elipse s poloosami 2 a $\sqrt{3}$ je teplota rovna nule a na úsečce mezi ohnisky je teplota 100°. Stanovte rozložení teploty.

12. Najděte rozložení teploty v kruhové výseči $0 < y < \alpha$, je-li teplota na ramenech úhlu rovna 0° a na kružnici 1°.

13. Najít komplexní potenciál rovinného proudění kapaliny, proudící z levé poloroviny do pravé poloroviny otvorem na imaginární ose mezi body $-i$ a $+i$. Spád Q je dán.

14. Najděte komplexní potenciál a proudnice pro proudění kapaliny v prvém kvadrantě, je-li v bodě $z = 1 + i$ zřídlo vydatnosti Q a v bodě $z = 0$ nor téže vydatnosti.

15. Najděte elektrostatické pole v půlkruhu $|z| < 1$, $\operatorname{Im} z > 0$, je-li na obloucích $0 < \arg z < \frac{1}{4}\pi$ resp. $\frac{1}{4}\pi < \arg z < \pi$ potenciál $-V_0$ resp. $+V_0$ a na průměru je potenciál roven nule. Body $i\,a + 1$ jsou body isolující.

16. Stanovte proudění kapaliny ve výseči $0 < \arg z < \frac{1}{3}\pi$ se zřídlem vydatnosti Q v bodě $z_0 = ae^{\frac{1}{4}i\pi}$ (srv. s př. 2, § 45).

HARMONICKÉ FUNKCE. VYJÁDŘENÍ REGULÁRNÍCH FUNKCÍ POMOCÍ INTEGRÁLŮ

§ 46. Integrál funkce komplexní proměnné. Budiž v jisté konečné oblasti D definována jednoznačná a spojitá funkce

$$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y) \tag{1}$$

a budiž C libovolná, po úsecích hladká (viz § 8) křivka, náležející cele oblasti D včetně koncových bodů a, b. Křivku C rozdělíme libovolným způsobem na n dílů body $z_0 = a, z_1, \ldots, z_{n-1}, z_n = b$, které budou ležet na křivce v pořádku určeném jejich indexy. Označíme $z_k - z_{k-1} = \Delta z_k = \Delta x_k + i\Delta y_k$ a vybereme v každé části (z_{k-1}, z_k) křivky C libovolný bod $\zeta_k = \xi_k + i\eta_k$ a utvoříme součet

$$\left.\begin{aligned} s_n = \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\,\Delta z_k = \sum_{1}^{n}\{u(\xi_k, \eta_k)\,\Delta x_k - v(\xi_k, \eta_k)\,\Delta y_k\} + \\ + i\sum_{1}^{n}\{v(\xi_k, \eta_k)\,\Delta x_k + u(\xi_k, \eta_k)\,\Delta y_k\}. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Součet (2) nazveme *integrálním součtem* funkce $f(z)$ pro dané dělení na křivce C a dané body ζ_k (velikost sumy s_n závisí zřejmě jak na výběru bodů z_k, tak na výběru bodů ζ_k). Nakonec budeme uvažovat libovolnou posloupnost dělení křivky C takovou, že pro délku nejnejvětšího z dílků n-tého dělení platí

$$\max_{k=1,2,\ldots,n} |\Delta z_k| = \delta_n \to 0 \quad \text{pro} \quad n \to \infty. \tag{3}$$

Definice. Limita integrálních součtů (2) pro libovolnou posloupnost dělení křivky C vyhovujících rovnici (3) se nazývá *integrálem* funkce $f(z)$ podél křivky C a značí se symbolem

$$\int_C f(z)\,dz = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\,\Delta z_k. \tag{4}$$

Za uvedených podmínek *limita* (4) *vždy existuje a je nezávislá jak*

na výběru posloupnosti rozdělení křivky, tak na volbě bodů ζ_k (existenční věta pro integrál). Důkaz: Podle (2) je

$$\int_C f(z)\,dz = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \{u(\xi_k, \eta_k)\,\Delta x_k - v(\xi_k, \eta_k)\,\Delta y_k\} +$$
$$+ i \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \{v(\xi_k, \eta_k)\,\Delta x_k + v(\xi_k, \eta_k)\,\Delta y_k\}$$

a v kursech analysy se dokazuje, že sumy vpravo pro libovolné spojité funkce $u(x, y)$ a $v(x, y)$ a po úsecích hladkou křivku C konvergují k pevným limitám, jsou-li splněny podmínky (3), a že tato limita je nezávislá jak na výběru čísel (x_k, y_k), tak na výběru (ξ_k, η_k).

Tyto limity jsou křivkovými integrály reálné proměnné, a tedy

$$\int_C f(z)\,dz = \int_C u(x,y)\,dx - v(x, y)\,dy + i\int_C v(x,y)\,dx + u(x, y)\,dy \quad (5)$$

Z (5) plyne, že integrál funkce komplexní proměnné má všechny vlastnosti křivkových integrálů reálné proměnné. Uveďme na př. *větu o odhadu integrálu*:

Věta [1]. *Je-li funkce* $f(z)$ *omezená na křivce* C, *t. j.* $|f(z)| \leqq M$, pak

$$\left|\int_C f(z)\,dz\right| \leqq Ml, \quad (6)$$

kde l *je délka oblouku křivky* C.

Důkaz: Vybereme libovolnou posloupnost dělení křivky C, která vyhovuje podmínce (3). Máme

$$|s_n| = \left|\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\,\Delta z_k\right| \leqq \sum_{k=1}^{n} |f(\zeta_k)|\,|\Delta z_k| \leqq M \sum_{k=1}^{n} |\Delta z_k|$$

a odtud

$$\left|\int_C f(z)\,dz\right| = \left|\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\,\Delta z_k\right| \leqq M \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} |\Delta z_k| = M \,.\, l,$$

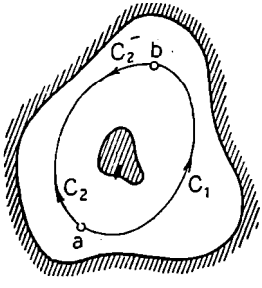
neboť podle (3) $\sum_{k=1}^{n} |\Delta z_k|$, t. j. délka lomené čárky interpolující křivku C pro $n \to \infty$ konverguje k délce oblouku křivky C.

§ 47. Cauchyho integrální věta. Hledejme podmínky pro to, aby integrál $\int_C f(z)\,dz$ podél libovolné křivky C ležící v oblasti D nezávisel na křivce C a byl pouze funkcí svých koncových bodů. K tomu stačí

a je nutné, aby integrál funkce $f(z)$ podél uzavřené křivky C ležící v D byl rovný nule:*)

$$\oint_C f(z)\,dz = 0. \tag{7}$$

Důkaz: Bude-li rovnice (7) splněna a C_1 a C_2 budou dvě různé cesty spojující body a a b (a, b, c_1 a C_2 leží v D), vezmeme uzavřenou křivku C skládající se z křivek C_1 a C_2, z nichž druhou bereme v opačném smyslu: $C = C_1 + C_2^-$ (viz obr. 83). Pak podle (7) a vlastnosti křivkových integrálů máme



Obr. 83.

$$0 = \oint_C f(z)\,dz = \int_{C_1} f(z)\,dz - \int_{C_2} f(z)\,dz,$$

odkud

$$\int_{C_2} f(z)\,dz = \int_{C_1} f(z)\,dz,$$

a integrál v oblasti D je nezávislý na integrační cestě. Naopak nechť integrál v oblasti D nezávisí na integrační cestě a C budiž libovolná uzavřená křivka v D. Vybereme na ni dva libovolné body a_1 a a_2 a označíme C_1 a C_2 oba oblouky křivky C takto získané. Pak máme (obr. 83)

$$\oint_C f(z)\,dz = \int_{C_1} f(z)\,dz - \int_{C_2} f(z)\,dz$$

a je tedy vyplněna rovnice (7).

Dále platí tato integrální věta Cauchyho:

Věta [2]. *Je-li $f(z)$ regulární funkce v jednoduše souvislé oblasti D, pak v této oblasti integrál z funkce $f(z)$ nezávisí na integrační cestě, t. j. pro libovolnou uzavřenou křivku C platí*

$$\oint_C f(z)\,dz = 0.$$

*) Kroužek v integrálu (7) značí uzavřenost integrační cesty.

Z podmínek regularity naší funkce plyne, že parciální derivace $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$ existují v každém bodě oblasti D a vyhovují rovnicím Cauchy-Riemannovým (viz § 14). Dokážeme větu Cauchyho za doplňujícího předpokladu, že tyto derivace jsou spojité.*) Jak plyne z rovnice (5), převede se úloha (7) na otázku anulování reálných křivkových integrálů

$$\oint_C u\,dx - v\,dy \quad \text{a} \quad \oint_C v\,dx + u\,dy. \tag{8}$$

Jak je známo z kursu analysy, k tomu, aby integrál

$$\oint_C P\,dx + Q\,dy$$

podél uzavřené křivky C ležící v jednoduše souvislé oblasti D byl rovný nule, stačí, aby**):

1. parciální derivace funkcí $P(x; y)$ a $Q(x, y)$ existovaly a byly všude spojité v oblasti D,

2. v každém bodě v oblasti D byla splněna rovnice

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Pro integrály (8) je podmínka 1. splněna v důsledku našich předpokladů. Podmínka 2. nabývá tvaru

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \tag{9}$$

což jsou zřejmě Cauchy-Riemannovy rovnice (§ 14), které jsou splněny ve všech bodech oblasti. Tím je naše věta dokázána.

Poznámka. Platí i věta obrácená k větě Cauchyho:

*) Podrobný důkaz věty Cauchyho nalezne čtenář v knize I. I. Privalova: Vvedenije v těoriju funkcij kompleksnogo pereměnnogo (Úvod do theorie funkcí komplexní proměnné) GOSTĚCHIZDAT, Moskva, 1948. [Nebo v knize K. Knopp: Funktionentheorie I, Sammlung Göschen, 1937, Berlin. *Pozn. překl.*]

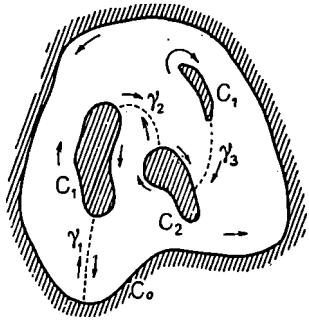
**) Doporučujeme čtenáři, aby si zapamatoval důkaz této věty a její předpoklady o jednoduché souvislosti oblasti D a spojitosti parciálních derivací.

Věta. *Budiž $f(z)$ spojitá v jednoduše souvislé oblasti D a nechť*

$$\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

podél libovolné uzavřené křivky C. Pak je $f(z)$ regulární v oblasti D.

Důkaz této věty zde nebudeme uvádět. Cauchyho věta nám dovoluje definovat novým způsobem regulární funkce. Stará i nová definice je ekvivalentní. Jednoznačná funkce se nazývá regulární v jednoduše souvislé oblasti D, je-li spojitá v této oblasti, a její integrál podél libovolné uzavřené křivky ležící v této oblasti je roven nule.



Obr. 84.

Věta Cauchyho se dá zevšeobecnit i pro vícenásobně souvislé oblasti. Budiž dána $(n+1)$-násobně souvislá oblast D ohraničená křivkami C_0 (vnější hranice), $C_1, C_2, C_3, \ldots, C_n$ (vnitřní hranice) a funkce $f(z)$ regulární v uzavřené oblasti $\overline{D}$ (obr. 84). Provedeme výřezy $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \ldots, \gamma_n$, které převedou oblast D v jednoduše souvislou oblast D', a označíme C' její hranici. Protože je D' jednoduše souvislá a $f(z)$ regulární v $\overline{D'}$, je podle věty Cauchyho

$$\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

Zvolíme si nyní takový smysl oběhu na C', aby oblast D' ležela vlevo. Pak bude smysl oběhu na C_0 kladný, na $C_1, C_2, \ldots, C_n$ záporný a cesty $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ budou proběhnuty vždy dvakrát v opačných směrech. Podle vlastností křivkových integrálů je

$$\oint_{C'} f(z)\,\mathrm{d}z = \oint_{C_0} f(z)\,\mathrm{d}z - \sum_{k=1}^{n} \oint_{C_k} f(z)\,\mathrm{d}z = 0 \qquad (10)$$

(integrály podél γ_k se vzájemně ruší).

Jestliže při oběhu hranice oblasti D budeme orientovat křivky tak, aby i v tomto případě ležela celá oblast D vlevo, změní se smysl oběhu na křivkách $C_1, C_2, \ldots, C_n$ a bude (píšeme C_k^- místo C_k):

$$\oint_C f(z)\,dz = \oint_{C_0} f(z)\,dz + \sum_{k=1}^{n} \oint_{C_k} f(z)\,dz = 0. \tag{11}$$

Vzorec (11) nám dává *zevšeobecněnou větu Cauchyho pro oblast libovolné souvislosti*:

Věta [3]. *Je-li $f(z)$ regulární v uzavřené oblasti D, pak její integrál podél hranice oblasti D, vzaté tak, že celá oblast leží po jedné straně, je roven nule.*

Poznámka. Podrobná analysa ukazuje, že věta 3 zůstává v platnosti, je-li $f(z)$ regulární v otevřené oblasti D a pouze spojitá v uzavřené oblasti $\bar{D}$.

§ 48. Residuová věta. Vzorec Čaplyginův. Ze vzorce (10) též plyne, že je-li $f(z)$ regulární všude uvnitř křivky C, kromě částí ohraničených křivkami $C_1, C_2, \ldots, C_n$, je

$$\oint_C f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{n} \oint_{C_k} f(z)\,dz \tag{12}$$

(ve vzorci (12) probíháme všechny křivky v kladném směru). Speciálně je-li $f(z)$ regulární v prstenci mezi křivkami C_k a C_k', je

$$\oint_{C_k} f(z)\,dz = \oint_{C_k'} f(z)\,dz. \tag{13}$$

Dále se často vyskytne případ, že funkce $f(z)$ bude regulární všude uvnitř C s výjimkou konečného počtu bodů $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Tyto body budeme nazývat *singulárními body**) funkce $f(z)$. Okolo každého z nich opíšeme dostatečně malou kružnici c_k tak, aby uvnitř c_k neležel už žádný další singulární bod, aby jednotlivé kružnice c_k neměly žádné společné body a všechny ležely uvnitř C.

Podle (13) se integrál z $f(z)$ podél C nezmění, nahradíme-li C libovolnou křivkou ležící cele uvnitř C a obsahující jen jediný singulární bod a_k, a tedy závisí jen na funkci $f(z)$ a bodu a_k. Velikost tohoto integrálu, kterou pro zjednodušení dalších úvah dělíme faktorem $2\pi i$, se nazývá *residuem* funkce $f(z)$ v bodě a_k a značí se symbolem

$$\operatorname{res} f(a_k) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_k} f(z)\,dz. \tag{14}$$

*) Podrobnou definici viz § 61.

Pomocí vzorce (12) můžeme vyslovit Cauchyho residuovou větu:

Věta [4]. *Budiž $f(z)$ regulární v oblasti $\bar{D}$ ohraničené křivkou C až na konečný počet singulárních bodů $a_1, a_2, \ldots, a_k$ ležících uvnitř C; pak integrál z funkce $f(z)$ podél křivky C je roven součtu residuí v bodech a_k násobenému faktorem $2\pi i$:*

$$\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{k=1}^{m} \operatorname{res} f(a_k). \tag{15}$$

Později (v kapitole VI) se budeme podrobněji zabývat charakterem singulárních bodů a uvedeme též některé způsoby výpočtu residuí, aniž počítáme příslušné integrály. Věty [4] možno použít k výpočtu integrálů funkcí komplexní proměnné a jistých integrálů funkcí reálné proměnné (viz kap. VII). Zde se omezíme pouze na uvedení řady vzorců, v nichž najde náš vzorec uplatnění.

a) *Stanovení úhrnného náboje a úhrnné práce.* Budiž dáno libovolné elektrostatické rovinné pole a budiž C libovolná uzavřená křivka, kterou je možno opsat jistým proužkem, nemajícím náboje. Pak podle vzorců (33) § 37 úhrnný náboj pole rozprostřený uvnitř C je

$$q = \frac{1}{4\pi} \oint_C (\boldsymbol{E}, \boldsymbol{n}^0)\,\mathrm{d}s = \frac{1}{4\pi} \oint_C \mathrm{d}U(x, y), \tag{16}$$

kde $U(x, y)$ je silová funkce pole. Označíme $F(z) = U + \mathrm{i}V$ komplexní potenciál pole. Podle našich předpokladů je funkce $F(z)$ regulární v jistém proužku opsaném kolem křivky C. Pak $U(x, y) = \operatorname{Re} F(z)$, $\mathrm{d}U(x, y) = \operatorname{Re} \mathrm{d}F(z) = \operatorname{Re} F'(z)\,\mathrm{d}z$ a vzorec (16) bude mít tvar

$$q = \frac{1}{4\pi} \operatorname{Re} \oint_C F'(z)\,\mathrm{d}z. \tag{17}$$

Je-li speciálně uvnitř křivky C pouze konečný počet bodových nábojů v bodech $a_1, a_2, \ldots, a_n$, pak podle residuové věty

$$q = \frac{1}{4\pi} \operatorname{Re}\{2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{res} F'(a_k)\} = -\tfrac{1}{2} \operatorname{Im} \sum_{k=1}^{n} \operatorname{res} F'(a_k). \tag{18}$$

Podobně ze vzorce (26) § 37 plyne, že práce potřebná k přenesení náboje $q = +1$ podél křivky C je

$$A = \int_C \mathrm{d}V(x, y) = \mathrm{Im} \int_C \mathrm{d}F(z) = \mathrm{Im} \int_C F'(z)\,\mathrm{d}z. \tag{19}$$

b) *Stanovení toku a cirkulace rychlosti.* Na základě vzorce (50) § 39 zcela analogicky odvodíme, že tok vektoru rychlosti uvnitř uzavřené křivky C, okolo které je možno opsat jistý proužek neobsahující ani zřídla, ani víry, je

$$Q = \oint_C (\boldsymbol{V}, \boldsymbol{n}^0)\,\mathrm{d}s = \oint_C \mathrm{d}\psi\,(x, y) = \mathrm{Im} \oint_C \Phi'(z)\,\mathrm{d}z, \tag{20}$$

kde $\psi(x, y)$ je proudová funkce a $\Phi(z) = \varphi(x, y) + \mathrm{i}\psi(x, y)$ komplexní potenciál proudění.

Ze vzorce (48) téhož § plyne, že cirkulace rychlosti podél křivky C je

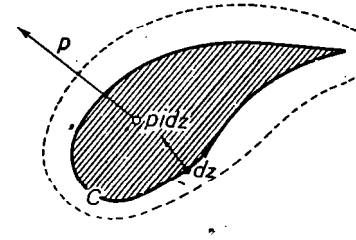
$$\Gamma = \oint_C (\boldsymbol{V}, \boldsymbol{s}^0)\,\mathrm{d}s = \oint_C \mathrm{d}\varphi(x, y) = \mathrm{Re} \oint_C \Phi'(z)\,\mathrm{d}z. \tag{21}$$

Spojením vzorců (20) a (21) dostaneme vztah

$$\Gamma + \mathrm{i}Q = \mathrm{Re} \oint_C \Phi'(z)\,\mathrm{d}z + \mathrm{i}\,\mathrm{Im} \oint_C \Phi'(z)\,\mathrm{d}z = \oint_C \Phi'(z)\,\mathrm{d}z. \tag{22}$$

Jsou-li speciálně uvnitř křivky C zřídla a víry jen v konečném počtu bodů $a_1, a_2, \ldots, a_n$, můžeme pomocí residuové věty přepsat (20) a (21) ve tvaru

$$\begin{aligned} Q &= 2\pi\,\mathrm{Re} \sum_{k=1}^{n} \mathrm{res}\Phi'(a_k), \\ \Gamma &= -2\pi\,\mathrm{Im} \sum_{k=1}^{n} \mathrm{res}\Phi'(a_k). \end{aligned} \tag{23}$$



Obr. 85.

c) *Čaplyginův vzorec.* Velikost tlaku při rovinném proudění ideální kapaliny je dána Bernouilliho vzorcem

$$p = A - \tfrac{1}{2}\varrho V^2, \tag{24}$$

kde A je jistá konstanta, ϱ hustota kapaliny a $V = |\boldsymbol{V}|$ modul rychlosti proudění.

Nechť kapalina obtéká nějakou uzavřenou křivku C. Tlak na křivce C má směr normály namířené dovnitř, a tedy velikost síly působící na element oblouku $\mathrm{d}s = |\mathrm{d}z|$ křivky C je

$$p\mathrm{i}\,\mathrm{d}z = A\mathrm{i}\,\mathrm{d}z - \tfrac{1}{2}\varrho\mathrm{i}V^2\,\mathrm{d}z$$

a úhrnná síla působící na celou křivku C je rovna vektorovému součtu $p\mathrm{i}\,\mathrm{d}z$, t. j.

$$P = X + \mathrm{i}Y = \oint_C p\mathrm{i}\,\mathrm{d}z = -\tfrac{1}{2}\varrho\mathrm{i}\oint_C V^2\,\mathrm{d}z$$

(kde integrál $\oint_C A\mathrm{i}\,\mathrm{d}z$ podle residuové věty je roven nule). Na křivce C má rychlost v důsledku obtékání směr tečny

$$\boldsymbol{V} = \overline{\Phi'(z)} = V\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi},$$

kde $\varphi = \arg \mathrm{d}z$ ($\mathrm{d}z = \mathrm{d}s\,.\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$). Odtud $V = \overline{\Phi'(z)}\,.\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}$ a náš vzorec nabude tvaru

$$\boldsymbol{P} = -\tfrac{1}{2}\varrho\mathrm{i}\oint_C [\overline{\Phi'(z)}]^2\,\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\varphi}\,\mathrm{d}z = -\tfrac{1}{2}\varrho\mathrm{i}\oint_C [\overline{\Phi'(z)}]^2\,\overline{\mathrm{d}z},$$

neboť $\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\varphi}\,\mathrm{d}z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\,\mathrm{d}s = \overline{\mathrm{d}z}$. Přejdeme-li ke komplexně sdruženým veličinám, dostaneme hodnotu vektoru komplexně sdruženého s vektorem $\boldsymbol{P}$. Vektor $\overline{\boldsymbol{P}}$ udává velikost a směr vztlaku, působící na křivku C:

$$\overline{\boldsymbol{P}} = X - \mathrm{i}Y = \tfrac{1}{2}\varrho\mathrm{i}\oint_C [\Phi'(z)]^2\,\mathrm{d}z. \tag{25}$$

Posledně uvedený vzorec pochází od S. A. Čaplygina. Nemá-li proudění žádné zdroje ani vichry vně obtékaného profilu, můžeme podle residuové věty nahradit konturu C libovolnou jinou (a k výpočtu vhodnější) křivkou, ležící vně obtékaného profilu.

§ 49. Neurčitý integrál. Funkce $F(z)$ se nazývá primitivní funkcí k funkci $f(z)$, platí-li

$$F'(z) = f(z).$$

Libovolné dvě primitivní funkce jedné a téže funkce $f(z)$ se navzájem liší jen o konstantu. Důkaz. Z definice plyne, že obě dvě primitivní funkce $F_1(z)$ a $F_2(z)$ i jejich rozdíl

$$\Phi(z) = F_1(z) - F_2(z) = U(x, y) + iV(x, y)$$

jsou regulární v jisté oblasti D. Dále

$$\Phi'(z) = F_1'(z) - F_2'(z) = \frac{\partial U}{\partial x} + i\frac{\partial V}{\partial x} \equiv 0,$$

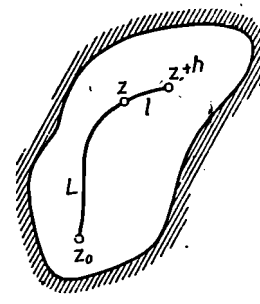
a tedy $\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial x} \equiv 0$. Z Cauchy-Riemannových rovnic plyne $\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial y} = 0$ a odtud, plyne jak se dokazuje v analyse, že funkce $U(x, y)$ a $V(x, y)$ jsou konstantní v oblasti D. Tedy i $\Phi(z) = C = \text{const}$ a

$$F_1(z) = F_2(z) + C.$$

Je zřejmé, že připočtením libovolné konstanty k primitivní funkci dostaneme opět primitivní funkci. Má-li tedy funkce $f(z)$ aspoň jednu primitivní funkci, má jich nekonečně mnoho.

Množina všech primitivních funkcí se nazývá *neurčitý integrál* a označuje se symbolem

$$\int_C f(z)\,dz.$$



Obr. 86.

Z toho, co bylo řečeno, plyne, že neurčitý integrál představuje množinu funkcí, lišících se navzájem jen o libovolnou adiční konstantu.

Věta [5]. *Budiž $f(z)$ regulární v jednoduše souvislé oblasti D a budiž z_0 jistý pevný bod v této oblasti. Pak funkce*

$$F(z) = \int_{z_0}^{z}{}_L f(z)\,dz,$$

kde integrujeme podél libovolné cesty L mezi body z_0 a z ležící uvnitř oblasti D, je regulární uvnitř D a je primitivní vzhledem k $f(z)$.

Z Cauchyho věty plyne, že $\int_{z_0}^{z} f(z)\,dz$ definuje nějakou jednoznačnou funkci $F(z)$. Zbývá jen dokázat, že $F'(z)$ existuje a je rovna $f(z)$. Budiž z libovolný bod v D a zvolme si číslo $\varepsilon > 0$. Pak najdeme takové

komplexní číslo h, že úsečka l s koncovými body z a $z + h$ ještě leží v D a že pro všechna ζ, pro která je $|\zeta - z| < |h|$, platí nerovnost

$$|f(\zeta) - f(z)| < \varepsilon.$$

Z vlastností křivkových integrálů plyne, že

$$\frac{F(z+h) - F(z)}{h} = \frac{1}{h}\int_z^{z+h} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta,$$

při čemž můžeme předpokládat, že integrujeme podél úsečky l (obr. 86). Z definice integrálu plyne ihned

$$\int_z^{z+h} \mathrm{d}\zeta = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} 1 \,.\, \Delta\zeta_k = h,$$

neboť součet

$$\sum_{k=1}^{n} \Delta\zeta_k = (\zeta_1 - z) + (\zeta_2 - \zeta_1) + \ldots + (z + h - \zeta_{n-1}) =$$
$$= z + h - z = h.$$

Můžeme tedy psát

$$\frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z) = \frac{1}{h}\left\{\int_z^{z+h} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta - f(z)\int_z^{z+h} \mathrm{d}\zeta\right\} =$$

$$= \frac{1}{h}\int_z^{z+h} \left\{f(\zeta) - f(z)\right\} \mathrm{d}\zeta.$$

Použijeme-li nerovnosti $|f(\zeta) - f(z)| < \varepsilon$ a věty **[1]**, dostaneme

$$\left|\frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z)\right| \leqq \frac{1}{|h|}\,\varepsilon \,.\, |h| = \varepsilon,$$

což značí, že limita

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(z+h) - F(z)}{h} = F'(z) = f(z)$$

existuje. Tím je věta dokázána.

Důsledek. *Budiž funkce $f(z)$ regulární v jednoduše souvislé oblasti D; pak můžeme psát její neurčitý integrál také takto:*

$$\int f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{z_0}^{z} f(z)\,\mathrm{d}z + C, \tag{26}$$

kde integrujeme podél libovolné cesty v D mezi body z_0 a z a kde C je libovolná konstanta.

Důsledek plyne přímo z věty 5 našeho paragrafu a z existenční věty integrálu (viz § 46).

Důsledek 2. *Vzorec Newtonův-Leibnizův. Budiž $f(z)$ regulární v jednoduše souvislé oblasti D; pak integrál podél cesty ležící cele uvnitř D s krajními body z_1 a z_2 je roven rozdílu funkčních hodnot příslušné primitivní funkce v těchto bodech.*

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)\,\mathrm{d}z = F(z_2) - F(z_1). \tag{27}$$

Důkaz. Podle věty 5 je

$$F(z) = \int_{z_1}^{z} f(z)\,\mathrm{d}z + C,$$

kde C je konstanta. Položme $z = z$ a máme $F(z_1) = C$. Odtud

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)\,\mathrm{d}z = F(z_2) - C = F(z_2) - F(z_1).$$

Z uvedeného je vidět, že se definice primitivní funkce a výpočet omezeného integrálu (vzorec Newtonův-Leibnizův) pro komplexní proměnnou shoduje s ekvivalentními pojmy pro funkci reálné proměnné. V důsledku toho platí pro primitivní funkce elementárních funkcí vzorce platné v theorii funkcí reálné proměnné.

§ 50. Integrování mocnin $(z-a)$. Nejprve budeme integrovat funkci $w = \frac{1}{z}$. Tato funkce má singulární bod v bodě $z = 0$, tedy integrál podél kružnice C: $|z| = R$ může být nenulový. Pro výpočet dosadíme: $z = Re^{i\varphi}$, odtud $\mathrm{d}z = Re^{i\varphi}\,\mathrm{i}\,\mathrm{d}\varphi$ a

$$\oint_C \frac{\mathrm{d}z}{z} = \int_0^{2\pi} \frac{Re^{i\varphi}\,\mathrm{i}\,\mathrm{d}\varphi}{Re^{i\varphi}} = \mathrm{i}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi = 2\pi\mathrm{i}. \tag{28}$$

Odtud a z (19) plyne, že se residuum funkce $w = \frac{1}{z}$ v singulárním bodě $z = 0$ rovná jedné.

Zkoumejme nyní hodnotu integrálu z $\frac{1}{z}$ podél libovolné cesty l s koncovými body 1 resp. z, která neprochází bodem 0. Za oblast D vezmeme rovinu z s výřezem podél záporné reálné osy. Pak hlavní větev logaritmu v oblasti D

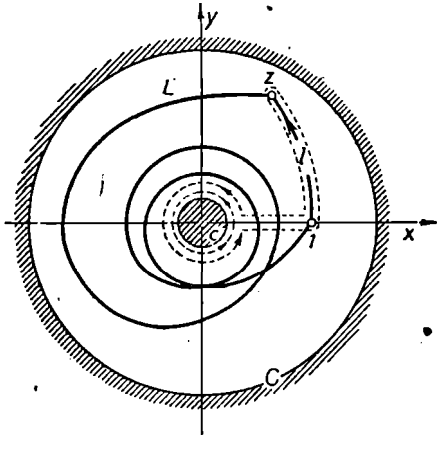
$$\ln z = \ln|z| + \mathrm{i} \arg z, \quad -\pi < \arg z \leqq \pi$$

je jednou z primitivních funkcí funkce $\frac{1}{z}$, neboť $\frac{\mathrm{d} \ln z}{\mathrm{d}z} = \frac{1}{z}$. Také $\int_1^z \frac{\mathrm{d}z}{z}$ je primitivní funkcí téže funkce a tedy podle (26)

$$\int_{z_0}^{z} \frac{\mathrm{d}z}{z} = \ln z + C.$$

Položíme v naší rovnici $z_0 = 1$, dostaneme $C = 0$ a

$$\int_1^z \frac{\mathrm{d}z}{z} = \ln z. \qquad (29)$$



Obr. 87.

Výraz (29) nazýváme *integrální vyjádření hlavní hodnoty logaritmu.*

Budiž nyní cesta L křivka s koncovými body 1 resp. z, libovolněkrát opisující bod $z = 0$, ale neprocházející jím.

Vezměme si nyní takovou kružnici c se středem v bodě $z = 0$, uvnitř které neleží žádný z bodů cesty l resp. L (taková kružnice vždycky existuje, protože ani jedna z obou cest neprochází bodem $z = 0$). Nyní sestrojme ještě s ní koncentrickou kružnici C takovou, že obě cesty l v L, leží uvnitř této kružnice (obr. 87). Označme L' uzavřenou křivku skládající se z křivky l a L^-, kde L^- značí křivku L oriento-

vanou ve směru od bodu z do 1. Podle vzorce (13) se hodnota integrálu $\int_{L'} \frac{dz}{z}$ nezmění, jestliže deformujeme L' libovolným způsobem, ale tak, že ještě zůstane celá v prstenci mezi křivkami c a C. Deformujeme tedy L' v L'' takto: L'' tvoří dvakrát proběhnutá (v opačných směrech) křivka l, a úsečka na reálné kladné poloose mezi bodem 1 a kružnicí c (taktéž dvakrát proběhnutá) a konečně n-krát proběhnutá kružnice c. Číslo n budeme brát kladně, bude-li oblouk L orientován proti pohybu hodinových ručiček, v opačném případě záporně (tak na př. na obr. 87 $n = -2$). Pak se integrály podél dvakrát počítaných oblouků resp. úseček ruší a zbude jen integrál podle kružnice, který se podle (28) rovná $2\pi ni$ (při čemž dbáme na znaménko čísla n podle naší úmluvy), a tedy

$$\int_C \frac{dz}{z} - \int_L \frac{dz}{z} = \int_{L''} \frac{dz}{z} = 2\pi ni$$

a

$$\int_1^z {}_L \frac{dz}{z} = \int_1^z \frac{dz}{z} - 2\pi ni = \ln z - 2\pi ni = \operatorname{Ln} z. \tag{30}$$

Tím jsme odvodili hodnotu integrálu z $\frac{1}{z}$ podél libovolné cesty s koncovými body 1 resp. z. Je jasné, že výraz (30) dá při vhodné volbě cesty L libovolnou hodnotu funkce Lnz. *Vztah* (30) *je tedy integrálním vyjádřením funkcí* Lnz.

Nyní přejdeme k obecnější funkci $(z-a)^n$, kde n je libovolné celé číslo, kladné, záporné nebo nula. Budiž C libovolná uzavřená cesta opisující jednou bod a. Označme c dostatečně malou kružnici o středu v bodě $z = a$, ležící cele uvnitř C. Pak je funkce $(z-a)^n$ regulární pro každé n v prstenci mezi křivkami c a C a podle (13) je

$$\oint_C (z-a)^n \, dz = \oint_c (z-a)^n \, dz,$$

kde obě kontury probíháme v tomtéž (třeba kladném) smyslu. Druhý

z integrálů vyčíslíme podobně jako v (19). Položme $z - a = re^{i\varphi}$, kde r je poloměr kružnice c, $dz = re^{i\varphi}i\,d\varphi$, a dostaneme

$$\oint_c (z-a)^n\,dz = \int_0^{2\pi} r^n e^{in\varphi} re^{i\varphi} i\,d\varphi = r^{n+1} i \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)\varphi} d\varphi.$$

Funkce $e^{i\lambda\varphi}$ je však integrabilní a integruje se podle pravidel platných v analyse reálné proměnné (viz § 8); pro $n \neq -1$ dostaneme

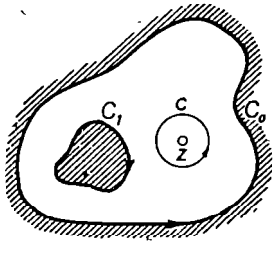
$$\oint_c (z-a)^n\,dz = \frac{r^{n+1}}{n+1}\left[e^{i(n+1)\varphi}\right]_0^{2\pi} = \frac{r^{n+1}}{n+1}\left\{e^{i2(n+1)\pi} - 1\right\} = 0,^*)$$

neboť pro libovolné celé n $e^{i(n+1)\pi} = 1$. Pro $n = -1$ zřejmě

$$\oint_c (z-a)^{-1}\,dz = i\int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi i.$$

Shrneme-li získané výsledky, máme *pro celistvá n*

$$\oint_c (z-a)^n\,dz = \begin{cases} 0 \text{ pro } n \neq -1, \\ 2\pi i \text{ pro } n = -1. \end{cases} \tag{31}$$



Obr. 88.

Odtud vidíme, že regularita funkce uvnitř integrační cesty není nutnou podmínkou pro anulování integrálu; funkce $(z-a)^n$ se singularitou v bodě $z = a$ a $n \neq -1$ má integrál (31) pro kladná celá n roven nule. Tentýž fakt plyne i z residuové věty, podle které integrál $\oint_c f(z)\,dz$ je roven nule nejen tehdy, je-li funkce $f(z)$ regulární uvnitř integrační cesty C, nýbrž i tehdy, má-li uvnitř C singulární body, jejichž součet residuí je nulový, nebo pouze jediný singulární bod, ale s nulovým residuem.

§ 51. Integrální věta Cauchyho. Obsahem této věty je fundamentální vlastnost regulárních funkcí. Ukazuje se, že funkce regulární v oblasti $\bar{D}$ je plně definována svými hodnotami $f(\zeta)$ na hranici D.

*) Pro kladná n plyne tato rovnice též přímo ze základní věty Cauchyho.

Jinak řečeno, pomocí hodnot funkce na hranici jisté oblasti je možno definovat hodnoty ve všech bodech uvnitř této oblasti.

Integrální vzorec Cauchyho zní

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z}. \tag{32}$$

Předpokládáme, že funkce $f(z)$ je regulární v uzavřené oblasti $\overline{D}$, z je libovolný vnitřní bod této oblasti a integrujeme podél hranice oblasti D tak, že při oběhu hranice leží oblast stále vlevo. (Hranice se ovšem může skládat po případě i z více různých křivek, viz obr. 88.)

Důkaz. Zvolíme si libovolně malé číslo $\varepsilon > 0$ a opíšeme okolo bodu z kružnici c $|\zeta - z| = r$ takovou, že pro všechny body ζ této kružnice platí nerovnost

$$|f(\zeta) - f(z)| < \varepsilon \tag{33}$$

(kde ovšem tuto kružnici volíme tak, aby ležela celá v D). To lze vždycky učinit, neboť funkce $f(z)$ je spojitá. V oblasti $\overline{D}^*$, která vznikne z oblasti $\overline{D}$ vynětím kruhu $|\zeta - z| < r$, je funkce $\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$ regulární. Použitím věty Cauchyho (§ 48) dostaneme

$$\oint_C \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z} = \oint_c \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z},$$

kde c probíháme v kladném smyslu. Podle vzorce (31) § 50 můžeme psát*)

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_c \frac{f(z)\, d\zeta}{\zeta - z}$$

a odtud

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z} - f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_c \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}\, d\zeta;$$

*) Podle vzorce (31) je $1 = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{d\zeta}{\zeta - z}$, a $f(z)$ je konstantní při integraci podle ζ.

a podle (33) věty [1] § 46

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} - f(z)\right| \leqq \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{\varepsilon}{r}\cdot 2\pi r = \varepsilon.$$

Podle předpokladu jsme volili ε libovolně malé; levá strana rovnice nezávisí na ε, tedy je rovna nule. Tím je věta dokázána.

Poznámka 1. Budeme-li volit bod z vně křivky C, bude funkce $\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$ regulární všude v $\overline{D}$ a podle věty Cauchyho bude

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} = 0. \tag{34}$$

Poznámka 2. Věta Cauchyho neztrácí platnost, je-li funkce $f(z)$ regulární jen uvnitř oblasti $\overline{D}$ a spojitá v uzavřené oblasti $\overline{D}$. Důkaz této věty nebudeme zde uvádět, nicméně jí budeme dále používat.

§ 52. Existence derivací vyšších řádů. Cauchyho integrální věta (32) nám umožňuje konstrukci regulární funkce $f(z)$ v oblasti D z jejích hodnot na hranici této oblasti. Tento vztah má smysl i v obecnějším případě, kdy C je libovolná (po případě neuzavřená křivka) v otevřené rovině z a jsou na ní dány hodnoty jisté spojité funkce $f(\zeta)$:

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z}. \tag{35}$$

Integrál (35) se nazývá *integrálem typu Cauchyho.*

Věta [6]. *Funkce definovaná integrálem typu Cauchyho je regulární v každém (konečném) bodě z, který neleží na křivce C. Ve všech takových bodech má funkce $F(z)$ derivace až do libovolného řádu dané vztahem*

$$F^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta - z)^{n+1}}. \tag{36}$$

Dokážeme nejprve, že v bodě, který neleží na křivce C existuje

$$F'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta - z)^2}. \tag{37}$$

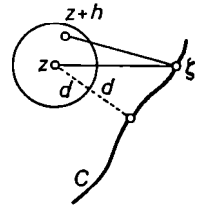
Důkaz. Odhadneme rozdíl mezi pravou stranou rovnice (37) a výrazem

$$\frac{F(z+h)-F(z)}{h}=\frac{1}{2\pi i h}\int_C\left\{\frac{1}{\zeta-z-h}-\frac{1}{\zeta-z}\right\}f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta}{(\zeta-z-h)(\zeta-z)}.$$

Budiž $2d$ nejmenší vzdálenost mezi bodem z a body ζ křivky C. Zvolme $|h|<d$; pak pro všechna ζ křivky C bude $|\zeta-z|>d$ a dále $|\zeta-z-h|>d$ (obr. 89) a odtud

$$\frac{1}{|\zeta-z|}<\frac{1}{d};\quad\frac{1}{|\zeta-z-h|}<\frac{1}{d}.$$



Obr. 89.

Budiž dále M maximum funkce $|f(\zeta)|$ na křivce C (které vždycky existuje, neboť $f(z)$ je spojitá na C a proto ohraničená, § 13). Pak podle věty **[1]** předešlé kapitoly

$$\left|\frac{F(z+h)-F(z)}{h}-\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta}{(\zeta-z)^2}\right|=\frac{1}{2\pi}\left|\int_C\frac{hf(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta}{(\zeta-z-h)(\zeta-z)^2}\right|\leqq$$

$$\leqq\frac{Ml}{2\pi d^3}|h|,$$

kde l je délka křivky C. Pravá strana konverguje k nule s $|h|$, a tedy derivace

$$\lim_{h\to0}\frac{F(z+h)-F(z)}{h}=F'(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta}{(\zeta-z)^2}$$

existuje. Tím je dokázána prvá část věty. Důkaz existence druhé derivace

$$\lim_{h\to0}\frac{F'(z+h)-F'(z)}{h}=F''(z)=\frac{2}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta}{(\zeta-z)^2}$$

a vyšších derivací se dokáže postupně stejným způsobem.

Poznámka. Vzorec (36) pro derivaci funkce pomocí integrálu typu Cauchyho (35) obdržíme též n-násobným derivováním integrálu

(35) podle parametru z a věta **[1]** neříká nic jiného, než že toto derivování podle parametru je přípustné.

Z věty **[6]** plyne ve speciálním případě z regularity funkce $f(z)$ v jisté uzavřené oblasti existence všech derivací funkce v této oblasti. To je ihned vidět z této úvahy: funkce $f(z)$ je definována integrálem Cauchyho, který je speciálním případem integrálu typu Cauchyho a tedy podle věty **[6]** má derivace všech řádů. Tím je dokázána tato věta:

Věta [7]. *Libovolná funkce regulární v uzavřené oblasti D má uvnitř této oblasti derivace libovolného řádu dané vztahem*

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} \, d\zeta, \quad n = 1, 2, 3, \ldots, \tag{38}$$

kde C je hranice oblasti.

Poznámka 1. Všechny derivace regulární funkce jsou regulární funkce. To plyne okamžitě z věty **[7]**, podle které jsou všechny derivace diferencovatelné funkce.

Poznámka 2. Definujeme-li $0! = 1$ a $f^{(0)}(z) = f(z)$, pak vzorec (38) platí i pro $n = 0$ a souhlasí s integrálním vzorcem Cauchyho (35).

Vidíme, že z pouhé existence první derivace plyne v jisté uzavřené oblasti bez jakýchkoliv dalších omezení existence a regularita všech ostatních derivací libovolně vysokého řádu. Touto vlastností se podstatně liší diferencovatelné funkce komplexní proměnné od diferencovatelných funkcí reálné proměnné.

§ 53. Vlastnosti regulárních funkcí. Vytkněme ještě několik dalších vlastností regulárních funkcí plynoucích z Cauchyho integrální věty. Budiž C kružnice $|z - \zeta| = r$ a položme $\zeta - z = re^{i\varphi}$; Cauchyho vzorec bude mít tvar

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z| = r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(\zeta)\, rie^{i\varphi}}{re^{i\varphi}} \, d\varphi =$$

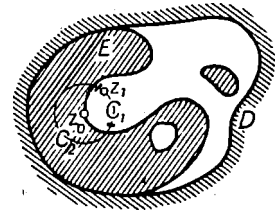
$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z + re^{i\varphi}) \, d\varphi. \tag{39}$$

Vzorec (39) se nazývá vzorec Gaussův. Z něho okamžitě plyne *věta o střední hodnotě regulárních funkcí.*

Věta [8]. *Budiž $f(z)$ regulární v uzavřeném kruhu, pak její hodnota ve středu tohoto kruhu je rovna její střední hodnotě na kruhu:*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z + re^{i\varphi})\,d\varphi. \tag{40}$$

Z věty o střední hodnotě plyne věta o maximu modulu:



Obr. 90.

Věta [9]. *Budiž $f(z)$ regulární v uzavřené oblasti $\overline{D}$ a nikoliv identicky rovna konstantě; pak její modul nenabývá svého maxima ve vnitřním bodě oblasti D.*

Důkaz provedeme sporem. Nechť tedy funkce $|f(z)|$ nabývá svého maxima M ve vnitřním bodě oblasti a označme E množinu všech bodů (vnitřních) z D, v kterých $|f(z)| = M$. Je-li E totožná s $\overline{D}$, t. j. všude v $\overline{D}$ platí $|f(z)| = M$, pak je $f(z)$ identicky rovna konstantě všude v $\overline{D}$.

Důkaz. Je-li $M = 0$, je to zřejmé. Je-li $M \neq 0$, je $f(z) \neq 0$ a funkce

$$\ln f(z) = \ln|f(z)| + i \arg f(z)$$

je regulární (jako složená funkce regulárních funkcí) v D. Její reálná část je ale podle předpokladů konstantní a z Cauchy-Riemannových rovnic

$$\frac{\partial \arg f(z)}{\partial x} = -\frac{\partial \ln|f(z)|}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \arg f(z)}{\partial y} = \frac{\partial \ln|f(z)|}{\partial x} = 0$$

plyne, že i její imaginární část je konstantní.*) Funkce $\ln f(z)$ je tedy konstantní, a tedy i $f(z)$ je konstantní všude v $\overline{D}$, což je proti předpokladu.

Není-li E totožná s $\overline{D}$, existuje její hraniční bod, označme jej z_0,**) který bude vnitřním bodem oblasti D (viz § 6). Protože je $f(z)$ podle

*) Jestliže jsou obě první parciální derivace nějaké funkce v jisté oblasti identicky rovny nule, je tato funkce konstantní v této oblasti. (Viz K. Petr: Počet diferenciální, str. 317, JČMF, Praha, 1923. *Pozn. překl.*)

**) Hranice množiny je definována stejně jako hranice oblasti.

předpokladu spojitá, bude $|f(z_0)| = M$, neboť v každém okolí bodu z_0 lze najít body patřící do E. Sestrojíme pak kružnici $|z - z_0| = r$ patřící cele do D tak, aby na ní ležel bod z_1, který nepatří do E (to je vždy možno učinit, protože bod z_0 byl podle předpokladů hraniční). Pak je $|f(z_1)| < M$ a můžeme najít takové okolí C_1 bodu z_1 na této kružnici v němž platí $|f(z)| \leqq M - \varepsilon$. Označme dále C_2 zbytek z kružnice $|z - z_0| = r$ (obr. 90). Pak podle (40) bude

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \oint_0^{2\pi} f(z)\, \mathrm{d}\varphi = \frac{1}{2\pi r} \left\{ \int_{C_1} f(z)\, \mathrm{d}s + \int_{C_2} f(z)\, \mathrm{d}s \right\}.$$

Podle věty **[1]** předcházející kapitoly

$$M = |f(z_0)| \leqq \frac{(M - \varepsilon) l_1 + M l_2}{2\pi r} = M - \frac{\varepsilon l_1}{2\pi r},$$

kde l_1 je délka kružnice C_1 a l_2 délka kružnice C_2. Poslední nerovnost vede však ke sporu a tím je naše věta dokázána.

Poznámka 1. Protože $|f(z)|$ podle věty **[2]** § 13 nabývá svého maxima v uzavřené oblasti $\overline{D}$, musí tohoto maxima nabývat na hranici oblasti D (předpokládáme, že funkce $f(z)$ je regulární v $\overline{D}$ a nerovná se identicky nule).

Poznámka 2. Je-li $f(z) \neq \text{const}$ regulární v uzavřené oblasti $\overline{D}$ a nemá v této oblasti žádné nulové body, pak platí zcela obdobná věta i o minimu modulu funkce $f(z)$. V důkazu stačí nahradit pouze funkci $f(z)$ funkcí $g(z) = \frac{1}{f(z)}$ rovněž regulární v oblasti $\overline{D}$ a aplikovat větu **[9]**.

Ze vztahu (38) plyne pro *odhad derivace funkce* regulární v kruhu $|\zeta - z| \leqq R$:

$$|f^{(n)}(z)| = \frac{n!}{2\pi} \left| \oint_{|\zeta - z| = R} \frac{f(\zeta)\, \mathrm{d}\zeta}{(\zeta - z)^{n+1}} \right| \leqq \frac{n!\, M \,.\, 2\pi R}{2\pi R^{n+1}} = \frac{n! M}{R^n}, \qquad (41)$$

kde M je maximum modulu funkce $f(z)$ na kružnici $|\zeta - z| = R$. Speciálně pro prvou derivaci platí

$$|f'(z)| \leqq \frac{M}{R}. \qquad (42)$$

Předpokládejme nyní, že $f(z)$ je regulární v celé otevřené rovině a je tam ohraničená, t. j. všude platí $f(z) \leqq M$. Nerovnost (42) platí pak pro všechny konečné body a všechna kladná R. Provedeme-li v nerovnosti (42) limitní přechod pro $R \to \infty$, dostaneme vztah

$$|f'(z)| \equiv 0,$$

který platí v libovolném bodě roviny. Odtud $f'(z) \equiv 0$ a $f(z) \equiv \text{const}$ (viz př. 16, kap. 1). Tím jsme dokázali tuto větu:

Věta [10]. *Funkce $f(z)$ regulární a ohraničená v celé otevřené rovině, je konstantní (Liouville).*

Poznámka 1. Při formulaci existenční věty o konformním zobrazení libovolné jednoduše souvislé oblasti na jednotkový kruh jsme vyloučili případ, že by touto oblastí byla celá uzavřená rovina nebo rovina s jedním vyňatým bodem. Příčina tohoto vyloučení je nyní jasná: Neboť funkce $f(z)$, zobrazující otevřenou rovinu na jedničkový kruh, byla by regulární v celé otevřené rovině a kromě toho by byla omezená: $|f(z)| \leqq 1$. Podle Liouvillovy věty by to však byla konstanta a zobrazení by nebylo konformní. Neexistuje tedy konformní zobrazení otevřené a tím spíše uzavřené celé roviny na jedničkový kruh. Rovinu s vyňatým bodem $z = a$ převedeme na právě uvedený případ pomocí zobrazení $\zeta = \dfrac{1}{z - a}$.

Poznámka 2. Věta Liouvillova může být značně zesílena:

Nechť funkce $f(z)$ je regulární v celé otevřené rovině a nechť nenabývá hodnot ležících na jisté křivce l v rovině w. Pak je tato funkce rovna konstantě.

Abychom dokázali naši větu, sestrojíme konformní zobrazení $\omega = \varphi(w)$ vnějšku křivky l na vnitřek jedničkového kruhu (což je vždy možné podle existenční věty § 23) a budeme zkoumat složenou funkci $\omega = \varphi[f(z)] = \Phi(z)$. Je zřejmě regulární všude v otevřené rovině a ohraničená, neboť její hodnoty leží uvnitř jednotkového kruhu. Pak podle Liouvilleovy věty $\Phi(z) = \text{const}$ a odtud, protože $\varphi(z) \neq \text{const}$ plyne $f(z) = \text{const}$.

§ 54. Harmonické funkce. Budiž

$$f(z) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$$

funkce regulární v jisté oblasti D. Pak v každém bodě oblasti D existuje derivace

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - \mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial y} \tag{43}$$

(viz § 14). Odtud plyne i existence parciálních derivací $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$. Avšak podle tvrzení § 52 je $f'(z)$ též regulární funkce v D a existuje

$$f''(z) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mathrm{i}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \mathrm{i}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \tag{44}$$

[kde jsme znovu použili (43)]. Z (44) plyne existence druhých parciálních derivací funkce $u(x, y)$ a $v(x, y)$. Jelikož je $f''(z)$ spojitá, jsou i parciální derivace spojité. Podobně bychom mohli totéž odvodit pro derivace všech řádů.

Z (44) plynou vztahy

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial y^2},$$

t. j. funkce $u(x, y)$ a $v(x, y)$ vyhovují parciální diferenciální rovnici druhého řádu

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{45}$$

t. zv. rovnici Laplaceově (Δ je t. zv. Laplaceův diferenciální operátor).

Definice. Reálná funkce dvou proměnných se nazývá *funkcí harmonickou* v oblasti D, má-li spojité parciální derivace prvního a druhého řádu a hoví-li Laplaceově diferenciální rovnici (45).

Dokázali jsme větu

Věta [11]. *Reálná a imaginární část regulární funkce komplexní proměnné $f(z) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$ v oblasti D jsou harmonické funkce v této oblasti.*

Dvě harmonické funkce $u(x, y)$ a $v(x, y)$ svázané rovnicemi Cauchy-Riemannovými se nazývají *sdružené*:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{46}$$

Dokážeme si nyní, že v *jednoduše souvislé oblasti* je možno k libovolné harmonické funkci $u(x, y)$ sestrojit funkci $v(x, y)$ s ní sdruženou. Úloha přejde na konstrukci funkce $v(x, y)$ z daných jejích prvních parciálních derivací. Tuto úlohu řeší integrál

$$\int_{z_0}^{z} -\frac{\partial u}{\partial y}\,dx + \frac{\partial u}{\partial x}\,dy,$$

kde z_0 je pevný, $z = x + iy$ proměnný bod. Podle (45) nezávisí tento integrál na integrační cestě a je funkcí pouze z nebo, což je totéž, x a y. Je tedy funkce $v(x, y)$ určena až na adiční konstantu integrálem

$$v(x, y) = \int_{z_0}^{z} -\frac{\partial u}{\partial y}\,dx + \frac{\partial u}{\partial x}\,dy + C, \tag{47}$$

kde C je libovolná konstanta. Funkce

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y) \tag{48}$$

je regulární v oblasti D, neboť splňuje Cauchy-Riemannovy rovnice (46); funkce (47) je tedy harmonická.

Stejným způsobem se konstruuje k dané harmonické funkci $v(x, y)$ s ní konjugovaná funkce $u(x, y)$. Tím jsme dokázali tuto větu:

Věta [12]. *Každá harmonická funkce v jisté oblasti D tvoří reálnou nebo imaginární část jisté regulární funkce v této oblasti.*

Poznámka. Je-li oblast D vícenásobně souvislá, nemusí být funkce daná integrálem (47) ani funkce (48) jednoznačně určena. Viz § 38, kde se řeší kvalitativně podobné problémy.

Věty **[11]** a **[12]** dovolují přenést vlastnosti funkcí regulárních i na funkce harmonické. Především vyslovíme důležitou větu:

Věta [13]. *Budiž $u(z)$*) harmonická v jisté jednoduše souvislé oblasti D a budiž $z = \varphi(\zeta)$ regulární v oblasti Δ, a nechť funkční hodnoty funkce $z = \varphi(\xi)$ leží v oblasti D. Pak složená funkce $u[\varphi(\zeta)] = u(\zeta)$ je harmonická v oblasti Δ.*

*) Píšeme pro jednoduchost $u(z)$ místo $u(x, y)$. Tohoto označení budeme používat i v dalším.

Důkaz. Sestrojíme regulární funkci v oblasti D, jejíž reálná část je funkce $u = \mathrm{Re}\, f(z)$. Pak $U(\zeta) = \mathrm{Re}\, f[\varphi(\zeta)]$, a protože $f[\varphi(\zeta)] = F(\zeta)$ je regulární v Δ, je $U(\zeta)$ v Δ harmonická.

Z věty **[7]** § 52 plyne: *libovolná harmonická funkce má parciální derivace všech řádů, které jsou opět harmonické.*

Oddělením reálné části v (39) dostáváme *větu o střední hodnotě harmonických funkcí*

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z + re^{i\varphi})\, d\varphi. \tag{49}$$

O extrému harmonických funkcí platí věta:

Věta [14]. *Je-li $u(z) \not\equiv$ const harmonická v uzavřené oblasti $\overline{D}$, nenabývá svého extrému v žádném vnitřním bodě oblasti D.*

Větu stačí dokázat pro maximum harmonické funkce. Pro důkaz věty o minimu harmonické funkce stačí uvažovat funkci $v(z) = -u(z)$, jejíž maximum je minimem funkce $u(z)$, a použít dokázané věty o maximu [$v(z)$ je též harmonická].

Důkaz provedeme sporem. Nechť harmonická funkce $u(z)$ nabývá svého maxima v některém vnitřním bodě oblasti D, který označíme z_0. Oblast D převedeme vhodným způsobem pomocí výřezů v jednoduše souvislou oblast D' (viz § 47) tak, že bod z_0 zůstane vnitřním bodem oblasti D'. Pak sestrojíme funkci $v(z)$ sdruženou k funkci $u(z)$ a označíme $\varphi(z) = u(z) + iv(z)$. Funkce $e^{\varphi(z)}$ bude regulární v D' a její modul bude $|e^{\varphi(z)}| = e^{u(z)}$. Podle předpokladu však funkce $e^{u(z)} = |e^{\varphi(z)}|$ nabývá maxima ve vnitřním bodě oblasti D', což je ve sporu s větou **[9]**. Tím je věta **[14]** dokázána.

Pro harmonické funkce platí i *věta Liouvilleova* z § 53:

Je-li harmonická funkce $u(z)$ ohraničená v celé otevřené rovině, $m \leqq u(z) \leqq M$, pak je konstantní. Důkaz. Sestrojíme regulární funkci $f(z)$, kde $u(z) = \mathrm{Re}\, f(z)$. Podle předpokladu leží hodnoty funkce $f(z)$ v pásu $m \leqq u \leqq M$, a tedy podle poznámky 2 k větě Liouvillově je $f(z) \equiv$ const a odtud ihned $u(z) = \mathrm{Re}\, f(z) \equiv$ const.

§ 55. Problém Dirichletův. Mnohé úkoly matematické fysiky vedou na úlohu sestrojit funkci harmonickou v jisté oblasti z jejích hodnot na

hranici této oblasti. Se speciálním případem této úlohy jsme se setkali vlastně již v § 45, kde jsme konstruovali potenciál z jeho hodnot na reálné ose.

Budeme nyní přesně formulovat naši úlohu. Pro zjednodušení našich úvah zavedeme několik předpokladů: oblast D budiž jednoduše souvislá, hranice oblasti D křivka C budiž hladká a hodnoty funkce $u(z)$ na této křivce $\tilde{u}(\zeta)$ — buďtež dány spojitou funkcí bodů ζ křivky C.

Problém Dirichletův neboli *prvý hraniční problém* harmonických funkcí spočívá v konstrukci funkce $u(z)$, která je

1. *harmonická v oblasti* D,
2. *spojitá v uzavřené oblasti* $\overline{D}$,
3. *na hranici* C *oblasti* D *nabývá daných hodnot*

$$u(\zeta) = \tilde{u}(\zeta).$$

Dokážeme si nejprve jednoznačnost řešení.

Věta [15]. *V dané oblasti* D *pro dané hodnoty* $\tilde{u}(\zeta)$ *neexistuje více než jedno řešení Dirichletova problému.*

Důkaz věty **[15]** provedeme za doplňujícího předpokladu, že předpokládané řešení je harmonické v uzavřené oblasti $\overline{D}$.

Nechť $u_1(z)$ a $u_2(z)$ jsou dvě taková řešení. Jejich rozdíl je funkce harmonická v $\overline{D}$ na křivce C rovná nule. Maximum i minimum této funkce je pak rovno nule a podle věty **[14]** je $u(z) \equiv 0$. Odtud ihned plyne platnost vztahu $u_1(z) \equiv u_2(z)$ všude v uzavřené oblasti $\overline{D}$ a naše věta je dokázána.

Poznámka. Podrobnějším rozborem se dokáže, že věta [14] zůstane v platnosti i v případě, když je funkce harmonická v oblasti D a pouze spojitá v uzavřené oblasti $\overline{D}$. Odtud ihned plyne důkaz věty **[15]** za těchže předpokladů.

Teprve nyní dokážeme methodu řešení Dirichletova problému. Nechť z_0 je libovolný vnitřní bod oblasti D a nechť funkce

$$w = f(z; z_0), \quad f(z_0; z_0) = 0 \tag{50}$$

zobrazí jedno-jednoznačně a konformně oblast D na jednotkový kruh $|w| < 1$ (funkce (50) závisí na volbě bodu z_0, to je zdůrazněno jejím označením). Předpoklady, pro které byl vysloven Dirichletův

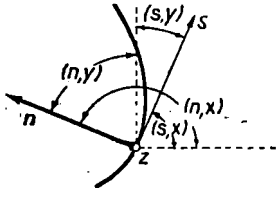
problém, doplníme předpokladem, že funkce (50) je regulární v uzavřené oblasti $\overline{D}$.*) Funkce $u(z)$ harmonická v oblasti $\overline{D}$ přejde pomocí funkce $z = \varphi(w)$, $\varphi(0) = z_0$ [inversní k funkci (50)] na funkci

$$U(w) = u[\varphi(w)],$$

harmonickou v uzavřeném jednotkovém kruhu $|w| \leqq 1$ (viz větu 13). Podle věty o střední hodnotě (§ 54)

$$U(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U(\omega)\, \mathrm{d}\Theta, \tag{51}$$

kde $\omega = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Theta}$ je bod na kružnici $|w| = 1$. Přejdeme v (51) k veličinám vztahujícím se k rovině z. Je $U(0) = u[\varphi(0)] = u(z_0)$, $U(\omega) = u[\varphi(\omega)] = u(\zeta)$, kde ζ je bod na kontuře C. Zavedeme na křivce C jako parametr oblouk s měřený v kladném smyslu od pevného bodu ζ_0, takže



Obr. 91.

$$\mathrm{d}\Theta = \frac{\partial \Theta}{\partial s}\, \mathrm{d}s.$$

Vzorec (51) přejde na tvar

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi} \oint_C u(\zeta)\, \frac{\partial \Theta}{\partial s}\, \mathrm{d}s. \tag{52}$$

Zavedeme dále (obr. 91) směr vnitřní normály n ke křivce C a máme

$$\cos(s, x) = \cos(n, y), \quad \cos(s, y) = -\cos(n, x);$$

odtud

$$\frac{\partial \Theta}{\partial s} = \frac{\partial \Theta}{\partial x} \cos(s, x) + \frac{\partial \Theta}{\partial y} \cos(s, y) = \frac{\partial \Theta}{\partial x} \cos(n, y) - \frac{\partial \Theta}{\partial y} \cos(n, x). \tag{53}$$

Sestrojíme nejprve funkci

$$\ln \frac{1}{f(z; z_0)} = \ln \frac{1}{|f(z; z_0)|} + \mathrm{i} \arg \frac{1}{f(z; z_0)} = g(z; z_0) - \mathrm{i}\Theta(z; z_0),$$

jejíž reálná část je funkce

$$g(z; z_0) = \ln \frac{1}{|f(z; z_0)|}, \tag{54}$$

*) To bude zajištěno, bude-li křivka C analytická, viz poznámka v § 82.

která bývá obyčejně nazývána *Greenova funkce* v oblasti D pro bod z_0. Odvodíme si některé její vlastnosti. Předně je zřejmé, že

$$g(z_0; z_0) = \ln \frac{1}{|f(z_0; z_0)|} = \infty; \quad g(\zeta; z_0) = \ln \frac{1}{|f(\zeta; z_0)|} = 0,$$

kde ζ je libovolný bod na kontuře C (vzpomeňme, že $w = f(z; z_0)$ zobrazí oblast D na jednička kruh s okrajovými podmínkami (50). Greenova funkce je všude v D kromě bodu $z = z_0$ harmonická, neboť

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 0$$

(je reálnou částí regulární funkce).

Bez důkazu uvedeme: Greenova funkce je symetrická

$$g(z; z_0) = g(z_0; z);$$

odkud speciálně plyne, že pro $z_0 \neq z$ je též harmonická vzhledem k $z_0 = x_0 + iy_0$:

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y_0^2} = 0.$$

Protože funkce $\ln \frac{1}{f(z; z_0)}$ je na kontuře C regulární, je podle Cauchy-Riemannových rovnic $\frac{\partial g}{\partial x} = -\frac{\partial \Theta}{\partial y}$, $\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial \Theta}{\partial x}$; z (53) plyne*)

$$\frac{\partial \Theta}{\partial s} = \frac{\partial g}{\partial y} \cos(n, y) + \frac{\partial g}{\partial x} \cos(n, x) = \frac{\partial g}{\partial n}. \tag{55}$$

A (52) má tvar

$$\mu(z_0) = \frac{1}{2\pi} \oint_C u(\zeta) \frac{\partial g(\zeta; z_0)}{\partial n} \, ds. \tag{56}$$

---

*) Jak je vidět z odvození (55), platí tento vztah pro všechny regulární funkce $f(z) = u(z) + iv(z)$ a pro libovolné dvojice navzájem kolmých směrů s a n, zvolených jako na obr. 91. Použijeme-li tohoto nového označení, bude mít (55) tvar

$$-\frac{\partial v}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial n}. \tag{55'}$$

Tento vzorec obsahuje v sobě jako speciální případ i Cauchy-Riemannovy rovnice, jak se snadno přesvědčíme dosazením $n = x$, $s = -y$, resp. $s = x$, $u = y$.

Vzorec (56) se nazývá *vzorcem Greenovým. Pomocí Greenova vzorce, jak jsme právě dokázali, můžeme sestrojit harmonickou funkci v oblasti D z jejích hodnot na hranici oblasti D, t. j. vzorec Greenův řeší Dirichletův problém.*

Budiž nyní dána na hranici oblasti D libovolná reálná spojitá funkce $\tilde{u}(\zeta)$. Pomocí Greenova vzorce můžeme sestrojit v oblasti D funkci

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \oint_C \tilde{u}(\zeta) \frac{\partial g(\zeta; z)}{\partial n} \, ds \qquad (57)$$

[kde jsme proti (56) dosadili za z_0 z a místo $u(\zeta)$ $\tilde{u}(\zeta)$]. Ovšem z našich úvah nikterak neplyne, že tato funkce řeší Dirichletův problém. Abychom to dokázali, museli bychom se přesvědčit, že takto konstruovaná funkce je harmonická v oblasti D a že její hodnoty konvergují k hodnotě $\tilde{u}(\zeta)$, když konverguje bod z k hraničnímu bodu ζ. Úvahami, které zde nebudeme pro jejich složitost uvádět, lze dokázat, že za našich předpokladů [$\tilde{u}(\zeta)$ je spojitá a hraniční křivka C hladká] tomu vskutku tak je. *Vzorec (57) je tedy řešením Dirichletova problému.*

Poznámka 1. V aplikacích se velmi často stane, že funkce $\tilde{u}(\zeta)$ má na hranici body nespojitosti prvého druhu (t. j. limity zprava i zleva existují a liší se o konečné číslo). Pak je možné dokázat, že funkce $u(z)$ definovaná vztahem (57) je harmonická v oblasti D a její hodnoty konvergují k hodnotám funkce $\tilde{u}(\zeta)$, blíží-li se bod z k hraničnímu bodu ζ, v němž je funkce $\tilde{u}(\zeta)$ spojitá. Pro hraniční body nespojitosti funkce $\tilde{u}(\zeta)$ limita funkce $u(z)$ neexistuje a závisí na způsobu, jakým se bod z blíží bodu nespojitosti ζ funkce $\tilde{u}(\zeta)$. Všechny takové hodnoty leží však mezi hodnotou limity funkce $\tilde{u}(\zeta)$ zleva a zprava.

Poznámka 2. Z právě uvedených úvah plyne, že známe-li jednojednoznačné konformní zobrazení dané oblasti na jedničkový kruh, můžeme pomocí Greenovy formule řešit Dirichletův problém. Dokážeme, že naopak *umíme-li řešit Dirichletův problém pro jistou oblast D, lze sestrojit jedno-jednoznačné konformní zobrazení této oblasti na jedničkový kruh.*

Podle existenční věty § 23 takové zobrazení pomocí funkce $w = f(z)$,

$f(z_0) = 0$ existuje. Předpokládejme, že toto zobrazení již známe, a uvažujme funkci

$$\varphi(z) = \frac{f(z)}{z - z_0}. \tag{58}$$

Funkce $\varphi(z)$ je regulární a od nuly různá pro všechna z různá od z_0. Pro $z \to z_0$ $\varphi(z) \to f'(z_0) \neq 0$ (zobrazení je konformní). Odtud plyne, jak dokážeme později (§ 66), regulárnost funkce $\varphi(z)$ v celé oblasti D. Protože $\varphi(z)$ je v D všude nenulová, je funkce $g(z) = \ln|\varphi(z)|$ harmonická v D. Na hranici D je

$$g(\zeta) = \ln\left|\frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0}\right| = \ln\frac{1}{|\zeta - z_0|}, \tag{59}$$

neboť $w = f(z)$ zobrazí D na jednotkový kruh.

Přitom ovšem funkci $w = f(z)$ zprostředkující zobrazení dosud neznáme. Z okrajových podmínek (59) zkonstruujeme harmonickou funkci $g(z)$ (což lze podle věty **[15]** učinit jen jedním způsobem), a pak sestrojíme s ní sdruženou funkci $h(z)$ (která je určena kvadraturami až na adiční konstantu h_0). Funkce $\ln\varphi(z) = g(z) + ih(z) + ih_0$ je tedy určena až na ryze imaginární adiční konstantu ih_0. Pak odtud a z (58) určíme $f(z) = (z - z_0)\,e^{\ln\varphi(z)}$ (až na činitel e^{ih_0}, který geometricky značí pootočení kruhu w) v souhlase s okrajovými podmínkami pro funkci $f(z)$ (viz § 23).

§ 56. Integrál Poissonův a Schwarzův. Dále budeme se zabývat velmi častým případem, kdy oblast D je tvořena kruhem $|z| < R$. Podle (25) § 22 je zobrazení tohoto kruhu na jednotkový kruh dáno funkcí

$$w = f(z; z_0) = \frac{R(z - z_0)}{R^2 - \bar{z}_0 z}$$

a Greenova funkce má tvar

$$g(z; z_0) = -\ln\left|\frac{R(z - z_0)}{R^2 - \bar{z}_0 z}\right|.$$

Zavedeme si polární souřadnice vztahy $z_0 = re^{i\varphi}$, $\zeta = Re^{i\varphi}$ (ζ leží na kružnici $|z| = R$) a zavedeme na kružnici obecný parametr ψ místo oblouku s. Pak $ds = R\,d\psi$ a podle (55)

$$\frac{\partial g}{\partial n} = \frac{\partial \arg f(\zeta; z_0)}{\partial g} = \frac{1}{R}\frac{\partial \arg f(\zeta; z_0)}{\partial \psi}.$$

Protože $g(\zeta; z_0) = 0$, platí

$$\frac{\partial \arg f(\zeta; z_0)}{\partial \psi} = -\mathrm{i}\,\frac{\partial \ln f(\zeta; z_0)}{\partial \psi}$$

a

$$\frac{\partial g}{\partial n} = -\frac{\mathrm{i}}{R}\,\frac{\partial \ln f(\zeta; z_0)}{\partial \psi} = -\frac{\mathrm{i}}{R}\,\frac{\partial}{\partial \psi}\ln\frac{Re^{\mathrm{i}\psi} - re^{\varphi}}{R - re^{\mathrm{i}(\psi-\varphi)}} =$$

$$= \frac{1}{R}\,\frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\psi - \varphi) + r^2}.$$

Dosadíme-li tento výraz do (57) a píšeme-li ještě $u(\psi)$ místo $\tilde{u}(\zeta)$ a $R\,\mathrm{d}\psi$ místo $\mathrm{d}s$, dostáváme konečně

$$u(re^{\mathrm{i}\varphi}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\psi)\,\frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\psi - \varphi) + r^2}\,\mathrm{d}\psi. \tag{60}$$

Vzorec (60) se nazývá *integrál Poissonův* a řeší Dirichletův problém pro kruh.

Zcela obdobný tvar má příslušný Greenův vzorec pro horní polorovinu $y > 0$. Odvození je zcela analogické, jen místo vztahu (25) § 22 vyjdeme od vztahu (23) téhož paragrafu, který nám poskytuje zobrazení poloroviny na jednotkový kruh. Po provedení příslušných výpočtů dostaneme *Poissonův integrál pro polorovinu*

$$u(x, y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} u(\xi)\,\frac{y\,\mathrm{d}\xi}{(x - \xi)^2 + y^2}, \tag{61}$$

kde $u(\xi)$ jsou dané okrajové podmínky pro harmonickou funkci podél reálné osy. Funkce $u(\xi)$ musí být všude spojitá až na konečný počet bodů nespojitosti prvého druhu (viz poznámku v předcházejícím paragrafu).

Čtenář si sám snadno dokáže, že pro t. zv. *jádro Poissonova integrálu* pro kruh platí vztah

$$\frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\psi - \varphi) + r^2} = \mathrm{Re}\,\frac{\zeta + z}{\zeta - z}$$

(kde $\zeta = Re^{\mathrm{i}\psi}$, $z = re^{\mathrm{i}\varphi}$).

Zkoumejme funkci

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\psi) \frac{\zeta + z}{\zeta - z} \, \mathrm{d}\psi + Ai, \qquad (62)$$

kde A je reálná konstanta. Podle věty **[6]** o Cauchyho integrálu (§ 52) je tato funkce regulární uvnitř kruhu $|z| < R$. Z konstrukce vyplývá, že její reálná část je totožná s Poissonovým integrálem (60). Vzorec (62) nám tedy umožňuje konstrukci regulární funkce uvnitř kruhu z hodnot $u(\psi)$ její reálné části na hraniční kružnici. Nazývá se běžně *Schwarzovým integrálem.*

Ve Schwarzově integrálu zůstává neurčena konstanta A. Položme $z = 0$ a je

$$f(0) = u(0) + iv(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\psi) \, \mathrm{d}\psi + Ai.$$

Podle věty o střední hodnotě je integrál vpravo roven $u(0)$ a tedy $A = v(0)$ a *integrál Schwarzův* nabývá konečného tvaru

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\psi) \frac{\zeta + z}{\zeta - z} \, \mathrm{d}\psi + iv(0). \qquad (63)$$

Snadno se přesvědčíme, že *Schwarzův integrál pro polorovinu* má tvar

$$f(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v(\xi) \, \mathrm{d}\xi}{\xi - z} + B, \qquad (64)$$

kde B je reálná konstanta; spojitá reálná funkce $v(\xi)$ splňuje předpoklad: existují dvě reálné konstanty C a α takové, že pro dostatečně velké $|\xi|$ platí nerovnost $|v(\xi)| \leqq \frac{C}{|\xi|^\alpha}$. Vzorec (64) nám umožňuje konstrukci regulární funkce v horní polorovině z hraničních hodnot její imaginární části na reálné ose. K důkazu stačí uvážit, že následkem vztahu

$$\frac{y}{(x - \xi)^2 + y^2} = \mathrm{Im} \frac{1}{\xi - z}$$

je imaginární část (64) totožná s Poissonovým integrálem (61), kde místo u je funkce v. Předpoklady pro funkci $v(\xi)$ zajišťují existenci integrálu (64).

Poznámka. Podobně jako jsme postupovali v případě Poissonova integrálu a Cauchyho integrálu pro jednoduše souvislou oblast D s hladkou hranicí C, můžeme místo funkce $f(\zeta)$ uvažovat libovolnou spojitou funkci $\tilde{f}(\zeta) = u(\zeta) + iv(\zeta)$ a obdržíme tak integrál Cauchyho typu, který podle věty **[6]** § 52 definuje funkci regulární v oblasti D:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{\tilde{f}(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z}. \tag{65}$$

Proti Poissonově integrálu je tu ten rozdíl, že *funkce definovaná integrálem typu Cauchyho nekonverguje k* $\tilde{f}(\zeta)$, *konverguje-li* z *k hraničnímu bodu* ζ. Snadno odkryjeme příčinu tohoto faktu. Tak na př. integrál Schwarzův (62) je funkce regulární uvnitř kruhu, jednoznačně určená až na adiční konstantu, která je určena reálnou částí své hraniční podmínky. Tedy i imaginární část limity regulární funkce (až na adiční konstantu) je určena její reálnou částí. Protože však v našem případě nejsou spojité funkce $\tilde{u}(\zeta)$ a $\tilde{v}(\zeta)$ vázány žádným vztahem, není žádných důvodů se domnívat, že součet $\tilde{f}(\zeta) = \tilde{u}(\zeta) + i\tilde{v}(\zeta)$ bude nabývat limitních hodnot funkce regulární v D.

§ 57. Použití v theorii pole. Uvedeme zde některé výsledky theorie pole založené na výsledcích odvozených v předcházejících paragrafech. Předně:

a) *potenciální a silová funkce elektrostatického pole bez nábojů*;

b) *potenciál a proudová funkce rovinného proudění kapaliny v poli, ve kterém nejsou ani zřídla ani víry*;

c) *proudová funkce a teplota tepelného rovinného proudění v poli bez tepelných zdrojů*

jsou vesměs harmonické funkce.

To plyne okamžitě podle věty **[11]** z regulárnosti odpovídajících komplexních potenciálů. Místa bodových nábojů resp. zřídla a víry resp. tepelná zřídla jsou singulárními body těchto funkcí.

Dále uvedeme několik vlastností těchto polí, při čemž budeme pro konkretnost formulovat tyto vlastnosti pro elektrostatické pole.

1. *Jestliže je v elektrostatickém poli uzavřená ekvipotenciální čára C o konstantním potenciálu $V(z) = V_0$, pak buď v jejím vnitřku leží singulární body pole, nebo je potenciál všude uvnitř C konstantní* (v posledním případě je i $U(z) \equiv \text{const}$, t. j. $F(z) \equiv \text{const}$, a odtud $E = 0$ a pole vymizí).

Důkaz plyne přímo z věty **[15]**, kde potenciál je funkcí řešící Dirichletův problém s okrajovou podmínkou $V(z) = V_0$. Řešením tohoto případu je zřejmě konstanta $V(z) \equiv V_0$, která je harmonická v oblasti D, a jak plyne z existenční věty, je to jediné řešení naší úlohy.

2. *V elektrostatickém poli nemohou existovat uzavřené silokřivky.*

Důkaz provedeme sporem. Nechť existuje uzavřená silokřivka $U(z) = C$; pak v jejím okolí leží s jedné strany body, v nichž je $U(z) > C$, a s druhé strany body, pro něž $U(z) < C$, a tedy ve směru vnější resp. vnitřní normály $\frac{\partial U}{\partial n} \leqq 0$. Nechť uvedený vztah platí pro vnitřní normálu. Pak podle (55′) ve směru s (viz obr. 91) platí $\frac{\partial V}{\partial s} = -\frac{\partial U}{\partial n} \geqq 0$ a funkce $V(z)$ v tomto směru roste. Pak bychom však při proběhnutí silokřivky kolem dokola obdrželi hodnotu funkce $V(z)$ odlišnou od výchozí hodnoty, což je ve sporu s jednoznačností funkce $V(z)$ (§ 37). Tím je naše věta dokázána.*)

3. *Ani silokřivky, ani ekvipotenciální čáry nemohou začínat nebo končit ve vnitřním bodě pole.*

Důkaz provedeme pro ekvipotenciální čáry. Důkaz provedeme sporem. Nechť ekvipotenciální čára $V(z) = C$ končí ve vnitřním bodě z_0 pole; pak si lze zvolit dostatečně malé okolí tohoto bodu tak, že v něm je všude buď $V(z) \leqq C$, nebo $V(z) \geqq C$ (obr. 92). Takové okolí lze vždy najít, neboť části, pro než $V(z) \leqq C$ nebo $V(z) \geqq 0$, jsou odděleny čarou $V(z) = \text{const}$, ale naše okolí je právě tak zvoleno, že čára $V(z) = \text{const}$ je nedělí na dvě části. Funkce $V(z)$ tedy nabývá svého mi-

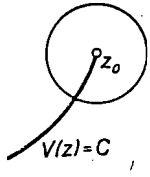
*) Vlastnost 2. plyne také z toho, že podél uzavřené siločáry by měly všechny projekce E_s totéž znaménko, a tedy cirkulace E podél této křivky by byla od nuly různá, což je nemožné (viz § 36).

nima nebo maxima v bodě z_0, což je ve sporu s větou **[14]**. Tím je naše věta dokázána. Dodejme ještě, že tato věta platí zřejmě pro libovolnou harmonickou funkci.

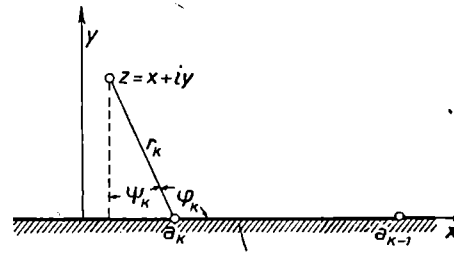
Z vlastností 2. a 3. plyne:

4. *V elektrostatickém poli mohou silokřivky spojovat pouze okrajové body pole (na př. místa bodových nábojů) nebo probíhat do nekonečna.*

Závěrem uvedeme ještě několik příkladů na použití integrálu Poissonova a Schwarzova.



Obr. 92.



Obr. 93.

Příklad 1. *Polorovina s $n+1$ elektrodami* $(-\infty, a_1), (a_1 a_2), \ldots, \ldots, (a_n, \infty)$ nesoucími po řadě potenciály $v_0, v_1, \ldots, v_n$, kde body a_k jsou zřejmě body isolujícími. K stanovení potenciálu pole v horní polorovině použijeme Poissonova integrálu (61):

$$V(x,y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} V(\xi)\,\frac{y\,d\xi}{(x-\xi)^2+y^2} = \frac{v_0 y}{\pi}\int_{-\infty}^{a_1}\frac{d\xi}{(x-\xi)^2+y^2} +$$

$$+\frac{v_1 y}{\pi}\int_{a_1}^{a_2}\frac{d\xi}{(x-\xi)^2+y^2} + \ldots + \frac{v_n y}{\pi}\int_{a_n}^{\infty}\frac{d\xi}{(x-\xi)^2+y^2} =$$

$$= \frac{v_0}{\pi}\left(\operatorname{arctg}\frac{a_1-x}{y} + \tfrac{1}{2}\pi\right) + \frac{v_1}{\pi}\left(\operatorname{arctg}\frac{a_2-x}{y} -\right.$$

$$\left. - \operatorname{arctg}\frac{a_1-x}{y}\right) + \ldots + \frac{v_n}{\pi}\left(\tfrac{1}{2}\pi - \operatorname{arctg}\frac{a_n-x}{2}\right) = \frac{v_0+v_n}{2} +$$

$$+\frac{v_0-v_1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{a_1-x}{y} + \ldots + \frac{v_{n-1}-v_n}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{a_n-x}{y}.$$

Jak je vidět z obr. 93, je $\operatorname{arctg} \frac{a_k - x}{y} = \psi_2 = \varphi_k - \frac{1}{2}\pi$, kde $\varphi_k = \arg(z - a_k)$ je úhel mezi vektorem $z - a_k$ a osou x, takže pro potenciál dostáváme výraz

$$V(x, y) = v_n + \frac{v_0 - v_1}{\pi}\varphi_1 + \ldots + \frac{v_{n-1} - v_n}{\pi}\varphi_n = \\ = v_n + \frac{v_0 - v_1}{\pi}\arg(z - a_1) + \ldots + \frac{v_{n-1} - v_n}{\pi}\arg(z - a_n). \tag{66}$$

Známe-li potenciální funkci, snadno stanovíme komplexní potenciál jako regulární funkci, mající funkci (66) za svoji imaginární část:

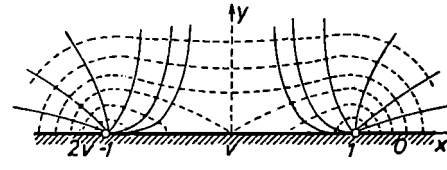
$$F(z) = \mathrm{i}v_n + \frac{v_0 - v_1}{\pi}\ln(z - a_1) + \ldots + \frac{v_{n-1} - v_n}{\pi}\ln(z - a_n) \tag{67}$$

(kde ln je libovolná z hlavních hodnot logaritmu). Podle (34) kap. IV stanovíme vektor napětí pole:

$$\boldsymbol{E} = -\mathrm{i}\overline{F'(z)} = \frac{v_0 - v_1}{\mathrm{i}\pi}\overline{\left(\frac{1}{z - a_1}\right)} + \ldots + \frac{v_{n-1} - v_n}{\mathrm{i}\pi}\overline{\left(\frac{1}{z - a_n}\right)} = \\ = \frac{v_0 - v_1}{\mathrm{i}\pi}\frac{z - a_1}{|z - a_1|^2} + \ldots + \frac{v_{n-1} - v_n}{\mathrm{i}\pi}\frac{z - a_n}{|z - a_n|^2}. \tag{68}$$

Příklad 2. *Polorovina s třemi elektrodami* $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$, $(1, \infty)$, nesoucími po řadě potenciál $2v$, v, 0, je zřejmě speciální případ předcházejícího příkladu; komplexní potenciál pole je podle (67)

$$F(z) = \frac{v}{\pi}\ln(z + 1) + \\ = \frac{v}{\pi}\ln(z - 1). \tag{69}$$



Obr. 94.

Silová funkce

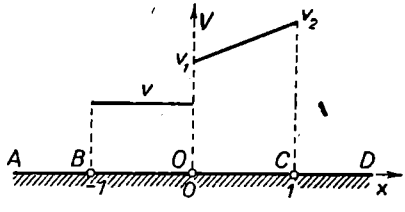
$$U = \operatorname{Re} F(z) = \frac{v}{\pi}\ln|z + 1|\,|z - 1|$$

a silokřivkami pole jsou křivky

$$|z + 1|\,|z - 1| = C = \text{const},$$

což jsou Cassiniho křivky s ohnisky v bodech ± 1 (viz př. 12 úvodu a př. 3 § 58). Na obr. 94 jsou čárkovány, ekvipotenciální linie jsou vytaženy plně.

Příklad 3. *Rozdělení potenciálu na reálné ose je dáno obr. 95. Úkolem je najít komplexní potenciál v horní polorovině.*



Obr. 95.

K podobným úlohám vede výpočet transformátorů, provádíme-li výpočet pomocí konformního zobrazení a chceme-li registrovat změnu potenciálu podél cívky o vysokém napětí (na obr. 95 odpovídají polopřímky AB a CD v konformním zobrazení uzemněnému plášti transformátoru, úsečka BO cívce o nízkém napětí a OC cívce o vysokém napětí). Úlohu budeme řešit pomocí Schwarzova integrálu (64) a dostaneme:

$$F(z) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} V(\xi)\frac{\mathrm{d}\xi}{\xi - z} + B =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{0} v\frac{\mathrm{d}\xi}{\xi - z} + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{1}\{(v_2 - v_1)\,\xi + v_1\}\frac{\mathrm{d}\xi}{\xi - z} + B =$$

$$= \frac{v}{\pi}\ln\frac{z}{z+1} + \frac{1}{\pi}\{v_1 + (v_2 - v_1)\,z\}\ln\frac{z-1}{z} + \frac{v_2 - v_1}{\pi} + B.$$

Vypustíme nepodstatné konstanty a dostaneme:

$$F(z) = \frac{v}{\pi}\ln\frac{z}{z+1} + \frac{v_1 + (v_2 - v_1)\,z}{\pi}\ln\frac{z-1}{z}. \qquad (70)$$

ÚLOHY.

Vypočtěte integrály:

1. $\int_{-i}^{i}{}_{L} |z|\,\mathrm{d}z$ podél: a) úsečky, b) levé půlkružnice $|z| = 1$, c) pravé půlkružnice $|z| = 1$.

2. $\int_{|z|=3} \frac{2z-1}{z(z-1)}\,dz$.

3. $\int_0^1 z \sin z\,dz$.

4. $\int_0^{1+i} e^{\bar{z}}\,dz$ podél: a) lomené čáry 0, 1, 1 + i, b) lomené čáry 0, i, 1 + i.

5. Jakou hodnotu má integrál $\int_L |dz|$? Jaký je jeho geometrický smysl?

6. Jak je velké residuum funkce $f(z) = \frac{1}{z^2+1}$ v bodě $z = i$? Určete pomocí a) přímého výpočtu, b) pomocí Cauchyho integrální věty.

7. Vypočtěte pomocí Cauchyho integrální věty:

$$I = \oint_C \frac{\sin \frac{1}{4}\pi z}{z^2-1}\,dz,$$

kde C je kružnice $x^2 + y^2 - 2x = 0$.

8. Vypočtěte

$$I = \int_C \frac{e^z\,dz}{(z^2+1)^3},$$

kde C je elipsa $4y^2 + y^2 - 2y - 3 = 0$.

9. Dokažte, že je-li $|f(z)| \equiv \text{const}$ na hranici jednoduše souvislé oblasti, $f(z)$ regulární v oblasti $\overline{D}$, leží uvnitř této oblasti aspoň jeden nulový bod funkce $f(z)$ (kde předpokládáme, že funkce $f(z)$ není konstantní). Na základě této věty dokažte, že se křivka, která je geometrickým místem bodů, jejichž součin vzdáleností od n pevných bodů zvaných ohniska je stálý, rozpadne nejvýše na n částí.

10. Budiž $f(z) \not\equiv \text{const}$ regulární v kruhu $|z| < R$ a budiž $M(r)$ maximum funkce $|f(z)|$ na kružnici $(z) = r$, $r < R$. Dokažte, že funkce $M(r)$ je rostoucí.

11. Stanovte podmínku pro to, aby trojčlen $u = ax^2 + 2bxy + cy^2$ byl harmonickou funkcí.

12. Budiž $f(z)$ regulární a od nuly různá v oblasti D. Dokažte přímým výpočtem, že všude v této oblasti $\Delta \ln|f(z)| = 0$ a $\Delta|f(z)| > 0$ (kde Δ je Laplaceův diferenciální operátor).

13. Stanovte regulární funkci $w = f(z)$ s podmínkou $f(\frac{1}{2}\pi) = 0$, jejíž reálná, část je

$$u = \frac{\sin 2x}{\cosh 2y - \cos 2x}.$$

14. Najděte funkci harmonickou v jednotkovém kruhu, která má na oblouku $\widehat{\alpha\beta}$ hodnotu 1 a na zbytku oblouku jednotkové kružnice hodnotu nula.

15*. Dokažte, že pro jádro Poissonova integrálu pro kruh platí

$$\frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\psi - \varphi) + r^2} = \left|\frac{\zeta^* - z}{\zeta - z}\right|,$$

kde $\zeta = \mathrm{Re}^{\mathrm{i}\psi}$ a ζ^* je druhý konec sečny ζz.

16*. Pomocí výsledku příkladu 15* dokažte, že pro integrand Poissonova integrálu pro kruh platí

$$\frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\psi - \varphi) + r^2}\,\mathrm{d}\varphi = \mathrm{d}\omega,$$

kde $\omega = \arg\zeta^*$. Pomocí výsledku interpretujte geometricky příklad 14.

17. Dokažte: Funkce, harmonická v horní polorovině a nabývající hodnoty 1 na úsečce ab reálné osy a hodnoty nula na zbytku osy, geometricky značí zorný úhel, pod kterým vidíme úsečku ab z bodu z.

18*. Odvoďte Schwarzův vzorec pro pás $-\frac{1}{2}\pi < y < \frac{1}{2}\pi$:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\{u_+(\xi) + u_-(\xi)\}\,\frac{\mathrm{d}\xi}{\cosh(\xi - z)} -$$

$$- \frac{\mathrm{i}}{2\pi}\sinh z\int_{-\infty}^{\infty}\{u_+(\xi) - u_-(\xi)\}\,\frac{\mathrm{d}\xi}{\cosh(\xi - z)\cosh 2\xi},$$

kde $u_+(\xi)$ a $u_-(\xi)$ jsou hodnoty reálné části funkce $f(z)$ na přímkách $y = +\frac{1}{2}\pi$ a $y = -\frac{1}{2}\pi$.

KAPITOLA VI.

VYJÁDŘENÍ REGULÁRNÍCH FUNKCÍ POMOCÍ ŘAD.

§ 58. Řady v komplexním oboru. Budiž $a_n = \alpha_n + i\beta_n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, posloupnost komplexních čísel; její pomocí můžeme vytvořit *řadu*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \qquad (1)$$

Označme ještě $a_0 + a_1 + \ldots + a_n = s_n$ *částečné součty* řady (1).

Definice. Řada (1) je *konvergentní*, existuje-li konečná limita

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s,$$

t. j. pro libovolně malé kladné číslo $\varepsilon > 0$ lze najít takové kladné číslo $N = N(\varepsilon)$, že pro všechna $n > N$ je

$$|s - s_n| < \varepsilon.$$

Číslo s nazýváme *součtem řady* (1). Neexistuje-li součet, nebo je-li roven ∞, říkáme, že řada *diverguje* (je divergentní).

Následující věta převádí theorii řad s komplexními členy na theorii řad s reálnými členy. Její pomocí snadno přeneseme známé výsledky z theorie řad s reálnými členy do komplexního oboru;

Věta [1]. *Řada* (1) *je tehdy a jen tehdy konvergentní, konvergují-li řady*

$$\alpha_0 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_n + \ldots; \quad \beta_0 + \beta_1 + \ldots + \beta_n + \ldots \qquad (2)$$

s reálnými členy.

Důkaz. Označme $\alpha_0 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_n = \sigma_n$, $\beta_0 + \beta_1 + \ldots + \beta_n = \tau_n$; pak $s_n = \sigma_n + i\tau_n$ a

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sigma_n + i \lim_{n\to\infty} \tau_n.$$

Odtud ihned plyne naše věta. Pomocí věty **[1]** dokážeme na př. snadno: konverguje-li řada (1), pak je

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0.$$

Podobně jako pro řady s reálnými členy definujeme:

Definice. Řada (1) se nazývá absolutně konvergentní, konverguje-li řada

$$|a_0| + |a_1| + \ldots + |a_n| + \ldots \tag{3}$$

Přenecháváme čtenáři aby dokázal, že absolutně konvergentní řada konverguje a že má vlastnosti známé z analysy reálné proměnné (na př. je možno libovolně přestavět její členy).

Budiž $f_n(z)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, posloupnost libovolných funkcí komplexní proměnné. Pomocí této posloupnosti snadno utvoříme řadu

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z) = f_0(z) + f_1(z) + \ldots + f_n(z) + \ldots \tag{4}$$

Bude-li v každém bodě z_0 nějaké oblasti D příslušná řada s konstantními členy $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z_0)$ konvergentní, budeme říkat, že řada (4) je *konvergentní v oblasti* D. V tomto případě její součet definuje v oblasti D jistou funkci $F(z)$.

Vznikají otázky běžné v theorii řad: bude funkce $F(z)$ spojitá v oblasti D, budou-li v této oblasti spojité všechny funkce $f_n(z)$? Kdy je možné řadu (4) derivovat a integrovat člen po členu? Jako v theorii řad s reálnými členy i zde formulujeme příslušné věty pomocí pojmu stejnoměrné konvergence.

Definice. Řada (4) *konverguje stejnoměrně v oblasti* D*) k funkci $F(z)$, jestliže lze pro libovolně malé kladné číslo $\varepsilon > 0$ najít takové číslo $N = N(\varepsilon)$, že pro všechna $n > N$ a pro všechny body z oblasti D platí

$$|F(z) - F_n(z)| < \varepsilon, \tag{5}$$

kde

$$F_n(z) = f_0(z) + f_1(z) + \ldots + f_n(z). \tag{6}$$

Smysl této definice je tento: Konvergence řady (4) v bodě z_0 nám zaručuje existenci limity $\lim_{n\to\infty} F_n(z_0) = F(z_0)$, t. j. ke každému libovolně malému $\varepsilon > 0$ lze najít takové číslo $N = N(\varepsilon)$, že pro všechna $n > N$ platí nerovnost (5). Číslo ε nám udává, jak rychle řada (4)

*) Proložením jsme zdůraznili, že naše definice se vztahuje k celé oblasti. Pojem stejnoměrné konvergence v jednotlivém bodě nemá smysl.

konverguje k uvedenému součtu. Zvolíme-li nyní pevně číslo ε a měníme-li bod z_0, budou se měnit i členy naší řady a obecně může být číslo $N(\varepsilon)$, pro něž je splněna nerovnost (5), v bodě z_1 větší než v bodě z_0. Vidíme tedy, že číslo $N(\varepsilon)$ nezávisí jen na volbě čísla ε, ale že závisí též na bodě z: $N = N(\varepsilon, z)$.

Volme pevně číslo $\varepsilon > 0$ a budiž $z_1, z_2, \ldots, z_k$ několik bodů oblasti D. Čísla N_k ,pro něž je splněna nerovnost (5) v těchto bodech, buďtež $N_1 = N(\varepsilon, z_1), N_2 = N(\varepsilon, z_2), \ldots, N_k = N(\varepsilon, z_k)$. Budeme-li nyní chtít míti zaručený jistý spád konvergence řady (daný číslem ε) pro všechny body z_k současně (stejnoměrně), vidíme, že stačí vzít největší z čísel $N_1, N_2, \ldots, N_k$ — $N^*(\varepsilon) = \max(N_1, N_2, \ldots, N_k)$ — a pak je nerovnost (5) splněna pro všechna $n > N^*(\varepsilon)$.

Rozšíříme-li nyní tento požadavek na celou oblast D, může se nám stát, že ač budou existovat čísla $N(\varepsilon, z)$ v jednotlivých bodech z oblasti D, nebude existovat jejich maximum. To vyplývá z toho, že nekonečná číselná množina nemusí být vždy shora ohraničená.

Existuje-li takové maximum čísel $N(\varepsilon, z)$ v oblasti D, je zřejmě nerovnost (5) splněna pro všechna $n > \mathrm{Max}(N(\varepsilon, z))$ a pro všechny body oblasti D. V tom spočívá pojem stejnoměrné konvergence, zavedený naší definicí. Místo oblasti D uvedené v naší definici můžeme též uvažovat křivku L nebo uzavřenou oblast $\overline{D}$ nebo jakoukoliv jinou nekonečnou bodovou množinu; definice se přenáší na tyto případy bez jakýchkoliv omezení.

Jelikož naše definice souhlasí s obdobnou definicí pro řady s reálnými členy, je možno bez změny přenést všechny věty o stejnoměrně konvergentních řadách do komplexního oboru.*) Nebudeme se tedy zdržovat ani jejich formulací, ani jejich důkazy.

§ 59. Věta Weierstrassova. Známá věta o derivování řad připouští v komplexním oboru podstatné zesílení. Jak známo, řadu s reálnými proměnnými členy můžeme derivovat člen po členu, je-li daná řada konvergentní aspoň v jednom bodě uvažovaného intervalu a je-li řada derivací stejnoměrně konvergentní v tomto intervalu. Jak se snadno nahlédne, plyne odtud okamžitě, že je pak i daná řada stejnoměrně

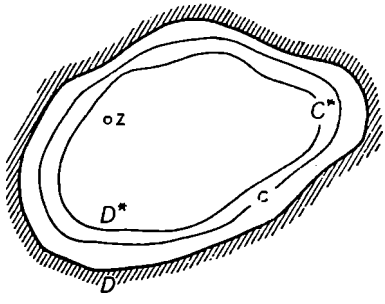
*) Nejdůležitější jsou věty o spojitosti součtu, o možnosti integrace člen po členu a konečně dostatečná podmínka stejnoměrné konvergence.

konvergentní v celém intervalu. S druhé strany vidíme, že stejnoměrná konvergence dané řady v uvažovaném intervalu nestačí, není tím ještě zajištěna stejnoměrná konvergence řady derivací.

V komplexním oboru platí věta, kterou první dokázal Weierstrass:

Věta [2]. *Nechť jsou $f_0(z), f_1(z), \ldots$ funkce regulární v jisté oblasti D a nechť řada*

$$f_0(z) + f_1(z) + \ldots + f_n(z) + \ldots$$



Obr. 96.

v této oblasti konverguje a má součet $F(z)$. Konverguje-li naše řada v libovolné uzavřené oblasti $\overline{D}^*$ ležící uvnitř D stejnoměrně, pak: 1. *$F(z)$ je regulární v oblasti D,* 2. *derivace $F^{(k)}(z)$ všech řádu obdržíme, budeme-li derivovat řadu (4) člen po členu, vzniklé řady jsou opět stejnoměrně konvergentní v libovolné uzavřené oblasti $\overline{D}^*$, ležící uvnitř oblasti D.*

Nejprve dokážeme, že $F(z)$ je regulární. Budiž z libovolný bod oblasti D, $\overline{D}^*$ libovolná uzavřená oblast ležící i se svou hranicí v D a obsahující bod z, budiž C^* hranice D^* a bod ζ budiž libovolný bod křivky C^* (obr. 96). Řada

$$\frac{F(\zeta)}{\zeta - z} = \frac{f_0(\zeta)}{\zeta - z} + \frac{f_1(\zeta)}{\zeta - z} + \ldots + \frac{f_n(\zeta)}{\zeta - z} + \ldots$$

stejnoměrně konverguje na hranici C^* a můžeme tedy integrovat člen po členu (pro jednoduchost dělíme obě strany číslem $2\pi i$):

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{C^*} \frac{F(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C^*} \frac{f_0(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta + \frac{1}{2\pi i}\oint_{C^*} \frac{f_1(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta +$$

$$+ \ldots + \frac{1}{2\pi i}\oint_{C^*} \frac{f_n(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta + \ldots$$

Protože funkce $f_n(z)$ jsou podle předpokladu regulární v D, existuje podle Cauchyho integrální věty funkce

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{C^*}\frac{F(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta = f_0(z) + f_1(z) + \ldots + f_n(z) + \ldots = F(z). \qquad (7)$$

Funkce $F(z)$, která je definována jako součet stejnoměrně konvergentní řady regulárních funkcí, je na hranici C^* spojitá, a tedy integrál vlevo v (7) je typu Cauchyho. Je tedy funkce $F(z)$ representována integrálem typu Cauchyho a tedy podle věty § 52 je regulární v D^* a tedy i v bodě z. Protože bod z byl podle předpokladu libovolným vnitřním bodem oblasti D, je $F(z)$ regulární všude v oblasti D. Tím jsme dokázali prvou část naší věty.

Abychom dokázali druhou část, zvolíme si libovolnou uzavřenou oblast $\overline{D}^*$ a sestrojíme libovolnou uzavřenou křivku C, ležící mezi hranicemi oblastí D a D^*. Budiž d nejmenší vzdálenost mezi body oblasti D^* a křivkou C, budiž z libovolný bod oblasti D^* a ζ libovolný bod na křivce C. Řada

$$\frac{F(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} = \frac{f_0(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} + \frac{f_1(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} + \ldots + \frac{f_n(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} + \ldots,$$

kde k je libovolné celé číslo, konverguje stejnoměrně na C. Tedy

$$\frac{k!}{2\pi i}\oint_C \frac{F(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}}\,\mathrm{d}\zeta = \frac{k!}{2\pi i}\oint_C \frac{f_0(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}}\,\mathrm{d}\zeta + \frac{k!}{2\pi i}\oint_C \frac{f_1(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}}\,\mathrm{d}\zeta +$$
$$+ \ldots + \frac{k!}{2\pi i}\oint_C \frac{f_n(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}}\,\mathrm{d}\zeta + \ldots$$

a podle vzorce pro derivace analytických funkcí (§ 53)

$$F^{(k)}(z) = f_0^{(k)}(z) + f_1^{(k)}(z) + \ldots + f_n^{(k)}(z) + \ldots \qquad (8)$$

Dostaneme tedy derivace libovolného řádu funkce $F(z)$ derivováním řady (4) člen po členu. Zbývá dokázat, že řady (8) stejnoměrně konvergují pro libovolné celé k.

Protože je řada (4) podle předpokladu stejnoměrně konvergentní na C, lze k libovolnému dostatečně malému $\varepsilon > 0$ zvolit číslo $N = N(\varepsilon)$ tak, že pro $n > N$ platí pro všechna ζ

$$|F(\zeta) - F_n(\zeta)| < \varepsilon$$

[kde $F_n(\zeta)$ je částečný součet řady (4)]. Kromě toho pro všechna ζ platí

$$|\zeta - z| \geqq d$$

a podle věty o odhadu integrálu máme (§ 46) pro všechna $n > N$

$$|F^{(k)}(z) - F_n^{(k)}(z)| = \left| \frac{k!}{2\pi i} \oint \frac{F(\zeta) - F_n(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} \right| \leqq \frac{k!}{2\pi} \frac{\varepsilon l}{d^{k+1}},$$

kde l je délka křivky C. Protože naše nerovnost platí pro všechna $n > N$ a pro všechny body oblasti $\overline{D}^*$ a $\frac{k!}{2\pi} \cdot \frac{\varepsilon l}{d^{k+1}} = \varepsilon_1$ je libovolné, dokázali jsme tím stejnoměrnou spojitost řady (8) v oblasti $\overline{D}^*$, a tím i celou větu **[2]**.

§ 60. Potenční řady. Potenční *(mocninnou) řadou* nazýváme řadu typu

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - a)^n = c_0 + c_1(z - a) + c_2(z - a)^2 + \ldots + c_n(z - a)^n, \quad (9)$$

kde z je komplexní proměnná a c_n a a konstanty. Konstanty c_n se nazývají *koeficienty řady* (9) a konstanta *a jejím středem.*

Základní větou theorie potenčních řad je *Abelova věta.*

Věta [3]. *Konverguje-li řada* (9) *v bodě* z_0, *pak konverguje absolutně v celém kruhu* $|z - a| < |z_0 - a|$. *V každém uzavřeném kruhu* $|z - a| \leqq q$, *kde* $q < |z_0 - a|$, *konverguje stejnoměrně.*

Podle předpokladu konverguje řada

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z_0 - a)^n$$

a tedy $\lim_{n\to\infty} c_n(z_0 - a)^n = 0$. Posloupnost $c_n(z_0 - a)^n$ konverguje a je tedy podle § 7 ohraničená; existuje tedy číslo M tak, že

$$|c_n(z_0 - a)^n| \leqq M$$

pro všechna n.

V uzavřeném kruhu $|z - a| \leqq q$ tedy platí

$$|c_n(z - a)^n| = |c_n(z_0 - a)^n| \left| \frac{z - a}{z_0 - a} \right|^n \leqq M \left(\frac{q}{|z_0 - a|} \right)^n.$$

V kruhu $|z - a| \leqq q$ jsou členy řady v absolutní hodnotě menší než členy geometrické řady s kvocientem $\frac{q}{|z_0 - a|} < 1$, pokud $q < |z_0 - a|$. Pak geometrická řada konverguje a podle známé věty o majorantních řadách řada (9) konverguje stejnoměrně všude v kruhu $|z - a| < |z_0 - a|$. Tím je věta dokázána.

Důsledek. *Diverguje-li řada* (9) *v bodě* $z = z_0$, *je divergentní i ve všech bodech, pro něž* $|z - a| > |z_0 - a|$.

Důkaz. Kdyby řada (9) konvergovala v nějakém bodě z', pro nějž $|z' - a| > |z_0 - a|$, pak by podle Abelovy věty konvergovala i v bodě z_0, což je spor.

Příklad 1. *Geometrická řada*

$$1 + z + z^2 + \ldots + z^n + \ldots$$

absolutně konverguje v kruhu $|z| < 1$. *V libovolném uzavřeném kruhu* $|z| \leqq q$, *kde* $q < 1$, *konverguje stejnoměrně. Pro* $|z| > 1$ *diverguje.*

Důkaz plyne přímo z Abelovy věty, uvážíme-li, že řada konverguje pro všechna reálná $z = q$, kde $0 \leqq q < 1$, a diverguje pro $q = 1$. Pro $q = 1$ řada diverguje, neboť $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$. Přenecháváme čtenáři, aby si dokázal, že pro $|z| < 1$ platí

$$1 + z + z^2 + \ldots + z^n + \ldots = \frac{1}{1 - z}.$$

Příklad 2. *Potenční řada*

$$1 + z + 2!\, z^2 + \ldots + n!\, z^n + \ldots$$

konverguje jen v bodě $z = 0$. Důkaz: pro libovolné reálné $z = x$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!\, x^{n+1}}{n!\, x^n} = \lim_{n\to\infty} (n+1)\, x = \infty$$

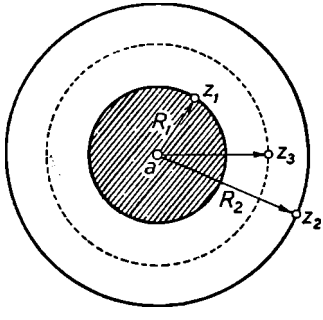
a odtud podle D'Alembertova kriteria pro řady s kladnými členy plyne divergence řady pro všechna $x \neq 0$. Podle Abelovy věty nemůže tedy konvergovat pro žádná komplexní $z \neq 0$.

Příklad 3. Potenční řada

$$1 + z + \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots$$

konverguje podle D'Alembertova kriteria *pro všechna komplexní* $z \neq \infty$.

Při vyšetřování oboru konvergence libovolné řady (9) mohou nastat jen tyto tři případy: 1. řada konverguje jen ve svém středu, 2. řada konverguje pro všechna konečná z, 3. řada konverguje pro určitá konečná z a pro ostatní diverguje. Výše uvedené tři příklady ukazují, že se všechny tři případy skutečně vyskytují. Probereme si podrobně poslední případ. Nechť řada (9) konverguje v bodě z_1 a diverguje v bodě z_2. Pak podle Abelovy věty konverguje pro všechna z, pro která platí $|z-a| < |z_1-a| = R_1$, a diverguje pro všechna z, pro něž $|z-a| > |z_2-a| = R_2$ (zřejmě $R_1 \leqq R_2$). Je-li $R_1 = R_2$, položíme $R_1 = R_2 = R$ a řada (9) konverguje pro všechna z uvnitř kruhu $|z-a| < R$ a diverguje pro všechna z vně tohoto kruhu.



Obr. 97.

Je-li $R_1 \neq R_2$, sestrojíme bod $z_3 = \frac{1}{2}(R_1 + R_2) = R_3$. Konverguje-li řada (9) v tomto bodě, konverguje i v kruhu $|z-a| < R_3$, diverguje-li v tomto bodě, diverguje i ve všech bodech vně kruhu $|z-a| = R_3$.

V obou případech se mezikruží, v němž je třeba ještě určit konvergenci resp. divergenci řady, zúží na polovinu. Na takto sestrojené mezikruží opět aplikujeme náš postup a v limitě obdržíme takové číslo R, že řada (9) konverguje všude uvnitř kruhu $|z-a| < R$ a diverguje všude vně tohoto kruhu. Konvergence řady na kružnici $|z-a| = R$ zůstává nevyřešena. Číslo R těchto vlastností budeme nazývat *poloměrem konvergence* řady (9) a kruh $|z-a| < R$ jejím *oborem konvergence*.

Pokud se týká případu 1., budeme považovat za poloměr konvergence číslo $R = 0$ a v případě 2. číslo $R = \infty$.

Tím jsme dokázali větu.

Věta [4]. *Každá potenční řada* (9) *má konečný nebo nekonečný poloměr konvergence.*

V každém uzavřeném kruhu $|z-a| \leqq R' < R$ konverguje řada (9) podle Abelovy věty stejnoměrně. Odtud a z věty Weierstrassovy plyne, že řada

$$f(z) = c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \ldots + c_n(z-a)^n + \ldots \qquad (10)$$

definuje svým součtem funkci regulární uvnitř jejího oboru konvergence. Dále podle Weierstrassovy věty platí pro každý bod z vnitřku konvergenčního kruhu

$$\begin{aligned} f'(z) &= c_1 + 2c_2(z-a) + \ldots + nc_n(z-a)^{n-1} + \ldots \\ f''(z) &= 2c_2 + 3 \cdot 2c_3(z-a) + \ldots + n(n-1)\,c_n(z-a)^{n-2} + \ldots \\ f^{(n)}(z) &= n!c_n + (n+1)!\,c_{n+1}(z-a) + \ldots \end{aligned} \qquad (11)$$

Dosadíme-li v (10) a v (11) $z = a$, dostaneme

$$c_0 = f(a),\ c_1 = f'(a),\ c_2 = \frac{f''(a)}{2}, \ldots, c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}, \ldots \qquad (12)$$

a řadu (10) můžeme psát ve tvaru

$$f(z) = f(a) + \frac{f'(a)}{1}(z-a) + \frac{f''(a)}{2!}(z-a)^2 + \ldots + \frac{f''(a)}{n!}(z-a)^n + \ldots \qquad (13)$$

Řadu (13) nazýváme Taylorovou řadou funkce $f(z)$. Tím jsme dokázali další větu.

Věta [5]. *Součet potenční řady* (9) *je regulární uvnitř konvergenčního kruhu a řada* (9) *je Taylorovou řadou svého součtu.*

Z věty [5] plyne: ať obdržíme rozklad nějaké funkce v potenční řadu jakýmkoliv způsobem, je tato řada vždy Taylorova.

§ 61. Vyjádření regulárních funkcí pomocí Taylorovy řady. Budiž $f(z)$ funkce regulární v kruhu $|z-a| < R$. Vybereme dvě libovolná čísla R_1, R_2 tak, že $0 < R_1 < R_2$ a označíme C kružnici $|z-a| = R_2$. Pak podle Cauchyho integrální věty (§ 51) je pro všechna z z kruhu $|z-a| < R_2$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta,$$

odkud

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta}{(\zeta-a)-(z-a)} = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta-a}\cdot\frac{\mathrm{d}\zeta}{1-\dfrac{z-a}{\zeta-a}}. \qquad (14)$$

Předpokládejme, že bod z leží v kruhu $|z - a| < R_1$. Protože bod ζ leží na C, je

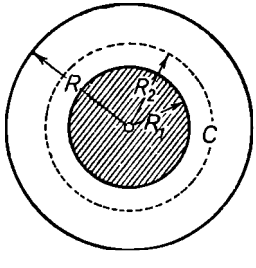
$$\left|\frac{z-a}{\zeta-a}\right| < \frac{R_1}{R_2} < 1.$$

Odtud plyne, že v kruhu $|z - a| < R_1$ konverguje stejnoměrně řada

$$\frac{1}{1-\dfrac{z-a}{\zeta-a}} = 1 + \left(\frac{z-a}{\zeta-a}\right) + \left(\frac{z-a}{\zeta-a}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{z-a}{\zeta-a}\right)^n + \ldots$$

(viz př. 1 § 60). Dosazením tohoto výrazu do (14) a integrováním člen po členu (což můžeme učinit v důsledku stejnoměrné konvergence) dostaneme

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-a} + \frac{z-a}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-a)^2} + \ldots + \frac{(z-a)^n}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-a)^{n+1}} + \ldots \tag{15}$$



Obr. 98.

Koeficienty potenční řady funkce $f(z)$ jsou

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-a)^{n+1}}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{16}$$

Použijeme-li vzorce (38) § 52, je možno přepsat řadu (15) jako řadu Taylorovu

$$f(z) = f(a) + f'(a)(z-a) + \frac{f''(a)}{2!}(z-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n + \ldots \tag{13}$$

a vztah (16) udává integrální tvar koeficientů Taylorovy řady.

Poznamenejme ještě, že jsme ve své úvaze mohli volit číslo R_1 libovolně blízko číslu R_0, takže rozklad v řadu (13) platí pro všechny body z kruhu $|z - a| < R$. Kromě toho za kruh $|z - a| < R$ můžeme vždy volit největší kruh se středem v bodě a, v jehož vnitřku je funkce $f(z)$ regulární. Tím jsme dokázali tuto větu:

Věta [6]. *Každá funkce regulární v bodě a může být rozvinuta v Taylorovu řadu* (13). *Tato řada konverguje v největším kruhu* $|z-a| < R$, *v němž je ještě funkce* $f(z)$ *regulární.*

Poznámka. Funkce $f(z)$ nemůže být regulární ve všech bodech kružnice $|z-a| = R$. Důkaz: Nechť je ve všech bodech kružnice $|z-a| = R$ funkce $f(z)$ regulární. Pak pro každý bod ζ kružnice $|z-a| = R$ existuje taková kružnice $|z-\zeta| < r_\zeta$ se středem v bodě ζ, že $f(z)$ je uvnitř této kružnice regulární. Budiž $r > 0$ nejmenší z těchto r_ζ (od důkazu, že takové nejmenší r_ζ existuje, upouštíme); pak je $f(z)$ regulární všude uvnitř kruhu $|z-a| < R + r$ a podle věty **[6]** by řada (13) konvergovala i v tomto kruhu, což je proti předpokladu.

Není-li funkce $f(z)$ regulární v bodě $z = a$, ale je regulární v libovolném okolí tohoto bodu, nazýváme bod *a singulárním bodem* funkce $f(z)$ (viz výše § 48).

Řada Taylorova tedy konverguje všude uvnitř kruhu, který neobsahuje žádné singulární body dané funkce a prochází singulárním bodem, nejbližším ke středu konvergence.

Podle vět **[5]** a **[6]** můžeme vyslovit novou definici regularity funkce $f(z)$ v bodě $z = a$, ekvivalentní s definicí § 14: Funkce $f(z)$ je *regulární v bodě* $z = a$, dá-li se v jeho okolí rozvinout v Taylorovu řadu. Z této definice by bylo možno odvodit všechny vlastnosti regulárních funkcí. Řady

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots, \tag{17}$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \ldots; \quad \cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \ldots \tag{18}$$

$$\sinh z = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \ldots; \quad \cosh z = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \ldots \tag{19}$$

konvergují pro všechna konečná z a funkce jimi definované jsou regulární v celé konečné rovině. Hlavní hodnota logaritmu $\ln(1+z)$ je regulární všude kromě bodu $z = -1$ a můžeme ji tedy rozvinout v Taylorovu řadu

$$\ln(z+1) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \ldots, \tag{20}$$

konvergentní v kruhu $|z| < 1$. Protože se dá obecná exponenciální funkce definovat pomocí logaritmické funkce (§ 32), platí i pro její hlavní hodnotu rozklad

$$(1 + z)^m = 1 + mz + \frac{m(m-1)}{2!} z^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!} z^3 + \ldots \quad (21)$$

a řada konverguje pro $|z| < 1$*) (m je libovolné komplexní číslo).

Rozklady (17)—(21) dostaneme ihned ze vzorce (13), dosadíme-li $a = 0$. Neliší se od rozvojů známých z analysy funkcí reálné proměnné; Taylorovy rozvoje a vzorce pro derivování elementárních funkcí v komplexním a reálném oboru jsou tedy shodné.

§ 62. Nulové body regulární funkce. Věta o jednoznačnosti. Definice. Bod $z = a$ se nazývá *nulový bod* funkce $f(z)$, je-li $f(a) = 0$.

Budiž $f(z)$ funkce regulární v bodě $z = a$, který je jejím nulovým bodem, a nechť není identicky rovna nule v žádném okolí bodu $z = a$. Pak nejsou všechny koeficienty Taylorova rozvoje rovny nule (neboť pak by byla funkce $f(z) \equiv 0$ v některém okolí bodu $z = a$) a Taylorova řada má tvar

$$f(z) = c_n(z-a)^n + c_{n+1}(z-a)^{n+1} + \ldots, \quad (22)$$

kde $c_n \neq 0$ a $n \geq 1$. Číslo n nazýváme *řádem* nulového bodu.

Ze vzorce (22) plyne: *Řád nulového bodu $z = a$ se rovná řádu první nenulové derivace v bodě $z = a$.*

Podle (22) může být regulární funkce v okolí svého nulového bodu vyjádřena ve tvaru

$$f(z) = (z-a)^n \varphi(z), \quad (23)$$

kde

$$\varphi(z) = c_n + c_{n+1}(z-a) + \ldots; \quad \varphi(a) = c_n \neq 0.$$

Funkce $\varphi(z)$ je spojitá v bodě a, neboť řada, kterou je definována, konverguje v jistém okolí bodu a (a je též regulární jako součet potenční řady) a je $\lim_{z \to a} \varphi(z) = \varphi(a)$. Podle předpokladu $\varphi(a) = c_n \neq 0$ a tedy i v jistém okolí bodu a $\varphi(z) \neq 0$.

*) Bod $z = -1$ je regulárním bodem funkce $(1 + z)^m$ jen tehdy, je-li m celé kladné číslo nebo nula. V tom případě má (21) jen konečný počet členů.

Důkaz: Zvolme $\varepsilon = \frac{|c_n|}{2}$; v důsledku spojitosti existuje pak takové okolí bodu a $|z - a| < \delta$, v němž $|\varphi(z) - \varphi(a)| < \varepsilon$, t. j. $|\varphi(z) - c_n| < \frac{|c_n|}{2}$, a tedy v okolí $|z - a| < \delta$ bodu $z = a$ je funkce $\varphi(z)$ různá od nuly.

Odtud a z (23) plyne další věta:

Věta [7]. Nechť je $f(z)$ *regulární v bodě* a *a nechť není identicky rovna nule v žádném okolí bodu* a. *Je-li bod* a *nulovým bodem funkce* $f(z)$, *vždycky existuje takové okolí bodu* a, *v kterém je funkce* $f(z)$ *různá od nuly.*

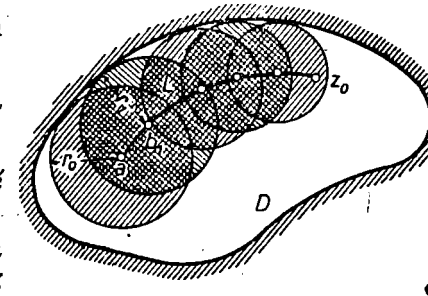
Z věty **[7]** plyne:

Důsledek. *Je-li* 1. *funkce* $f(z)$ *regulární v bodě* $z = a$ *a* 2. *existuje-li posloupnost nulových bodů konvergující k bodu* a, *pak* $f(z) \equiv 0$ *v jistém okolí bodu* a.

Důkaz: Ze spojitosti funkce $f(z)$ v bodě a plyne $f(a) = \lim_{n\to\infty} f(a_n) = 0$, t. j. bod a je nulový bod funkce $f(z)$, a předpoklad, že $f(z) \neq 0$ v jistém okolí bodu a, je ve sporu s větou **[7]**.

Z věty **[7]** plyne ještě důležitá věta:

Věta [8]. Jsou-li $f_1(z)$ a $f_2(z)$ *dvě funkce regulární v oblasti* D *a jsou-li jejich hodnoty stejné pro jistou bodovou posloupnost konvergující k bodu* a, *který je vnitřním bodem oblasti*, *je*



Obr. 99.

$$f_1(z) \equiv f_2(z)$$

všude uvnitř této oblasti.

Důkaz. Utvořme funkci $f(z) = f_1(z) - f_2(z)$. $f(z)$ je regulární v D a body a_n jsou jejími nulovými body. Odtud z důsledku věty **[7]** plyne, že $f(z) \equiv 0$ v jistém okolí $|z - a| < r_0$ bodu a. Zbývá jen dokázat, že $f(z) \equiv 0$ v celé oblasti D. Budiž z_0 libovolný bod oblasti D.

Spojíme bod z_0 s bodem a libovolnou křivkou L, která leží celá v D (obr. 99). Označme b_1 libovolný bod křivky L ležící v okolí $|z - a| < r_1$ bodu a. Protože je v tomto okolí $f(z) \equiv 0$, jsou všechny koeficienty Taylorova rozvoje

$$f(z) \equiv f(b_1) + \frac{f'(b_1)}{1}(z - b_1) + \ldots + \frac{f^{(n)}(b_1)}{n!}(z - b_1)^n + \ldots$$

rovny nule. Tato řada definuje funkci $f(z)$ v jistém největším kruhu $|z - b_1| < z_1$, který leží celý v D, a zřejmě všude v tomto kruhu $f(z) \equiv 0$. Bod b_1 volíme co nejblíže kružnici $|z - a| = r_0$, takže kruh $|z - b_1| < r_1$ padne zcela určitě částečně mimo kruh $|z - a| < r_0$. Nyní zvolíme na křivce L bod b_2 v kruhu $|z - b_1| < r_1$ a celý postup opakujeme. Snadno zjistíme, že funkce $f(z) \equiv 0$ v celém kruhu $|z - b_2| < r_2$, který opět padne částečně mimo kruh $|z - b_1| < r_1$. Po konečném počtu kroků padne konečně bod z_0*) do kruhu $|z - b_n| < r_n$ a bude tedy $f(z_0) = 0$.

Poznámka. Z věty **[8]** plyne, že funkce regulární v jisté oblasti je plně definována svými hodnotami v bodech jisté bodové posloupnosti konvergující k bodu a. Otázka existence funkce, přijímající apriori dané hodnoty v bodech takové posloupnosti, není tím ovšem nikterak vyřešena zrovna tak jako methoda skutečné konstrukce takové funkce. Těmito otázkami se zabývají různé interpolační theorie.

§ 63. Analytické pokračování. Pojem analytické funkce. Nechť dvě oblasti D_1 a D_2 mají společnou část, kterou označíme oblast Δ. Mají-li oblasti D_1 a D_2 více společných částí (obr. 100 b), budeme uvažovat jen jednu z nich. Budiž dána v oblasti D_1 regulární funkce $f_1(z)$ a v oblasti D_2 též regulární funkce $f_2(z)$.

Definice. Nabývají-li funkce $f_1(z)$ a $f_2(z)$ v oblasti Δ těchže hodnot, nazýváme funkci $f_2(z)$ *analytickým pokračováním funkce* $f_1(z)$ *v oblasti* D_2 *přes oblast* Δ.

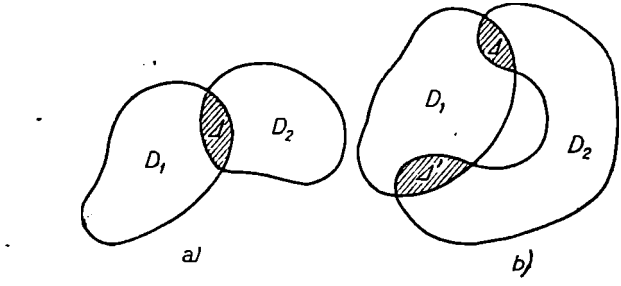
Pro dané oblasti D_1, D_2 a Δ je analytické pokračování funkce $f_1(z)$ v D_2 definováno jednoznačně, což plyne okamžitě z věty o jed-

*) Nebudeme zde uvádět přesný důkaz toho, že můžeme skutečně dosáhnout bodu z_0 konečným počtem kroků.

noznačnosti **[8]** předešlého paragrafu. Mají-li oblasti D_1 a D_2 více společných částí, může být analytické pokračování funkce $f_1(z)$ přes oblast Δ různé od analytického pokračování téže funkce přes oblast Δ' (v téže oblasti D_2, viz obr. 100). Ujasníme si to na příkladě.

Budiž dán řetězec oblastí $D_1, D_2, \ldots, D_n$ tak, že každé dvě za sebou následující oblasti D_k a D_{k+1} mají společnou část Δ_k. V každé z oblastí D_k je dána regulární funkce $f_k(z)$.

Definice. Nabývají-li funkce $f_k(z)$ a $f_{k+1}(z)$ pro každé $k = 1, 2, 3, \ldots, n-1$ stejných hodnot v oblasti Δ_k, nazývá se $f_n(z)$ *analytickým pokračováním funkce* $f_1(z)$ v oblasti D_n přes řetězec oblastí $\{D_k\}$.



Obr. 100.

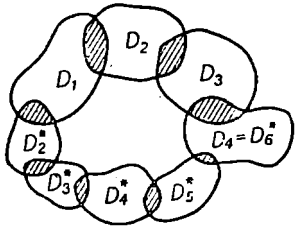
Pro pevná $D_1, D_2, \ldots, D_n$ a $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$ je analytické pokračování jednoznačně určeno. Změníme-li jakýmkoliv způsobem články v řetězu nebo společné oblasti Δ_k, může dojít i ke změně analytického pokračování. Může se stát, že první a poslední člen řetězce jsou shodné (viz obr. 101); pak může být analytické pokračování $f_n(z)$ v oblasti D, které dostaneme proběhnutím celého řetězce kolem dokola, různé od výchozí funkce $f_1(z)$. Objasníme si to na konkretním případě. Budiž dán kruh $|z-1| < \frac{1}{2}$ a označme tuto oblast D_1. V D_1 budiž dána regulární funkce $f_1(z) = \int_1^z \frac{\mathrm{d}z}{z}$, kde L je cesta spojující libovolný bod této oblasti s bodem 1. Pak

$$f_1(z) = \ln z = \ln|z| + \mathrm{i}\arg z,$$

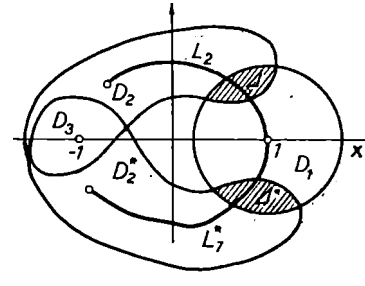
při čemž $\arg z$ značí hlavní hodnotu argumntu a nabývá v horní polorovině kladných a v dolní polorovině záporných hodnot. Budiž dále D_2 a D_2^* oblasti zobrazené na obr. 102 a budiž D_3 jejich společná část. Analytickým pokračováním funkce $f_1(z) = \ln z$ v oblasti D_2 resp. D_2^* budou

$$f_2(z) = \int_{1}^{z} \frac{dz}{z}; \quad \text{resp.} \quad f_2^*(z) = \int_{1}^{z} \frac{dz}{z},$$

kde L_2 resp. L_2^* jsou cesty spojující bod 1 s bodem z, ležícím v D_2 resp. v D_2^*. Tyto funkce jsou též rovny $\ln|z| + i \arg z$, ale argument pro



Obr. 101.



Obr. 102.

prvou z nich nabývá jen kladných hodnot, pro druhou z nich jen záporných hodnot. V oblasti D_3 definují tyto dvě funkce dvě rozličná pokračování analytické funkce $f_1(z) = \ln z$, neboť je na př. $f_2(-1) = \pi i$ a $f_2^*(-1) = -\pi i$. Z našeho příkladu vidíme, že analytické pokračování může být závislé na volbě řetězce oblasti.

Náš příklad nám dovoluje vyjasnit ještě další poměry, o nichž se již mluvilo. Nechť je oblast D tvořena body oblastí D_2 a D_2^*; pak má s oblastí D_1 společné dvě navzájem nesouvislé části Δ a Δ_2^* (obr. 102). Analytická pokračování funkce $f_1(z) = \ln z$ z oblasti D_1 do oblasti D přes oblast Δ resp. oblast Δ_2^* se navzájem liší. Pro prvé z nich nabývá $\arg z$ v $\ln|z| + i \arg z$ hodnot kladných, pro druhé z nich hodnot záporných. Sestrojme ještě analytické pokračování funkce $f_1(z)$ z oblasti D_1 do oblasti D_1 pomocí řetězce $D_1 D_2 D_2^* D_1$. Obě dvě funkce se budou lišit o konstantní hodnotu $2\pi i$.

Zavedení pojmu analytického pokračování nám dovoluje zformulovat obecný pojem analytické funkce, o kterém bylo již mnohokrát hovořeno (§§ 25, 30, atd.). Budiž $f_2(z)$ v oblasti D_2 analytickým pokračováním funkce $f_1(z)$ z oblasti D_1. Zahrneme-li body oblastí D_1 a D_2 do jedné oblasti D, budeme se dívat na funkce $f_1(z)$ a $f_2(z)$ jako na jedinou funkci v oblasti D, danou rovnicemi

$$f(z) = \begin{cases} f_1(z) & \text{je-li } z \in D_1, \\ f_2(z) & \text{je-li } z \in D_2. \end{cases}$$

Mají-li oblasti D_1 a D_2 jen jednu společnou část, pak funkce $f(z)$ podle toho, co bylo výše řečeno, je jednoznačná a regulární v D. Mají-li oblasti D_1 a D_2 několik společných částí, může mít analytické prodloužení funkce $f_1(z)$ přes různé tyto části v oblasti D_2 různé hodnoty. Funkce $f(z)$ se může stát mnohoznačnou. V obou případech ji však budeme nazývat analytickou.

V obecném případě analytického prodloužení funkce $f_1(z)$ z oblasti D_1 přes řetězec oblastí $D_1, D_2, \ldots, D_n$ do oblasti D_n můžeme též body všech D_k zahrnout do jedné oblasti D a považovat $f_k(z)$ za jedinou funkci definovanou rovnicemi

$$f(z) = f_k(z) \quad \text{pro} \quad z \in D_k, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Definice. Funkce $f(z)$, která je analytickým pokračováním regulární funkce do oblasti D, se nazývá *analytickou* v oblasti D.

Jak jsme již řekli, může být tato funkce jednoznačná nebo též mnohoznačná. V prvém případě bude regulární.

Dále se umluvíme uvažovat i řetězec oblastí $D_1, D_2, \ldots, D_n$ jen o jednom článku D_1. To nám umožní nazývat každou funkci regulární v jisté oblasti analytickou v této oblasti.

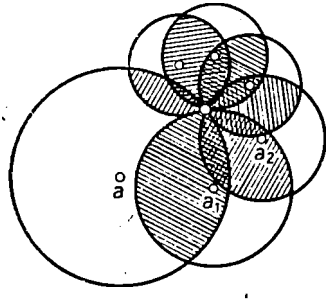
Definice. Budiž dána v oblasti D jednoznačná regulární funkce $f(z)$. Sestrojme všechna možná analytická pokračování této funkce ve všech možných řetězcích v rovině z. Shrneme všechna takto získaná prodloužení v jedinou, obecně nekonečně mnohoznačnou funkci $F(z)$, budeme ji nazývat *úplnou analytickou funkcí*.

Regulární funkce sestrojené jako analytické pokračování v různých částech roviny budeme nazývat jejími regulárními větvemi.

Všechny funkce, o kterých jsme hovořili v kapitole III, byly analytické.

Principiálně velmi prostý způsob konstrukce analytické funkce pochází od Weierstrasse. Jako základ konstrukce vezmeme potenční řadu $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n = f(z)$ s nenulovým poloměrem konvergence — t. zv. *regulární element* analytické funkce. Protože $f(z)$ je regulární všude v kruhu $|z-a| < r$, lze ji v okolí bodu a_1, který náleží do tohoto kruhu, rozvinout v Taylorovu řadu

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a_1)}{n!}(z-a_1)^n.$$



Obr. 103.

Takto konstruovaná řada je jistě konvergentní v kruhu se středem v bodě a_1, pokud celý tento kruh leží ještě v kruhu $|z-a| < r$. Může se však stát, že tato řada konverguje i ve větším kruhu, a pak definuje analytické pokračování funkce $f(z)$, neboť ve společné části obou kruhů (čárkováno na obr. 103) $f_1(z) \equiv f(z)$. Pro body kruhu $|z-a| < r_1$ ležící v kruhu $|z-a| < r$ to plyne okamžitě z konstrukce funkce $f_1(z)$ a pro ostatní z jednoznačnosti rozvoje.

Tuto konstrukci můžeme libovolně opakovat, vybírajíce za středy konvergenčních kružnic Taylorových řad vždy regulární body předcházející funkce (elementu). V závěru obdržíme úplnou analytickou funkci obecně mnohoznačnou. Jednotlivé elementy (t. j. součty jednotlivých potenčních řad) budou tvořit její regulární větve.

Potenční řady*) představující elementy úplné analytické funkce konvergují, pokud jejich konvergenční kružnice neobsahují některý ze singulárních bodů funkce (§ 61). Singulární body budou tedy tvořit hranici oblasti, na kterou je možno prodloužit tu kterou funkci (*existenční oblast funkce*). Tato hranice může být tvořena uzavřenými křivkami (t. zv. *přirozená hranice*), oblouky křivek nebo též jednotlivými body.

*) Další výklad má jen informativní popisný charakter; přesný důkaz závěru § 63 je mimo rámec naší knihy.

Pro jednodušší funkce je jejich existenční hranice tvořena jednotlivými isolovanými singulárními body. Singulární body mají *jednoznačný* nebo *mnohoznačný charakter*, podle toho, zda příslušná funkce je v dostatečně malém okolí jednoznačná či mnohoznačná. Tak na př. singulární bod jednoznačný je singulární bod $z = 0$ funkce $w = \frac{1}{z}$ (v bodě $z = 0$ má funkce $\frac{1}{z}$ nespojitost). Podrobně se budeme těmito body zabývat v § 65 a dalších.

Mnohoznačným singulárním bodem — častěji takové singulární body nazýváme *body rozvětvení* — je bod $z = 0$ funkce $\sqrt[n]{z}$ (derivace $\frac{\mathrm{d}\sqrt[n]{z}}{\mathrm{d}z}$ neexistuje v tomto bodě). Další příklad poskytuje funkce Lnz v bodě $z = 0$ (funkce je tam nespojitá). Obecnou diskusí těchto bodů se nebudeme v našich úvahách zabývat.

Z jednotlivých konvergenčních kruhů elementů analytické funkce můžeme sestrojit Riemannovu plochu, na níž bude naše funkce jednoznačná. Když při pokračování elementu nějaké analytické funkce pomocí jistého řetězce konvergenčních kruhů padne nový konvergenční kruh na jeden z předcházejících, musíme si ho myslet umístěný na druhém listě Riemannovy plochy, ležícím nad či pod listem, na němž leží předcházející kruhy řetězce. Obecnou konstrukcí listů Riemannovy plochy analytické funkce se zde nebudeme zabývat, jen čtenáři připomeneme, aby si zopakoval strukturu Riemannovy plochy funkcí $\sqrt[n]{z}$ a Lnz, jak byla vyložena v kap. III.

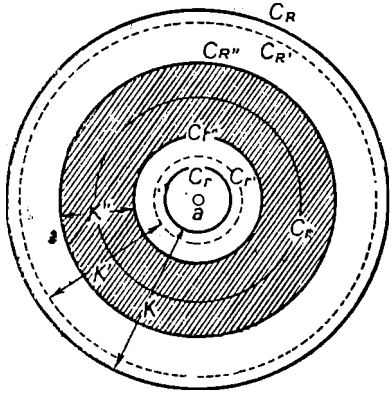
§ 64. Laurentovy řady. Budiž $f(z)$ regulární v jistém mezikruží $K : r < |z - a| < R$. Sestrojíme ještě mezikruží $K' : r' < |z - a| < R'$ a $K'' : r'' < |z - a| < R''$ tak, že mezikruží K' leží uvnitř K a K'' uvnitř K' (obr. 104). Funkce $f(z)$ je regulární v uzavřeném mezikruží K' a možno ji tedy vyjádřit Cauchyho integrálem:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{K'}} \frac{f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta}{\zeta - z} - \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{r'}} \frac{f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta}{\zeta - z}, \tag{24}$$

kde $C_{R'}$ a $C_{r''}$ jsou kružnice tvořící hranici mezikruží se středem v bodě a (viz § 51). Předpokládejme, že bod z leží v mezikruží K''. Pak v prvém z integrálů (24) je $\left|\frac{z-a}{\zeta-a}\right| < \frac{R''}{R'} = q_1 < 1$ a zlomek v integrandu je možno rozložit v geometrickou řadu

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z-a}{\zeta-a}} = \frac{1}{\zeta-a} + \frac{z-a}{(\zeta-a)^2} + \frac{(z-a)^2}{(\zeta-a)^3} + \ldots +$$

$$+ \frac{(z-a)^n}{(\zeta-a)^{n+1}} + \ldots,$$



Obr. 104.

která konverguje stejnoměrně pro všechna ζ na kružnici $C_{R'}$. Dosadíme do prvého z integrálů (24) a integrujeme člen po členu. Dostaneme

$$f_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{R'}} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} =$$

$$= c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \ldots + c_n(z-a)^n + \ldots, \quad (25)$$

kde

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{R'}} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-a)^{n+1}}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \quad (26)$$

Poznamenejme však, že zde není možno v (26) vyjádřit koeficienty c_n ve tvaru $\frac{f^{(n)}(a)}{n!}$, neboť $f(z)$ není v bodě $z = a$ regulární.

V druhém z integrálů (24) je $\left|\frac{\zeta-a}{z-a}\right| < \frac{r'}{r''} = q_2 < 1$, a tedy

$$\frac{1}{\zeta - z} = -\frac{1}{z-a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\zeta-a}{z-a}} = -\frac{1}{z-a} - \frac{\zeta-a}{(z-a)^2} -$$

$$- \frac{(\zeta-a)^2}{(z-a)^3} - \ldots - \frac{(\zeta-a)^{n-1}}{(z-a)^n} - \ldots;$$

geometrická řada, kterou jsme obdrželi, konverguje stejnoměrně pro všechna ζ na kružnici $C_{r'}$. Dosadíme do druhého z integrálů (24), integrujeme člen po členu a dostaneme

$$f_2(z) = -\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_{r'}} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} = \tag{27}$$

$$= \frac{c_{-1}}{z-a} + \frac{c_{-2}}{(z-a)^2} + \ldots + \frac{c_{-n}}{(z-a)^n} + \ldots,$$

kde

$$c_{-n} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_{r'}} f(\zeta)\,(\zeta - a)^{n-1}\,d\zeta, \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{28}$$

Zaměníme nyní ještě index $-n$ ve vzorcích (27) a (28) indexem n, probíhajícím hodnoty $-1, -2, -3, \ldots$, a máme konečný výsledek

$$f(z) = f_1(z) + f_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n + \sum_{n=-1}^{-\infty} \frac{c_n}{(z-a)^{-n}} = \tag{29}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n.$$

Dále je možno podle (13) § 47 zaměnit v (26) a (28) integrační cestu libovolnou kružnicí, ležící v mezikruží K'. Pak — po záměně indexu $-n$ na n v (28) — je možno psát (26) a (28) jako jediný vzorec

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_\varrho} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta - a)^{n+1}}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{30}$$

Protože je možno volit poloměry r'' a R'' libovolně blízko poloměrům r a R a podle (30) koeficienty c_n nezávisí na volbě těchto poloměrů, plyne z toho hned, že rozvoj (29) platí v celém mezikruží K.

Definice. Řada (29), jejíž koeficienty jsou dány vztahem (30), se nazývá *Laurentovou řadou* funkce $f(z)$ v mezikruží K. Řady (25) resp. (27) se nazývají *normální* resp. *hlavní* částí Laurentovy řady.

Normální část Laurentovy řady

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n \tag{25}$$

je obyčejná potenční řada. Z konvergence této řady v mezikruží K plyne její konvergence v celém kruhu $|z - a| < R$ a podle § 61 mů-

žeme konvergenční kružnici rozšířit až k nejbližšímu singulárnímu bodu funkce.

Hlavní část Laurentovy řady

$$f_2(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-a)^n} \tag{27}$$

je potenční řada pro proměnou $Z = \frac{1}{z-a}$. Podle předpokladu konverguje v mezikruží $\frac{1}{R} < |Z| < \frac{1}{r}$ a podle Abelovy věty konverguje tedy v kruhu $|Z| < \frac{1}{r}$, t. j. konverguje pro všechna z vně kruhu $|z-a| < r$. Poloměr konvergence můžeme zmenšovat, pokud nepadne na hranici konvergenčního kruhu některý ze singulárních bodů funkce.

Mezikruží K, ve kterém konverguje Laurentova řada, je tedy maximálním mezikružím, v kterém je funkce regulární, a na každé z obou jeho hranic leží aspoň jeden singulární bod funkce. Při tom se může mezikruží K rozšířit až na kruh s vyjmutým středem, $0 < |z-a| < R$, po případě se může vně rozšířit až na celý vnějšek kruhu s vyjmutým bodem $z = \infty : r < |z-a| < \infty$.

Z Abelovy věty ještě plyne, že uvnitř každého uzavřeného mezikruží patřícího do mezikruží K konverguje Laurentova řada stejnoměrně.

Výsledky obsahuje věta:

Věta [9]. *Každou funkci regulární v mezikruží K: $r < |z-a| < R$ můžeme rozvinout v Laurentovu řadu*

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n, \tag{29}$$

kde se koeficienty c_n vyjádří pomocí (30); *mezikruží K je přitom maximální mezikruží, v němž je $f(z)$ regulární. Normální část Laurentovy řady konverguje všude v $|z-a| < R$ a hlavní část všude vně kruhu $|z-a| < r$. Laurentova řada konverguje stejnoměrně v každém uzavřeném mezikruží $r' \leqq |z-a| \leqq R'$, jež patří do K.*

Poznámka. Z (30) plyne podle věty o odhadu integrálu § 46 pro koeficienty

$$|c_n| = \left| \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_\varrho} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta - a)^{n+1}} \right| \leqq \frac{M \cdot 2\pi\varrho}{2\pi\varrho^{n+1}} = \frac{M}{\varrho^n}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

kde M je maximum $|f(z)|$ na kružnici C_ρ a ϱ její poloměr. Nerovnosti

$$|c_n| < \frac{M}{\varrho^n}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{31}$$

se nazývají *Cauchyho odhady pro koeficienty Laurentovy řady.*

Nechť je nyní dána libovolná řada v kladných a záporných mocninách $(z - a)$:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z - a)^k.$$

Podle toho, co bylo dříve řečeno, se snadno přesvědčíme, že ta část řady, která obsahuje jen positivní mocniny $(z - a)$, konverguje v jistém kruhu $|z - a| < R$ a část obsahující jen negativní mocniny $(z - a)$ konverguje vně jistého kruhu $|z - a| > r$. Bude-li $r < R$, pak naše řada konverguje stejnoměrně v každé uzavřené oblasti patřící do mezikruží K: $r < |z - a| < R$. Označme $f(z)$ její součet, který podle právě řečeného existuje všude v mezikruží K a je tam i všude regulární (větaWeierstrassova § 59). Budiž C_ρ kružnice $|z - a| = \varrho$ ležící v K; v důsledku stejnoměrné konvergence řady

$$\frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (\zeta - a)^{k-n-1}$$

na kružnici C_ρ můžeme integrovat člen po členu podél této kružnice. Podle (31) § 50 bude z integrálů na pravé straně různý od nuly jen integrál pro $k - n - 1 = -1$, t. j. $k = n$.

Jako výsledek jsme dostali

$$\oint_{C_\varrho} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta - a)^{n+1}} = 2\pi i c_n$$

a tím je dokázána tato věta:

Věta [10]. *Libovolná řada typu*

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(z-a)^k,$$

konvergentní v jistém mezikruží $r < |z-a| < R$, *je v tomto mezikruží Laurentovou řadou funkce definované jejím součtem.*

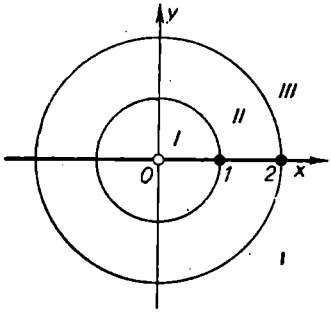
Z věty **[10]** ihned plyne, že jakýmkoliv způsobem získaný rozvoj funkce $f(z)$ podle positivních a negativních mocnin $(z-a)$ je jejím Laurentovým rozvojem.

Příklad. Funkce

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$$

je regulární v „mezikružích" (I): $|z| < 1$, (II): $1 < |z| < 2$, (III): $2 < |z|$. Než budeme hledat její Laurentův rozvoj, napíšeme si ji ve tvaru

$$f(z) = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1}.$$



Obr. 105.

V mezikruží (I) pro $|z| < 1$ konvergují geometrické řady

$$\frac{1}{z-2} = -\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{1}{2}z} = -\frac{1}{2}\left(1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{4} + \ldots\right)$$
$$\frac{1}{z-1} = -\frac{1}{1-z} = -(1 + z + z^2 + \ldots) \qquad (32)$$

a řada Laurentova pro funkci $f(z)$ je obyčejná potenční řada

$$f(z) = -\frac{1}{2}\left(1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{4} + \ldots\right) + (1 + z + z^2 + \ldots) =$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{3}{4}z + \frac{7}{8}z^2 + \ldots \qquad (33)$$

Tento rozvoj je zřejmě správný, neboť bod $z = 0$ není singulárním bodem funkce $f(z)$.

V mezikruží (II) první z řad (32) platí dále, ale druhý z rozvojů je třeba nahradit rozvojem

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z}\,\frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \frac{1}{z}\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\ldots\right),$$

konvergujícím pro všechna $|z| > 1$. Odtud je ihned vidět, že v mezikruží (II) má $f(z)$ rozvoj

$$f(z) = -\frac{1}{2}\left(1+\frac{z}{2}+\frac{z^2}{4}+\ldots\right) - \left(\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+\ldots\right).$$

V mezikruží (III) je třeba nahradit prvou z řad (32) řadou

$$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{z}\,\frac{1}{1-\frac{2}{z}} = \frac{1}{z}\left(1+\frac{2}{z}+\frac{4}{z^2}+\ldots\right),$$

konvergentní pro všechna $|z| > 2$, zatím co rozvoj pro $\frac{1}{z-1}$ z mezikruží (II) platí i v mezikruží (III), funkce $f(z)$ má v mezikruží III rozvoj

$$f(z) = \left(\frac{1}{z}+\frac{2}{z^2}+\frac{4}{z^3}+\ldots\right) - \left(\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+\ldots\right) = \frac{1}{z^2}+\frac{3}{z^3}+\ldots$$

Objasníme si ještě souvislost mezi Fourierovými řadami známými z analysy funkcí reálné proměnné a řadami Laurentovými.*) Nechť je funkce $f(z)$ regulární v sebemenším mezikruží $1-\varepsilon < |z| < 1+\varepsilon$; vždy tam může být rozvinuta v Laurentovu řadu

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n,$$

kde

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|\zeta|=1} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}}\,\mathrm{d}\zeta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\mathrm{e}^{i\Theta})\,\mathrm{e}^{-in\Theta}\,\mathrm{d}\Theta.$$

*) Viz K. Petr: Počet integrální, str. 367 a násl., II. vyd., JČMF, Praha, 1931. [*Pozn. překl.*]

Pro body $z = e^{it}$ na jednotkové kružnici obdržíme

$$F(t) = f(e^{it}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}, \tag{34}$$

kde

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\Theta)\, e^{-in\Theta}\, d\Theta. \tag{35}$$

Řada (34) s koeficienty (35) představuje *Fourierovu řadu v komplexním tvaru* pro funkci $F(t)$. To plyne ihned z rovnice

$$F(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n e^{int} + c_{-n} e^{-int}) = \tfrac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt), \tag{36}$$

kde jsme při odvození posledního vztahu položili $c_0 = \frac{1}{2}a$, použili Eulerovy formule a dosadili $c_n + c_{-n} = a_n$, $i(c_n - c_{-n}) = b_n$. Pro koeficienty a_n a b_n platí podle (35)

$$a_0 = 2c_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(\Theta)\, d\Theta, \quad a_n = c_n + c_{-n} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(\Theta) \cos n\Theta\, d\Theta,$$

$$b_n = \frac{c_{-n} - c_n}{i} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(\Theta) \sin n\Theta\, d\Theta;$$

a_0, a_n, b_n jsou tedy koeficienty Fourierovy řady pro funkci $F(t)$. Tím je tvrzení dokázáno. *Na jednotkové kružnici je Laurentova řada shodná s Fourierovou řadou funkce $F(t) = f(e^{it})$, kde pro okamžik považujeme Laurentovu řadu za funkci reálného argumentu t (parametru na kružnici).*

V analyse reálné proměnné se dokazuje, že ve Fourierovu řadu lze rozvinout každou funkci reálné proměnné v intervalu $0 \leqq t \leqq 2\pi$, pokud vyhovuje jistým dosti obecným předpokladům (t. zv. podmínky Dirichletovy). Odtud plyne, že se libovolná komplexní funkce $F(t) = u(t) + iv(t)$ dá též rozvést ve Fourierovu řadu, pokud funkce u a v vyhovují uvedeným podmínkám. Provedeme-li postup opačným směrem, dostaneme Fourierovu řadu v komplexním tvaru (34). *Komplexní tvar Fourierovy řady platí tedy vždy, když platí příslušný*

tvar reálný. Obecně nemusí existovat regulární funkce $f(z)$ na kružnici $|z| = 1$ tak, že $f(e^{it}) = F(t)$. V tom případě řada $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$, kde

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\Theta)\, e^{-in\Theta}\, d\Theta,$$

diverguje pro všechna $|z| \neq 1$.

§ 65. Isolované singulární body. Definice. Budiž $f(z)$ regulární v „mezikruží" $0 < |z - a| < R$. V bodě $z = a$ není $f(z)$ regulární. Bod a pak nazýváme *isolovaným singulárním bodem funkce* $f(z)$.

Z úvah předešlého paragrafu plyne, že v „mezikruží" $0 < |z - a| < R$, přimykajícím se k isolovanému bodu, může být funkce $f(z)$ rozvinuta v Laurentovu řadu (29). Přitom je možno rozšířit poloměr R až do nejbližšího singulárního bodu. Normální část Laurentovy řady konverguje všude v $|z - a| < R$ a hlavní část všude kromě bodu $z = a$.

Ze vzorce (30) pro koeficienty Laurentovy řady pro $n = -1$ dostaneme

$$c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_\varrho} f(\zeta)\, d\zeta, \tag{37}$$

kde C_ϱ je kružnice $|z - a| = \varrho$ a ϱ libovolné číslo $0 < \varrho < R$.

Porovnáním s definicí residua v § 48 dostaneme ihned důležitou větu:

Věta [11]. *Residuum funkce $f(z)$ v isolovaném singulárním bodě a je rovno koeficientu při $(z - a)^{-1}$ v Laurentově rozvoji funkce $f(z)$ v okolí bodu a.*

Použití této věty bude věnována celá další kapitola.

Rozlišujeme tři druhy isolovaných singulárních bodů podle chování funkce v jejich okolí.

Definice. Isolovaný singulární bod se nazývá

a) *odstranitelným singulárním bodem*, jestliže existuje konečná limita

$$\lim_{z \to a} f(z) = A \neq \infty,$$

b) *pólem* (nepodstatně singulárním bodem), je-li

$$\lim_{z \to a} f(z) = \infty,$$

c) *podstatně singulárním bodem* jestliže $\lim_{z \to a} f(z)$ neexistuje.

Dále si probereme podrobně všechny tři případy.

§ 66. Odstranitelné singulární body. Z definice plyne (jelikož limita je konečná) že funkce $f(z)$ je v okolí bodu $z = a$ ohraničená. Budiž $|f(z)| \leqq M$; pak v Cauchyho nerovnosti pro koeficienty Laurentovy řady

$$|c_n| < \frac{M}{\varrho^n} = M\varrho^{-n} \tag{31}$$

můžeme zvolit číslo ϱ tak malé, že pro všechny koeficienty se záporným indexem platí $c_n = 0$ (neboť pro $n < 0$ $\varrho^{-n} \to 0$ pro $\varrho \to 0$). V Laurentově rozvoji zbudou tedy jen členy s positivními mocninami $z - a$ a rozvoj v okolí bodu $z = a$ bude obsahovat jen normální část:

$$f(z) = c_0 + c_1(z - a) + c_2(z - a)^2 + \ldots + c_n(z - a)^n + \ldots \tag{38}$$

Naopak má-li funkce $f(z)$ v okolí isolovaného singulárního bodu Laurentův rozvoj typu (38), existuje $\lim_{z \to a} f(z) = c_0 \neq \infty$ a singulární bod je odstranitelný. Tím jsme dokázali:

Věta [12]. *Nutná a postačující podmínka pro to, aby bod $z = a$ byl odstranitelným singulárním bodem funkce $f(z)$ je, aby Laurentův rozvoj funkce $f(z)$ obsahoval jen normální část:*

$$f(z) = c_0 + c_1(z - a) + c_2(z - a)^2 + \ldots + c_n(z - a)^n + \ldots$$

Poznámka 1. Jestliže rozvoj (38) platí i v bodě $z = a$, t. j. $f(a) = c_0$, je $f(z)$ regulární v kruhu $|z - a| < R$ a řada je shodná s potenční řadou. Jestliže je bod $z = a$ podle předpokladu singulárním bodem funkce $f(z)$, která v něm není regulární, pak v něm buď není $f(z)$ definována, nebo $f(a) \neq c_0$. Tuto singularitu můžeme odstranit, položíme-li definitoricky $f(a) = c_0$. Odtud byl také odvozen název odstranitelný singulární bod.

Poznámka 2. Je-li bod $z = a$ odstranitelným singulárním bodem funkce $f(z)$, je funkce $f(z)$ v jeho okolí ohraničená. Toto tvrzení platí

i naopak: *Je-li funkce $f(z)$ ohraničená v okolí některého svého isolovaného singulárního bodu, je tento bod odstranitelným singulárním bodem.*

Příklad. Funkce

$$f(z) = \frac{\sin z}{z}$$

není definována pro $z = 0$. Pro $z \neq 0$ ji lze rozvést v řadu

$$\frac{\sin z}{z} = \frac{z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \dots$$

Bod $z = 0$ je zřejmě odstranitelným singulárním bodem funkce $f(z) = \frac{\sin z}{z}$. Z rozvoje plyne

$$\lim_{z \to 0} \frac{\sin z}{z} = 1.$$

Doplníme-li definici naší funkce pro bod $z = 0$ takto: $f(0) = 1$, bude naše funkce regulární i v bodě $z = 0$.

Všimněme si ještě toho, že podle věty 11 § 65 je *residuum naší funkce v bodě $z = 0$ rovno nule.*

§ 67. Póly. Z definice plyne, že lze vždy najít takové okolí $0 < |z - a| < R$ bodu $z = a$, v kterém je funkce $f(z)$ různá od nuly (neboť podle § 12 je vždy $|f(z)| > M$ ať si zvolíme jakkoliv velké $M > 0$.

V takto konstruovaném okolí je funkce $g(z) = \frac{1}{f(z)}$, jejíž jmenovatel je podle uvedeného předpokladu od nuly různý, regulární. Je zřejmě $\lim_{z \to a} g(z) = 0$ a tedy $g(z)$ má v bodě $z = a$ odstranitelnou singularitu. Položíme $g(a) = 0$ a funkce $g(z)$ bude regulární v kruhu $|z - a| < R$ a bod $z = a$ bude jejím nulovým bodem. Naopak bude-li bod $z = a$ nulovým bodem funkce $g(z) \not\equiv 0$, která je regulární v tomto bodě, pak (podle existenční věty § 62) v jistém okolí $0 < |z - a| < R$ bodu a bude funkce $g(z)$ různá od nuly. V tomto okolí bude funkce $f(z) = \frac{1}{g(z)}$, pro kterou bude bod $z = a$ zřejmě pólem, regulární. Tím jsme dokázali větu:

Věta [13]. *Nutná a postačující podmínka pro to, aby funkce $f(z)$ regulární v jistém okolí bodu a: $0 < |z - a| < R$ měla v tomto bodě svůj pól, je, aby funkce*

$$g(z) = \frac{1}{f(z)}$$

měla v bodě $z = a$ svůj nulový bod. Přitom předpokládáme, že $g(a) = \lim_{z \to a} g(z) = 0$, a pro důkaz opačným směrem $g(z) \not\equiv 0$ a $g(z)$ je regulární v jistém okolí bodu $z = a$.

Definice. Řád nulového bodu $z = a$ funkce $g(z) = \frac{1}{f(z)}$ se nazývá *řádem pólu $z = a$ funkce $f(z)$.*

Budiž $z = a$ pólem řádu m funkce $f(z)$. Podle věty **[13]** a výsledků § 62

$$g(z) = \frac{1}{f(z)} = c_m(z - a)^m + c_{m+1}(z - a)^{m+1} + \ldots = (z - a)^m \varphi(z),$$

kde funkce $\varphi(z)$, $\varphi(a) = c_m \neq 0$, je regulární v okolí bodu $z = a$. Odtud pro jisté okolí bodu $z = a$ platí

$$f(z) = \frac{1}{(z - a)^m} \frac{1}{\varphi(z)} = \frac{1}{(z - a)^m} \{b_0 + b_1(z - a) + b_2(z - a)^2 + \ldots\},$$

neboť funkce $\frac{1}{\varphi(z)}$ je regulární v bodě $z = a$, a můžeme ji tedy rozvést v Taylorovu řadu ($b_0 = \frac{1}{\varphi(a)} = \frac{1}{c_m} \neq 0$). Změníme-li označení koeficientů a zavedeme-li vhodné pojmenování, dá se poslední rovnost přepsat ve tvaru

$$f(z) = \frac{c_{-m}}{(z - a)^m} + \frac{c_{m+1}}{(z - a)^{m-1}} + \ldots + \frac{c_{-1}}{z - a} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - a)^n, \quad (39)$$

kde $c_{-m} = b_0 \neq 0$. Hlavní část Laurentova rozvoje v okolí pólu má tedy jen konečný počet členů. Naopak, má-li hlavní část Laurentova rozvoje v okolí jistého isolovaného singulárního bodu jen konečný počet členů, je tento bod jejím pólem. Důkaz: Nechť má řada tvar (39); znásobíme celou rovnici $(z - a)^m$ a dostaneme

$$\varphi(z) = f(z)(z - a)^m = c_{-m} + c_{-m+1}(z - a) + c_{-m+2}(z - a)^2 + \ldots$$

Funkce $\varphi(z)$ je regulární, neboť podle definice $\varphi(z) = c_{-m}$ v bodě

$z = a$. Budiž m index posledního členu v hlavní části Laurentova rozvoje (39); pak je $c_{-m} \neq 0$ a

$$\lim_{z \to a} f(z) = \lim_{z \to a} \frac{\varphi(z)}{(z-a)^m} = \infty,$$

t. j. $z = a$ je pólem funkce $f(z)$, Protože $\frac{1}{f(z)} = (z-a)^m \frac{1}{\varphi(z)} =$

$= (z-)\, a^m\{b_{-m} + b_{-m+1}(z-a) + \ldots\}$, kde $b_{-m} = \frac{1}{c_{-m}} \neq 0$, řád pólu je právě m. Tím jsme dokázali větu **[14]**.

Věta [14]. *Podmínka nutná a postačující pro to, aby bod $z = a$ byl pólem funkce $f(z)$ je, aby hlavní část Laurentova rozvoje funkce $f(z)$ v okolí bodu $z = a$ obsahovala jen konečný počet členů:*

$$f(z) = \frac{c_{-m}}{(z-a)^m} + \frac{c_{-m+1}}{(z-a)^{m-1}} + \ldots + \frac{c_{-1}}{z-a} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n;$$

$$c_{-m} \neq 0.$$

Index posledního členu hlavní části (podle předpokladu různý od nuly) udává řád pólu $z = a$.

Věty **[13]** a **[14]** slouží jako kriteria k identifikaci pólů.

Příklad. Funkce

$$f(z) = \frac{(z-1)(z-2)}{(z^2+1)(z+3)^2}$$

má tři póly: $z_{1,2} = \pm i$ prvého řádu a $z_3 = -3$ druhého řádu (tyto body jsou nulovými body těchže řádů pro funkci $\frac{1}{f(z)}$).

Objasněme si zde ještě *hydromechanický význam pólů*. Komplexní potenciál pole s vírem intensity Γ a zřídlem vydatnosti Q, kde oba jsou v bodě $z = a$ (*vířivé zřídlo*), se rovná

$$\Phi(z) = \frac{Q - i\Gamma}{2\pi} \operatorname{Ln}(z-a)$$

(viz př. 2 a 3 § 39 a též př. 4 úlohy ke kap. IV). Vířivé zřídlo „intensity" $Q - i\Gamma = \mathfrak{q}$ má tedy komplexní potenciál $\Phi(z) = \frac{\mathfrak{q}}{2\pi} \operatorname{Ln}(z-a)$,

který má v bodě $z = a$ bod rozvětvení. Mějme nyní pole se dvěma vířivými zřídly intensit $q' = \frac{p_2}{h}$ a $q'' = -\frac{p_2}{h}$ v bodech $z_1 = a - h$ a $z_2 = a$. Pole, které obdržíme jako limitní případ tohoto pole, přibližují-li se obě zřídla navzájem, nazýváme *polem dipólu momentu* p_2. Jeho komplexní potenciál je

$$\Phi_2(z) = \lim_{h \to 0} \left\{ \frac{p_2}{2\pi h} \operatorname{Ln}(z - a + h) - \frac{p_2}{2\pi h} \operatorname{Ln}(z - a) \right\}$$

$$= \frac{p_2}{2\pi} \lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{Ln}(z - a + h) - \operatorname{Ln}(z - a)}{h} = \frac{p_2}{2\pi} \frac{1}{z - a},$$

kde jsme při odvození limity použili definice derivace. Komplexní potenciál má zřejmě v bodě $z = a$ pól *prvého řádu*. Tento limitní postup můžeme opakovat pro pole dvou dipólů s nekonečnými momenty $p_2' = \frac{p_4}{h}$ a $p_2'' = -\frac{p_4}{h}$ v bodech $z_1 = a - h$ a $z_2 = a$, t. zv. *pole dipólu*. Jeho komplexní potenciál bude

$$\Phi_4(z) = \lim_{h \to 0} \left\{ \frac{p_4}{2\pi} \frac{1}{z - a + h} - \frac{p_4}{2\pi h} \frac{1}{z - a} \right\} =$$

$$= \frac{p_4}{2\pi} \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left\{ \frac{1}{z + h - a} - \frac{1}{z - a} \right\} = -\frac{p_4}{2\pi} \frac{1}{(z - a)^2}$$

a budeme mít v bodě $z = a$ *pól druhého řádu*. Indukcí snadno odvodíme, že obecně *multipól* násobnosti $2m$ jako limitní případ splynutí dvou multipolů násobnosti $2(m - 1)$ s nekonečnými momenty bude mít komplexní potenciál

$$\Phi_{2m}(z) = (-1)^{m-1} \frac{p_{2m}(m - 1)!}{2\pi} \cdot \frac{1}{(z - a)^m},$$

který bude mít v bodě $z = a$ *pól řádu* m.

Naopak *každý pól řádu* m *funkce* $f(z)$ *v bodě* $z = a$ *můžeme považovat za souhrn multipólů v bodě* $z = a$, *jejichž násobnost nepřevyšuje* $2m$ *a jejichž momenty jsou rovny koeficientům v hlavní části Laurentova rozvoje funkce* $f(z)$ *v okolí bodu* $z = a$.

V závěru odvodíme vzorce pro výpočet residuí v pólech funkce $f(z)$. Z rozvoje (39) plyne

$$(z-a)^m f(z) = c_{-m} + c_{-m+1}(z-a) + \ldots + c_{-1}(z-a)^{m-1} + \\ + c_0(z-a)^m + \ldots$$

Abychom určili koeficient c_{-1} budeme $(m-1)$-krát derivovat; dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}z^{m-1}}[(z-a)^m f(z)] = (m-1)!\, c_{-1} + m(m-1)\ldots 2c_0(z-a) + \ldots$$

a budeme limitovat pro $z \to a$ (přímé dosazení není možné v levé části, neboť $f(a) = \infty$). Hledaný vzorec má tvar

$$c_{-1} = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z\to a} \frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}z^{m-1}}[(z-a)^m f(z)]. \tag{40}$$

Speciálně pro pól prvého řádu máme

$$c_{-1} = \lim_{z\to a} (z-a) f(z). \tag{41}$$

Budiž $f(z)$ definována v okolí bodu $z = a$ jako podíl dvou regulárních funkcí

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)},$$

při čemž $\varphi(a) \neq 0$, $\psi(a) = 0$, $\psi'(a) \neq 0$. Z předešlého je vidět, že funkce $f(z)$ má v bodě $z = a$ pól prvého řádu. V tomto případě však můžeme napsat vzorec (41) ve tvaru

$$c_{-1} = \lim_{z\to a} (z-a)\frac{\varphi(z)}{\psi(z)} = \varphi(a) \lim_{z\to a} \frac{1}{\dfrac{\psi(z)-\psi(a)}{z-a}} = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)} \tag{42}$$

(kde jsme použili věty o limitách a toho, že $\psi'(a) \neq 0$). Vzorec (42) je velmi výhodný pro stanovení residuí v pólech prvého řádu.

Příklad. Funkce

$$f(z) = \frac{1}{\sin z^2}$$

má pól druhého řádu v bodě $z = 0$ a póly prvého řádu v bodech $z_k = \pm\sqrt{k\pi}$, $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$ (neboť $g(z) = \sin z^2$ a tedy $g(z_k) = 0$,

$g'(z_k) = 2z_k \cos z_k^2 \neq 0$ pro $k \neq 0$ a $g'(0) = 0$, $g''(0) \neq 0$). Residua v bodech z_k, $k \neq 0$ najdeme snadno podle (42),

$$c_{-1}^{(k)} = \frac{1}{g'(z_k)} = \frac{1}{2z_k \cos z_k^2} = \frac{(-1)^k}{2z_k},$$

a residuum v bodě $z = 0$ podle (40):

$$c_{-1}^{(0)} = \lim_{z\to 0} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left\{\frac{z^2}{\sin z^2}\right\} = \lim_{z\to 0} \frac{2z \sin z^2 - 2z^3 \cos z^2}{\sin^2 z^2} =$$

$$= \lim_{z\to 0} \frac{2z\left(z^2 - \frac{z^6}{3!} + \ldots\right) - 2z^3\left(1 - \frac{z^4}{2!} + \ldots\right)}{\left(z^2 - \frac{z^6}{3!} + \ldots\right)^2} = \lim_{z\to 0} \frac{\frac{2}{3}z^7 + \ldots}{z^4 + \ldots} = 0.$$

Poslední výsledek plyne též z toho, že $f(z)$ pro $0 < |z| < \sqrt{\pi}$ je regulární funkcí argumentu z^2, a proto její Laurentův rozvoj má jen sudé mocniny.

§ 68. Podstatně singulární body. Blížíme-li se k podstatně singulárnímu bodu funkce, neexistuje ani konečná, ani nekonečná limita $\lim_{z\to a} f(z)$. Z toho plyne, že existují aspoň dvě bodové posloupnosti mající za limitu bod $z = a$ takové, že posloupnosti příslušných funkčních hodnot $f(z_n')$ resp. $f(z_n'')$ mají různé limity. Platí věta Weierstrassova:

Věta [14]. *Je-li bod $z = a$ podstatně singulárním bodem funkce $f(z)$, lze ke každému libovolnému komplexnímu číslu A najít takovou bodovou posloupnost $\{z_n\}$ konvergující k bodu $z = a$, že platí*

$$\lim_{n\to\infty} f(z_n) = A.$$

Větu dokážeme nejprve pro $A = \infty$. Funkce $f(z)$ nemůže být ohraničená v žádném okolí bodu a, neboť pak by byl bod a podle poznámky 2 § 66 odstranitelným singulárním bodem. To znamená, že se pro libovolné n najde vždy v okolí $0 < |z - a| < \frac{1}{n}$ bod z_n, pro který $|f(z_n)| > n$. Pak zřejmě $\lim_{n\to\infty} z_n = a$ a $\lim_{n\to\infty} f(z_n) = \infty$ a věta pro $A = \infty$ je dokázána.

Budiž nyní $A \neq \infty$. Pak buď v každém okolí $0 < |z - a| < \frac{1}{n}$ leží bod z_n, pro nějž $f(z_n) = A$, nebo existuje okolí $0 < |z - a| < \frac{1}{N}$, v kterém $f(z) \neq A$. V prvém případě věta zřejmě platí, neboť posloupnost bodů z_n je právě hledaná posloupnost. V druhém případě je funkce

$$g(z) = \frac{1}{f(z) - A}$$

v okolí $0 < |z - a| < \frac{1}{N}$ regulární. Bod $z = a$ je isolovaným singulárním bodem této funkce. Může být jen podstatně singulární, neboť v opačném případě by existovala konečná nebo nekonečná limita v bodě $z = a$ funkce $g(z)$, a tím i konečná nebo nekonečná limita funkce $f(z)$: $\lim_{z \to a} f(z) = \lim_{z \to a} \left(A + \frac{1}{g(z)} \right)$. Podle právě dokázané první části pak existuje posloupnost bodů z_n konvergující k bodu $z = a$ tak, že $\lim_{n \to \infty} g(z_n) = \infty$. Pro tuto bodovou posloupnost je zřejmě $\lim_{n \to \infty} f(z_n) = A + \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\varrho(z_n)} = A$ a věta je úplně dokázána.

Poznámka. Podobné vlastnosti má reálná funkce $y = \sin \frac{1}{x}$ v okolí bodu $x = 0$. Tak na př. pro bodovou posloupnost $x_n = \frac{1}{4\pi n} \to 0$ má $\lim_{n \to \infty} \sin \frac{1}{x_n} = \lim_{n \to \infty} \sin n\pi = 0$ a pro posloupnost $x_n = \frac{2}{(4n + 1)\,\pi} \to 0$ je $\lim_{n \to \infty} \sin \frac{1}{x_n} = \lim_{n \to \infty} \sin(4n + 1)\,\frac{1}{2}\pi = 1$. Změnou posloupnosti můžeme změnit i hodnotu limity, pro posloupnosti $x_n \to 0$ můžeme předepsat limitě A všechny možné hodnoty intervalu $-1 \leqq A \leqq 1$. Podle Weierstrassovy věty může funkce komplexní proměnné $f(z) = \sin \frac{1}{z}$ pro $z_n \to 0$ nabývat všech možných limitních hodnot.

Funkce, jejichž hlavní část Laurentova rozvoje v bodě $z = a$ má jen konečný počet členů, mají podle vět **[14]** a **[12]** v tomto bodě nepodstatnou singularitu; platí proto zřejmě věta **[16]**.

Věta [16]. *Nutná a postačující podmínka, aby funkce $f(z)$ měla v bodě $z = a$ podstatnou singularitu, je, aby hlavní část jejího Laurentova rozvoje v okolí bodu $z = a$ měla nekonečný počet členů*

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-a)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n. \tag{43}$$

Poznamenejme ještě, že pro určení residua funkce v podstatně singulárním bodě bývá obyčejně nutné stanovit přímo koeficient c_{-1} v rozvoji (43).

Příklad 1. Funkce

$$f(z) = e^{\frac{1}{z}}$$

má v bodě $z = 0$ podstatnou singularitu, neboť už pro reálná $z = x$ neexistuje limita $\lim_{x \to 0} e^{\frac{1}{x}}$ ($\lim_{x \to 0+} e^{\frac{1}{x}} = \infty$, $\lim_{x \to 0-} e^{\frac{1}{x}} = 0$). Laurentův rozvoj v okolí bodu $z = 0$ má tvar

$$e^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!\, z^2} + \frac{1}{3!\, z^3} + \dots$$

(stačí v rozvoji (17) § 51 dosadit $\frac{1}{z}$ místo z). Odtud

$$\operatorname{res} f(0) = 1.$$

Příklad 2. Funkce

$$f(z) = e^{\frac{a}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right)}$$

kde $z = a$ je komplexní konstanta, má v bodě $z = 0$ též podstatnou singularitu. Máme

$$f(z) = e^{\frac{az}{2}} \cdot e^{-\frac{a}{2z}} = \left\{1 + \frac{a}{2} z + \frac{1}{2!}\left(\frac{a}{2}\right)^2 z^2 + \frac{1}{3!}\left(\frac{a}{2}\right)^3 z^3 + \frac{1}{4!}\left(\frac{a}{2}\right)^4 z^4 + \dots\right\} \times$$

$$\times \left\{1 - \frac{a}{2}\frac{1}{z} + \frac{1}{2!}\left(\frac{a}{2}\right)^2 \frac{1}{z^2} - \frac{1}{3!}\left(\frac{a}{2}\right)^3 \frac{1}{z^3} + \frac{1}{4!}\left(\frac{a}{2}\right)^4 \frac{1}{z^4} - \dots\right\},$$

z čehož určíme koeficient při $\frac{1}{z}$:

$$\operatorname{res} f(0) = -\frac{a}{2} + \frac{1}{2!}\left(\frac{a}{2}\right)^3 - \frac{1}{2!\,3!}\left(\frac{a}{2}\right)^5 + \frac{1}{3!\,4!}\left(\frac{a}{2}\right)^7 - \ldots =$$

$$= -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,(n+1)!}\left(\frac{a}{2}\right)^{2n+1} *).$$

§ 69. Rozvoj funkce v okolí nekonečně vzdáleného bodu. Budiž funkce $f(z)$ regulární v jistém okolí nekonečně vzdáleného bodu. Základní definice § 65 zůstávají beze změny, neboť pojem limity je formulován stejně pro $z \to \infty$ jako pro $z \to a \neq \infty$. Nicméně se kriteria pro klasifikaci singulárních bodů (věty **[12]**, **[14]** a **[16]**) změní, jak uvidíme v následujících úvahách.

Dosadíme $z = \frac{1}{Z}$ a

$$f(z) = f\left(\frac{1}{Z}\right) = F(Z),$$

kde funkce $F(Z)$ je regulární v jistém okolí $0 < |Z| < \frac{1}{R}$ bodu $Z = 0$. Charakter singularit funkce $f(z)$ v bodě $z = \infty$ a funkce $F(Z)$ v bodě $Z = 0$ je tentýž (neboť $\lim_{z\to\infty} f(z) = \lim_{Z\to 0} F(Z)$). V případě *odstranitelné singularity* máme tedy

$$f(z) = F(Z) = c_0 + c_1 Z + c_2 Z^2 + \ldots = c_0 + \frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z^2} + \ldots \quad (45)$$

V případě *pólu řádu m*

$$f(z) = F(Z) = \frac{c'_{-m}}{Z^m} + \frac{c'_{-m+1}}{Z^{m-1}} + \ldots + \frac{c'_{-1}}{Z} + \sum_{n=0}^{\infty} c'_n Z_n =$$

$$= c_m z^m + c_{m-1} z^{m-1} + \ldots + c_1 z + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_{-n}}{z^n}, \quad (46)$$

*) Viz R. O. Kuzmin: Besselevy funkcii, ONTI, 1935, str. 40. [Nebo Relton: Applied Bessel Functions, London, 1946. Tabulky Besselových funkcí najde čtenář v již citovaném díle E. Jahnke-F. Emde na str. 90—174 něm. vyd. a str. 224—368 rus. vyd. *Pozn. překl.*]

(kde $c_n = c'_{-n}$) a konečně v případě *podstatné singularity*

$$f(z) = F(Z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c'_{-n}}{Z^n} + \sum_{n=0}^{\infty} c'_n Z^n = \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_{-n}}{z^n} \qquad (47)$$

(kde $c_n = c'_{-n}$).

Vidíme, že v *Laurentově rozvoji v okolí nekonečně vzdáleného bodu* (45), (46) a (47) *hraje roli hlavní části souhrn všech členů s positivními mocniteli a členy s negativními mocniteli hrají roli normální části.*

Poznámka 1. Má-li funkce $f(z)$ v bodě $z = \infty$ odstranitelnou singularitu, klademe obyčejně definitoricky $f(\infty) = \lim_{z \to \infty} f(z)$ a funkce $f(z)$ je regulární v nekonečnu.

Poznámka 2. Liouvilleově větě § 53 můžeme nyní dát trochu jinou formulaci: *Je-li funkce $f(z)$ regulární v uzavřené rovině, je identicky rovna konstantě.*

Důkaz. Protože $f(z)$ je regulární v bodě $z = \infty$, je v jeho okolí ohraničená. Budiž $|f(z)| < M_1$ pro $|z| > R$. S druhé strany, protože je regulární v uzavřeném kruhu $|z| \leqq R$, je tam ohraničená (§ 13). Budiž $|f(z)| < M_2$ pro $|z| \leqq R$. Označíme M větší z čísel M_1, M_2. Pak $|f(z)| < M$ pro všechna z a podle věty Liouvilleovy je identicky rovna konstantě.

Příklad 1. Racionální funkce lomená

$$f(z) = \frac{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_0}{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \ldots + b_0},$$

kde $a_n \neq 0$ a $b_m \neq 0$ je regulární v bodě $z = \infty$ pro $n \leqq m$ (přesněji: má tam nulový bod řádu $m - n$ pro $n < m$) a má v bodě $z = \infty$ pól řádu $n - m$, je-li $m < n$. O tom se snadno přesvědčíme, položíme-li $z = \frac{1}{Z}$ a zkoumáme-li funkci $F(Z) = f\left(\frac{1}{Z}\right)$. Speciálně pro $m = 0$ dostaneme mnohočlen n-tého stupně

$$f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_0,$$

kde $a_n \neq 0$, který má v nekonečnu pól řádu n.

Příklad 2. Známé rozvoje pro funkce e^z, $\cos z$, $\sin z$, $\sinh z$, $\cosh z$ (§ 62) v okolí bodu $z = 0$ můžeme považovat za Laurentovy rozvoje v okolí bodu $z = \infty$. Jelikož všechny tyto rozvoje mají nekonečně

mnoho členů s positivními exponenty, mají všechny tyto funkce v bodě $z = \infty$ podstatnou singularitu.

Naproti tomu je funkce $e^{\frac{1}{z}}$ regulární v bodě $z = \infty$, neboť její Laurentův rozvoj v okolí bodu $z = \infty$ (viz př. 1 předchozího paragrafu) nemá žádné členy s positivními exponenty.

Příklad 3. Funkce $f(z) = \dfrac{1}{\sin z}$ má v bodě $z = \infty$ neisolovaný singulární bod, neboť póly $z_k = k\pi$ této funkce jsou nakupeny v nekonečnu ($\lim\limits_{k\to\infty} z_k = \infty$).

V závěru uvedeme ještě poznámku o residuu funkce v nekonečně vzdáleném bodě.

Definice. Budiž $f(z)$ regulární v jistém okolí bodu $z = \infty$. *Residuem* této *funkce v bodě* $z = \infty$ budeme pak nazývat integrál

$$\operatorname{res} f(\infty) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C^{-1}} f(z)\,dz, \tag{48}$$

kde C^{-1} je kružnice $|z| = \varrho$, $\varrho > R$, proběhnutá v záporném smyslu (tak, aby bod $z = \infty$ zůstal vlevo). Integrál (48) je zřejmě nezávislý na ϱ pro $\varrho > R$ (§ 47).

Z definice plyne další věta:

Věta [17]. *Má-li funkce $f(z)$ v úplné komplexní rovině konečný počet singulárních bodů, je součet jejich residuí roven nule.*

Důkaz. Nechť $z_1, z_2, z_3, \ldots, z_p$ jsou konečné singulární body ležící v kružnici C. Pak podle Cauchyho residuové věty (§ 48) máme

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{C} f(z)\,dz + \frac{1}{2\pi i} \oint_{C^{-1}} f(z)\,dz = \\ &= \operatorname{res} f(z_1) + \operatorname{res} f(z_2) + \ldots + \operatorname{res} f(z_p) + \operatorname{res} f(\infty). \end{aligned} \tag{49}$$

Na konec ještě jedna poznámka.

Věta [18]. Residuum funkce $f(z)$ v bodě $z = \infty$ je rovno koeficientu při z^{-1} v Laurentově rozvoji v okolí bodu $z = \infty$ s opačným znaménkem.

Důkaz. Budiž $f(z)$ regulární pro $R < |z| < \infty$. Pak její Laurentova řada konverguje stejnoměrně na kružnici $|z| = \varrho$ pro $\varrho > R$ (v rozvoji je jen konečný počet $c_n \neq 0$, viz § 64). Integrujeme podél C v kladném smyslu oběhu člen po členu:

$$\operatorname{res} f(\infty) = -\frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)\,dz = -\frac{1}{2\pi i}\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \oint_C z^n dz,$$

ale na pravé straně bude podle § 50 různý od nuly jen integrál

$$\oint_C \frac{dz}{z}.$$

Konečně dostáváme

$$\operatorname{res} f(\infty) = -c_{-1}. \tag{50}$$

Tím je věta dokázána.

Poznámka. Podobnost této věty s větou **[11]** § 65 je jen vnější; mezi oběma je podstatný rozdíl. Spočívá v tom, že zde člen c_{-1} náleží do normální a nikoliv hlavní části Laurentova rozvoje a $\operatorname{res} f(\infty)$ *může být různé od nuly i tehdy, je-li $f(z)$ regulární v bodě $z = \infty$.*

Příklad. Mějme

$$I = \oint_{|z|=4} \frac{z^{15}\,dz}{(z^2+1)^2\,(z^4+2)^3}.$$

Výpočet reziduí v konečných singulárních bodech je značně obtížný; proto použijeme (48) a máme

$$I = -\operatorname{res} f(\infty)\,.\,2\pi i.$$

V bodě $z = \infty$ má $f(z)$ nulový bod řádu $n = 1$. Normální část jeho rozvoje bude tedy začínat členem $\frac{1}{z}$. Tedy $c_{-1} = -\operatorname{res} f(\infty) = 1$ a $I = -1$.

§ 70. Žukovského věta o vztlaku. Vraťme se k úloze o úplném obtékání, probírané již v § 44. Budeme hledat komplexní potenciál proudění kolem uzavřeného konečného profilu C s danou hodnotou cirkulace Γ a s danou rychlostí proudění v nekonečnu V_∞. Jako řešení této úlohy jsme našli (vzorec 74)

$$w = \Phi(z) = \overline{V}_\infty g(z) + \frac{V_\infty R^2}{g(z)} + \frac{\Gamma}{2\pi i} \operatorname{Ln} g(z), \tag{51}$$

kde $\zeta = g(z)$ je funkce zprostředkující konformní zobrazení vnějšku profilu C na vnějšek kruhu $|\zeta| < R$ s okrajovými podmínkami

$$g(\infty) = \infty, \; g'(\infty) = 1,$$

ale nedokázali jsme jednoznačnost tohoto řešení.

Budeme zkoumat jednoznačnost řešení úlohy o úplném obtékání. Nechť je z počátku profil C kružnicí $|\zeta| = R$ v rovině ζ. Řešení úlohy je pak dáno vzorcem

$$w = \varphi(\zeta) = \overline{V}_\infty \zeta + \frac{V_\infty R^2}{\zeta} + \frac{\Gamma}{2\pi i} \operatorname{Ln}\zeta. \tag{52}$$

Budiž $w = \varphi_1(\zeta)$ druhé řešení této úlohy. Derivace $\varphi_1'(\zeta)$ definuje vektor rychlosti pole ($\boldsymbol{V} = \overline{\varphi_1'(\zeta)}$ viz § 39) a je tedy jednoznačná a regulární pro $R < |\zeta| < \infty$. Pro $\zeta \to \infty$ konverguje $\varphi_1'(\zeta)$ podle předpokladu ke konečné veličině $\overline{V}_\infty$. Má tedy v bodě $\zeta = \infty$ odstranitelnou singularitu a její Laurentův rozvoj v okolí bodu $\zeta = \infty$ bude mít tvar

$$\varphi_1'(\zeta) = \overline{V}_\infty + \frac{c_{-1}}{\zeta} + \frac{c_{-2}}{\zeta^2} + \frac{c_{-3}}{\zeta^3} + \dots \tag{53}$$

Podle věty **[9]** tento rozvoj platí pro všechna $|\zeta| > R$, neboť $\varphi_1(\zeta)$ je pro tato ζ regulární. Cirkulace rychlosti proudění definovaného funkcí $w = \varphi_1(\zeta)$ má být podle předpokladu podél kružnice $|\zeta| = R$ rovna Γ a tok touto konturou se má zřejmě rovnat nule. Pak podle (22) § 48 (kde položíme $Q = 0$) je

$$\Gamma = \oint_{C^*} \varphi_1(\zeta)\, \mathrm{d}\zeta = 2\pi i c_{-1},$$

kde C^* je libovolná křivka, ležící vně naší kružnice. Odtud snadno vypočteme $c_{-1} = \dfrac{\Gamma}{2\pi i}$. Integrujeme-li (53) a vypustíme-li nepodstatnou adiční konstantu, dostaneme

$$\varphi_1(\zeta) = \overline{V}_\infty \zeta + \frac{\Gamma}{2\pi i} \operatorname{Ln}\zeta - \frac{c_{-2}}{\zeta} - \frac{c_{-3}}{2\zeta^2} - \dots \tag{54}$$

Podle definice obtékání na kružnici $|\zeta| = R$ musí být $\operatorname{Im} \varphi_1(\zeta) = \text{const}$, odkud, položíme-li $\zeta = Re^{it} = R\cos t + iR\sin t$, $c_k = \alpha_k + i\beta_k$, $V_\infty = V_x + iV_y$, dostaneme

$$RV_x \sin t - RV_y \cos t - \frac{\Gamma}{2\pi} \ln R + \frac{\beta_{-2}\cos t - \alpha_{-2}\sin t}{R} + \\ + \frac{\beta_{-3}\cos 2t - \alpha_{-3}\sin 2t}{2R^2} + \ldots = \text{const}$$

čili

$$A + \left(\frac{\beta_{-3}}{R} - RV_y\right)\cos t + \left(RV_x - \frac{\alpha_{-2}}{R}\right)\sin t + \\ + \frac{\beta_{-2}}{2R^2}\cos 2t - \frac{\alpha_{-3}}{2R^2}\sin 2t + \ldots = 0,$$

kde A je blíže neurčená konstanta. Protože poslední vztah platí pro všechna t identicky, jsou všechny jeho koeficienty nalevo rovny nule a je:*)

$$A = 0, \quad \frac{\beta_{-2}}{R} - RV_y = 0, \quad RV_x - \frac{\alpha_{-2}}{R} = 0,$$

$$\beta_{-k} = \alpha_{-k} = 0 \quad (k \geqq 3).$$

Odtud

$$c_{-2} = \alpha_{-2} + i\beta_{-2} = R^2 V_x + iR^2 V_y = R^2 V_\infty,$$

$$c_{-k} = \alpha_{-k} + i\beta_k = 0 \quad (k \geqq 3)$$

a rozvoj (54) je shodný s (52). Tedy $\varphi_1(\zeta) \equiv \varphi(\zeta)$ a pro speciální případ vnějšku kruhu $|\zeta| > R$ je jednoznačnost řešení dokázána.

Obrátíme se nyní k obecnému případu libovolného profilu C. Budiž $w = \Phi_1(z)$ řešení naší úlohy. Budiž $z = h(\zeta)$ funkce inversní k funkci $\zeta = g(z)$, zprostředkující konformní zobrazení vnějšku kružnice $|\zeta| > R$ na vnějšek profilu C za počátečních podmínek

$$h(\infty) = \infty, \quad h'(\infty) = \frac{1}{g'(\infty)} = 1.$$

*) Poslední vztah představuje rozvoj funkce identicky rovné nule ve Fourierovu řadu. Z jednoznačnosti takového rozvoje však plyne, že všechny jeho koeficienty musí být rovny nule.

Jak je poznamenáno v poznámce pod čarou na str. 149, jsou funkce $g(z)$ a tedy i $h(\zeta)$ jednoznačně určeny. Sestrojíme dále funkci

$$w = \Phi_1[h(\zeta)] = \varphi_1(\zeta),$$

která je analytická pro $R < |\zeta| < \infty$ a která tedy může být považována za komplexní potenciál jistého rovinného proudění v rovině ζ. Na kružnici $|\zeta| = R$ je

$$\operatorname{Im} \varphi_1(\zeta) = \operatorname{Im} \Phi_1(z) = \text{const},$$

neboť body kružnice se při zobrazení $z = h(\zeta)$ zobrazí na body profilu C a $\Phi(z)$ podle předpokladu řeší obtékání profilu C. Tímto způsobem $w = \varphi_1(\zeta)$ řeší obtékání kružnice $|\zeta| = R$. Cirkulace rychlosti proudění je

$$\Gamma_1 = \oint_{C_1^*} \varphi_1'(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta = \oint_{C_1^*} \Phi_1'[h(\zeta)]\,h'(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta = \oint_{C^*} \Phi_1'(z)\,\mathrm{d}z,$$

kde C_1^* je libovolná uzavřená křivka vně kružnice $|\zeta| = R$ v rovině ζ a C^* její obraz při zobrazení $z = h(\zeta)$. Tento obraz je zřejmě uzavřený a leží vně profilu C. Podle předpokladu se integrál napravo a tedy i Γ_1 rovná Γ. Kromě toho rychlost proudění v nekonečnu je

$$\overline{\varphi_1'(\infty)} = \overline{\Phi_1(\infty)}\;\overline{h'(\infty)} = V_\infty.$$

Funkce $w = \varphi_1(z)$ tedy řeší obtékání kružnice $|\zeta| = R$ a podle toho, co bylo výše dokázáno, je shodná s funkcí $w = \varphi(z)$ z (52). Potom však $\Phi_1(z) = \varphi(\zeta) = \varphi[g(z)]$ je totožná s funkcí $\Phi(z)$ z (51) a věta je dokázána.

Zbývá stanovit velikost *vztlaku* $\boldsymbol{P}$ na obtékaném profilu C. Podle Čaplyginova vzorce (25) § 48 se velikost komplexně sdružené veličiny vztlaku $\boldsymbol{P}$ rovná

$$\overline{\boldsymbol{P}} = \frac{\mathrm{i}\varrho}{2} \oint_{C^*} [\Phi'(z)]^2\,\mathrm{d}z,$$

kde C^* je libovolná uzavřená křivka vně profilu C. Přepíšeme si tuto formuli pomocí residua funkce $[\Phi'(z)]^2$ v bodě $z = \infty$.

Derivace komplexního potenciálu úplného obtékání je regulární vně profilu C a v okolí bodu $z = \infty$ má Laurentův rozvoj

$$\Phi'(z) = \overline{V}_\infty + \frac{c_1}{z} + \frac{c_{-2}}{z^2} + \ldots$$

(To bylo dokázáno na počátku paragrafu pro speciální případ kružnice, ale důkaz se provede stejným způsobem i pro obecný případ.) Uvažme dále, že cirkulace rychlosti proudění je

$$\Gamma = \oint_{C^*} \Phi'(z)\,\mathrm{d}z = c_{-1} 2\pi\mathrm{i},$$

odkud $c_{-1} = \dfrac{\Gamma}{2\pi\mathrm{i}}$. A dále

$$[\Phi'(z)]^2 = \left(\overline{V}_\infty + \frac{\Gamma}{2\pi\mathrm{i}z} + \frac{c_{-2}}{z^2} + \dots\right)^2 =$$

$$= \overline{V}_\infty^2 + \frac{\overline{V}_\infty \Gamma}{\pi\mathrm{i}z} + \frac{c'_{-2}}{z^2} + \dots,$$

kde $c'_{-2}, \dots$ jsou blíže neurčené konstanty, a residuum funkce $[\Phi'(z)]^2$ v bodě $z = \infty$ je $\dfrac{\overline{V}_\infty \Gamma}{\pi\mathrm{i}}$. Tedy konečně

$$\overline{\boldsymbol{P}} = \frac{\mathrm{i}\varrho}{2} 2\pi\mathrm{i} \frac{\overline{V}_\infty \Gamma}{\pi\mathrm{i}} = \mathrm{i}\varrho\Gamma\overline{\boldsymbol{V}}_\infty.$$

Přejdeme-li ke komplexně sdruženým veličinám, dostáváme hledaný výsledek

$$\boldsymbol{P} = -\mathrm{i}\varrho\Gamma\boldsymbol{V}_\infty, \tag{55}$$

který je obsahem věty Žukovského:

Velikost vztlaku na obtékaném profilu je rovna součinu cirkulace, hustoty a rychlosti v nekonečnu a směr vztlaku je kolmý na vektor rychlosti v nekonečnu (pro $\Gamma > 0$ ve směru hodinových ručiček, pro $\Gamma < 0$ proti směru hodinových ručiček).

Bude-li mít profil C ostrou hranu, bude na hraně podle Čaplygina bod sjednocení proudění vyšinuto a podle (73) § 41

$$\Gamma = 4\pi v_\infty R \sin(\varphi_0 - \Theta), \tag{56}$$

kde $v_\infty = |V_\infty|$, $\Theta = \arg V_\infty$ a φ_0 je argument obrazu bodu sjednocení proudění při zobrazení $\zeta = g(z)$ vnějšku profilu C na vnějšek kružnice $|\zeta| > R$ s okrajovými podmínkami $g(\infty) = \infty$, $g'(\infty) = 1$. Vzorec pro absolutní velikost vztlaku má pak tvar

$$P = |\boldsymbol{P}| = 4\pi\varrho R v_\infty^2 |\sin(\varphi_0 - \Theta)|. \tag{57}$$

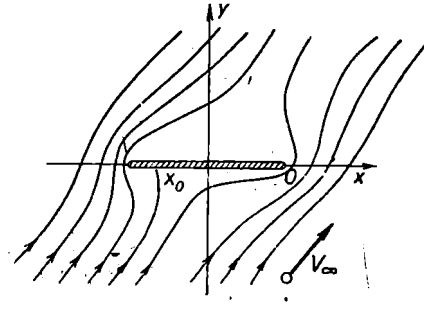
Příklad. *Obtékání rovinné destičky*, která má v rovině (z) stopu $-a \leqq x \leqq a$ na ose x (obr. 106). Funkce $\zeta_1 = \frac{z}{a}$ zobrazí tuto úsečku na jednotkovou, $\zeta_2 = \zeta_1 + \sqrt{\zeta_1^2 - 1} = \frac{z + \sqrt{z^2 - a^2}}{a}$ ji zobrazí na vnějšek jednotkového kruhu (§ 26). Derivace poslední funkce v bodě $z = \infty$ je

$$\left.\frac{\mathrm{d}\zeta_2}{\mathrm{d}z}\right|_{z=\infty} = \frac{1}{a}\left(1 + \frac{z}{\sqrt{z^2 - a^2}}\right)\Bigg|_{z=\infty} = \frac{2}{a}.$$

Za funkci $\zeta = g(z)$ tedy volíme

$$\zeta = g(z) = \frac{a}{2}\zeta_2 = \frac{z + \sqrt{z^2 - a^2}}{2};$$

poloměr kruhu, na který tato funkce zobrazí vnějšek úsečky, bude $R = \frac{1}{2}a$. Komplexní potenciál (51) má tvar



Obr. 106.

$$w = \Phi(z) = \frac{\overline{V}_\infty}{2}(z + \sqrt{z^2 - a^2}) + \frac{\overline{V}_\infty a^2}{2(z + \sqrt{z^2 - a^2})} + \frac{\Gamma}{2\pi i}\operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 - a^2}).$$

Avšak

$$\frac{1}{z + \sqrt{z^2 - a^2}} = \frac{z - \sqrt{z^2 - a^2}}{a^2}, \quad V_\infty = v_\infty e^{i\Theta}, \text{ a tedy}$$

$$w = \Phi(z) = v_\infty(z\cos\Theta - i\sqrt{z^2 - a^2}\sin\Theta) + \frac{\Gamma}{2\pi i}\operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 - a^2}).$$

Předpokládejme nyní ještě podle Čaplygina (§ 44), že pravý konec úsečky $z_0 = a$ je bodem sjednocení proudění. Funkce $\zeta = g(z)$ ho zobrazí do bodu $\zeta_0 = \frac{1}{2}a$, $\varphi_0 = \arg\zeta_0 = 0$ a podle (56)

$$\Gamma = 4\pi v_\infty R\sin(\varphi_0 - \Theta) = -2\pi v_\infty a\sin\Theta.$$

Komplexní potenciál má tedy konečně tento tvar:

$$w = \Phi(z) = v_\infty[z\cos\Theta - \mathrm{i}\sqrt{z^2 - a^2}\sin\Theta + \mathrm{i}a\sin\Theta\,\mathrm{Ln}(z + \sqrt{z^2 - a^2})],$$

a jeho derivace

$$\overline{V} = \Phi'(z) = v_\infty\left\{\cos\Theta - \mathrm{i}\sin\Theta\,\frac{z - a}{\sqrt{z^2 - a^2}}\right\} =$$

$$= v_\infty\left\{\cos\Theta - \mathrm{i}\sin\Theta\,\sqrt{\frac{z - a}{z + a}}\right\}.$$

Na úsečce $-a \leqq x \leqq a$ je reálná rychlost

$$V = \overline{\Phi'(x)} = v_\infty\left\{\cos\Theta \pm \sin\Theta\,\sqrt{\frac{a - x}{a + x}}\right\}.$$

Z poslední rovnice se snadno najde kritický bod proudění. Máme

$$\frac{a - x_0}{a + x_0} = \mathrm{cotg}^2\Theta,$$

odkud

$$x_0 = -a\cos^2\Theta,$$

kde a je bod rozvětvení proudění. Bod sjednocení proudění není zřejmě kritickým bodem proudění, neboť je na ostré hraně obtékaného profilu (§ 44). Proudnice proudění jsou zakresleny na obr. 106. Vztlak účinkující na destičku je roven podle (57)

$$\boldsymbol{P} = 2\pi a\varrho v_\infty^2\sin\Theta e^{\mathrm{i}\Theta}$$

a jeho *modul*

$$P = |\boldsymbol{P}| = 2\pi a\varrho v_\infty^2\,|\sin\Theta|$$

je úměrný sinu úhlu proudění Θ.

§ 71. Jednodušší třídy analytických funkcí. Definice. Funkce $f(z)$ regulární v celé konečné rovině se nazývá *celistvá*.

Rozvineme $f(z)$ v Taylorovu řadu v okolí bodu $z = 0$:

$$f(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots + c_n z^n + \ldots \tag{32}$$

Podle věty **[6]** § 62 tato řada konverguje pro všechna konečná z a (32) je i jejím Laurentovým rozvojem v okolí bodu $z = \infty$.

Odtud vidíme: 1. je-li celistvá funkce regulární v bodě $z = \infty$, je konstantní: $f(z) \equiv c_0$; 2. jestliže je bod $z = \infty$ jejím pólem řádu n, je $f(z)$ mnohočlen stupně n-tého; 3. je-li bod $z = \infty$ podstatně singulární pro celistvou funkci $f(z)$, nazýváme ji *celistvou transcendentní funkcí*. Mezi tyto funkce patří na př. e^z, $\sin z$, $\cos z$.

Definice. Funkce, jejíž všechny konečné singularity jsou póly, se nazývá *meromorfní*.

Poznamenejme ještě, že v libovolné uzavřené části roviny má meromorfní funkce pouze konečný počet pólů. V celé konečné rovině může být počet pólů i nekonečně veliký. Funkce meromorfní jsou na př.: $\frac{1}{\sin z}$, $\operatorname{tg} z$, $\operatorname{cotg} z$.

Dokážeme následující větu:

Věta [18]. Meromorfní funkce $f(z)$, která má v celé konečné rovině konečný počet pólů, je racionální funkce lomená.

Důkaz. Budiž $a_1, a_2, \ldots, a_p$ konečný počet pólů. Buďtež

$$g_1(z) = \frac{c_{-m_1}^{(1)}}{(z-a_1)^{m_1}} + \frac{c_{-m_1+1}^{(1)}}{(z-a_1)^{m_1-1}} + \ldots + \frac{c_{-1}^{(1)}}{z-a_1},$$

$$g_2(z) = \frac{c_{-m_2}^{(2)}}{(z-a_2)^{m_2}} + \frac{c_{-m_2+1}^{(2)}}{(z-a_2)^{m_2-1}} + \ldots + \frac{c_{-1}^{(2)}}{z-a_2} \text{ a}$$

$$g_p(z) = \frac{c_{-m_p}^{(p)}}{(z-a_p)^{m_p}} + \frac{c_{-m_p+1}^{(p)}}{(z-a)^{m_p-1}} + \ldots + \frac{c_{-1}^{(p)}}{z-a_p}$$

hlavní části Laurentových rozvojů v okolí těchto pólů. Budiž ještě

$$g(z) = A_1 z + A_2 z^2 + \ldots + A_m z^m$$

hlavní část Laurentova rozvoje funkce $f(z)$ v okolí bodu $z = \infty$ (je-li $f(z)$ regulární v $z = \infty$, nemusíme tuto funkci uvažovat).

Označme

$$\varphi(z) = f(z) - g_1(z) - g_2(z) - g_3(z) - \ldots - g_p(z) - g(z).$$

Tato funkce je regulární ve všech konečných bodech kromě $z = a_k$ (je to součet regulárních funkcí). V každém z bodů $z = a_k$ má odstranitelnou singularitu, neboť podle konstrukce funkcí $g_k(z)$ hlavní část jejího Laurentova rozvoje neexistuje (hlavní část rozvoje funkce $f(z)$

v bodě $z = a_k$ se vyruší s $g_k(z)$ a ostatní funkce $g_{k'}(z)$ pro $k' \neq k$ jsou v bodě $z = a_k$ regulární). Totéž platí i pro bod $z = \infty$. Doplníme-li vhodným způsobem definitoricky funkci $\varphi(z)$ v bodech $z = a_k$ a $z = \infty$, dostaneme funkci regulární v úplné rovině z. Ta je podle poznámky 2 § 69 identicky rovna konstantě. Budiž $\varphi(z) \equiv A_0$. Pak

$$f(z) = A_0 + g(z) + \sum_{n=1}^{p} g_k(z) = A_0 + A_1 z + \ldots + A_m z^m + \\ + \frac{c_{-m_1}^{(1)}}{(z - a_1)^{m_1}} + \frac{c_{-m_1+1}^{(1)}}{(z - a_1)^{m_1-1}} + \ldots + \frac{c_{-1}^{(1)}}{z - a_1} + \ldots + \tag{33}$$
$$+ \frac{c_{-m_p}^{(p)}}{(z - a_p)^{m_p}} + \frac{c_{-m_p+1}^{(1)}}{(z - a_p)^{m_p-1}} + \ldots + \frac{c_{-1}^{(p)}}{z - a_p},$$

čímž je naše věta dokázána.

Poznámka 1. Vzorec (33) nám dává rozklad racionální lomené funkce v parciální zlomky a celistvou část, známý z integrálního počtu. Důkaz věty nám dává elegantní použití tohoto vzorce při výpočtu integrálů racionální funkce lomené.

Poznámka 2. Sloučíme-li v (33) všechny zlomky, dostaneme jako výsledek podíl dvou mnohočlenů (dvou celistvých racionálních funkcí). Každá racionální lomená funkce se tedy dá vyjádřit jako podíl dvou racionálních funkcí celistvých.

ÚLOHY

1. V jakém oboru absolutně konvergují řady a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$; b) $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nz +$ $+ b_n \sin nz$), kde a_n, b_n jsou komplexní (komplexní tvar Fourierovy řady)?
2. Stanovte poloměr konvergence řad a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z}{n}\right)^n$, b) $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\ln n} z^n$.
3. Najděte Taylorův rozvoj všech větví funkcí a) $\sqrt[3]{z}$, b) $\operatorname{Ln} z$ v okolí bodu $z = \mathrm{i}$.
4. Najděte první tři členy Taylorova rozvoje té větve funkce $f(z) = (1 + z)^{\frac{1}{z}}$ v okolí bodu $z = 0$, pro niž $f(0) = \mathrm{e}$.
5. Dokažte, že kružnice $|z| = 1$ je hranicí existenčního oboru řady $\sum_{n=1}^{\infty} z^{2^n}$

6. Jsou následující funkce jednoznačné nebo mnohoznačné?

a) $\sqrt{e^z}$, b) $\sqrt{\cos z}$, c) $\cos\sqrt{z}$, d) $\sqrt{1-\sin^2 z}$, e) $\dfrac{\sin\sqrt{z}}{\sqrt{z}}$, f) $\operatorname{Ln} e^z$, g) $\operatorname{Ln}\sin z$?

7. Koeficient při n-té mocnině z v Taylorově rozvoji funkce $f(z) = \dfrac{4-z^2}{4-4zt+z^2}$ $(-1 \leqq t \leqq 1)$ v okolí bodu $z = 0$ se nazývá Čebyševův polynom (symbol $T_n(t)$). Dokažte:

$$T_n(t) = \frac{1}{2^{n-1}} \cos(n \arccos t).$$

8. Najděte Fourierův rozvoj funkcí ($|a| < 1$):

a) $\dfrac{a \sin t}{1 - 2a\cos t + a^2}$, b) $\ln(1 - 2a\cos t + a^2)$.

9. Rozveďte v Laurentovu řadu v okolí bodu $z = \infty$ funkce:

a) $\sin\dfrac{1}{1-z}$, b) $\sqrt{(z-1)(z-2)}$, c) $\operatorname{Ln}\dfrac{1}{1-z}$, d) $\operatorname{Ln}\dfrac{a-z}{b-z}$.

10. Koeficient při n-té mocnině z v Laurentově rozvoji funkce $f(z) = e^{\frac{t}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)}$ v okolí bodu $z = \infty$ se nazývá Besselova funkce řádu n (symbol $J_n(t)$). Odvoďte vyjádření Besselovy funkce v integrálním tvaru a odvoďte její rozvoj v potenční řadu.

11. Nulové body funkce $f(z) = \sin\dfrac{1}{1-z}$, $z_k = 1 - \dfrac{1}{k\pi}$, $k = 1, 2, \ldots$ tvoří bodovou posloupnost, konvergující k bodu $z = 1$. Funkce $f(z)$ není identicky rovna nule. Proč není tento výsledek v rozporu s větou o jednoznačnosti § 62?

12. Jaký je rozdíl v rozvoji v řadu v okolí bodu $z = 0$ funkce

a) reálné proměnné $y = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} \text{ pro } x \neq 0 \\ 0 \text{ pro } x = 0 \end{cases}$

b) funkce komplexní proměnné $w = \begin{cases} e^{-\frac{1}{z^2}} \text{ pro } z \neq 0 \\ 0 \text{ pro } z = 0? \end{cases}$

13. Ověřte přímým výpočtem větu Weirstrassovu (§ 68) pro funkci $w = \sin z$ v okolí bodu $z = \infty$ tím, že dokážete, že pro libovolné komplexní $A \neq \infty$, body pro něž $\sin z = A$, tvoří bodovou posloupnost konvergující k bodu $z = \infty$.

14. Jaké sigularity mají funkce:

a) $\dfrac{e^{\frac{1}{z-1}}}{e^z - 1}$, b) $\dfrac{1}{\sin z + \cos z}$, c) $\dfrac{1 - e^z}{1 + e^z}$, d) $z^2 e^{-z}$?

15. Pro jaké a bude jednoznačná funkce

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} e^{z} \left(\frac{1}{z} + \frac{a}{z^3} \right) dz?$$

16. Najděte residua těchto funkcí v jejich singulárních bodech:

a) $\frac{1}{\sin z}$ $(z \neq \infty)$, b) $\frac{z^{2n}}{1 + z^n}$, c) $\frac{z^{2n}}{(1 + z)^n}$, d) $\cos z - \sin z$, e) $z^n e^z$, f) $\frac{e^z}{1 + z}$,

g) $e^z \ln \frac{z - a}{z - b}$.

17. Stanovte tok a cirkulaci rychlosti proudění s komplexním potenciálem $\Phi(z) = \operatorname{arctg}^2 z$ podél kružnice $|z - e^{i\frac{\pi}{4}}| = 1$.

18. Najděte sumární náboj rozprostřený v kruhu $|z| < n + \frac{1}{2}$, je-li potenciál pole $F(z) = 2qi \operatorname{Ln} \frac{1}{\sin \pi z}$.

POUŽITÍ THEORIE RESIDUÍ.

§ 72. Výpočet integrálů typu $\int_0^{2\pi} R(\sin x, \cos x)\,dx$, kde $R(x)$ je racionální lomená funkce. Předpokládejme, že $R(\sin x, \cos x)$ je spojitá funkce argumentu x v intervalu $\langle 0, 2\pi\rangle$. Methodu výpočtu vysvětlíme na jednotlivých typických příkladech.

Příklad 1.

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{1 - 2p\cos x + p^2}, \quad 0 < p < 1.$$

Položíme

$$e^{ix} = z \tag{1}$$

tedy $ix = \ln z$, $dx = \frac{dz}{iz}$, $\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$, a pro interval $0 \leqq x \leqq 2\pi$ oběhne bod z jednotkovou kružnici. Tedy

$$I = \oint_{|z|=1} \frac{dz}{iz\left(1 - pz - \frac{p}{z} + p^2\right)} = \oint_{|z|=1} \frac{i\,dz}{pz^2 - (p^2+1)z + p}.$$

Integrand má dva póly, které určíme z rovnice

$$pz^2 - (p^2+1)z + p = 0,$$

odkud máme ihned $z_1 = p$, $z_2 = \frac{1}{p}$. Z obou pólů jen pól z_1 leží uvnitř jednotkové kružnice a tedy podle Cauchyho residuové věty (§ 48)

$$I = i\oint_{|z|=1} \frac{dz}{pz^2 - (p^2+1)z + p} = i[2\pi i \operatorname{res} f(z_1)].$$

Residuum funkce za integračním znaménkem v bodě $z = z_1$ vypočteme podle vzorce (42) § 67:

$$\operatorname{res} f(z_1) = \frac{1}{[pz^2 - (p^2+1)z + p]'_{z=p}} = \frac{1}{p^2 - 1}.$$

Takže

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}x}{1 - 2p\cos x + p^2} = -2\pi \frac{1}{p^2 - 1} = 2\pi \frac{1}{1 - p^2}. \qquad (2)$$

Poznamenejme ještě, že se integrál snadno vyčíslí pomocí Poissonova integrálu (60) § 56, položíme-li $\psi = x$, $\varphi = 0$, $R = 1$, $r = p$, $U(\psi) = \frac{1}{1 - p^2}$.

Příklad 2. Toutéž substitucí (1) je též řešitelný integrál

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}x}{(p + q\cos x)^2} = \oint_{|z|=1} \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}z\left\{p + \frac{q}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)\right\}^2} =$$

$$= -\mathrm{i} \oint_{|z|=1} \frac{z\,\mathrm{d}z}{\left\{\frac{q}{2}z^2 + pz + \frac{q}{2}\right\}^2}.$$

Integrand má póly druhého řádu v bodech $z_1 = \frac{1}{q}(-p + \sqrt{p^2 - q^2})$, $z_2 = \frac{1}{q}(-p - \sqrt{p^2 - q^2})$. Budiž $p > q > 0$; pak pól z_2 leží vně jednotkové kružnice. Residuum c_{-1} v bodě z_1 se vypočte pomocí vzorce (40) § 67, položíme-li $m = 2$. Uvážíme-li, že

$$\tfrac{1}{2}qz^2 + pz + \tfrac{1}{2}q = \tfrac{1}{2}q(z - z_1)(z - z_2),$$

dostaneme

$$c_{-1} = \lim_{z \to z_1} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left\{\frac{z(z - z_1)^2}{\frac{1}{4}q^2(z - z_1)^2(z - z_2)^2}\right\} = \left[\frac{4}{q^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\frac{z}{(z - z_2)^2}\right]_{z = z_1} =$$

$$= -\frac{4}{q^2}\frac{z_1 + z_2}{(z_1 - z_2)^3} = \frac{p}{(p^2 - q^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Podle residuové věty dostáváme hledaný výsledek:

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}x}{(p + q\cos z)^2} = -\mathrm{i}2\pi\mathrm{i}c_{-1} = \frac{2\pi p}{(p^2 - q^2)^{\frac{3}{2}}};\ p > q > 0. \qquad (3)$$

Analogicky se vypočtou i integrály podobných typů.

Příklad 3. K výpočtu integrálu

$$I = \int_0^{\pi} \operatorname{cotg}(x - a)\,\mathrm{d}x,$$

kde $a = \alpha + \mathrm{i}\beta$, $\beta \neq 0$ (pro $\beta = 0$ integrál diverguje), použijeme substituce

$$\boxed{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}(x-a)} = z.}$$

Vypočteme ještě $\mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{d}z}{2\mathrm{i}z}$, $\operatorname{cotg}(x - a) = \mathrm{i}\,\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(x-a)} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(x-a)}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(x-a)} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(x-a)}} = \mathrm{i}\,\dfrac{z+1}{z-1}$.

Mění-li se x v intervalu 0 do π, obíhá bod z kružnici

$$|z| = |\mathrm{e}^{2\beta + 2\mathrm{i}(x-a)}| = \mathrm{e}^{2\beta}.$$

Tedy

$$I = \oint_{|z| = \mathrm{e}^{2\beta}} \mathrm{i}\,\frac{z+1}{z-1}\,\frac{\mathrm{d}z}{2\mathrm{i}z} = \frac{1}{2}\oint_{|z| = \mathrm{e}^{2\beta}} \frac{z+1}{z-1}\,\frac{\mathrm{d}z}{z}.$$

Pro $\beta > 0$ je poloměr kružnice $\mathrm{e}^{2\beta} > 1$; tedy uvnitř leží oba póly integrandu $z_1 = 0$, $z_2 = 1$. Oba tyto póly jsou prvého řádu a příslušná residua vypočteme podle (42) § 67; dostaneme

$$r_1 = \frac{\varphi(0)}{\psi'(0)} = -1, \quad r_2 = \frac{\varphi(1)}{\psi'(1)} = 2$$

(v prvém případě jsme dosadili $\varphi(z) = \dfrac{z+1}{z-1}$, $\psi(z) = z$, ve druhém $\varphi(z) = \dfrac{z+1}{z}$, $\psi(z) = z - 1$). Pro $\beta < 0$ je poloměr kružnice $\mathrm{e}^{2\beta} < 1$. Uvnitř tedy leží jen jeden pól integrandu, a to pól $z_1 = 0$ s residuem $r_1 = -1$, takže konečně pro $\beta > 0$ $I = \frac{1}{2}2\pi\mathrm{i}(r_1 + r_2) = \pi\mathrm{i}$ a pro $\beta < 0$ $I = \frac{1}{2}2\pi\mathrm{i}r_1 = -\pi\mathrm{i}$.

Oba příklady můžeme shrnout v jeden a píšeme

$$I = \int_0^{\pi} \operatorname{cotg}(x - a)\,\mathrm{d}x = \pi\mathrm{i}\,\operatorname{sign}\beta, \quad \operatorname{Im} a = \beta \neq 0, \tag{4}$$

kde $\operatorname{sign}\beta$ je znaménko β a rovná se $+1$ pro $\beta > 0$ a -1 pro $\beta < 0$.

§ 73. Integrály typu $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} R(x) \begin{Bmatrix} \sin \\ \cos \end{Bmatrix} \alpha x\,\mathrm{d}x$, kde $R(x)$ je racionální lo-

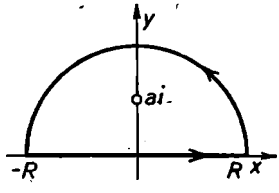
mená funkce argumentu x. Nejprve se budeme zabývat výpočtem integrálů, kde goniometrická funkce vypadla:

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\,\mathrm{d}x. \tag{5}$$

Pro konvergenci integrálu (5) je nutno učinit tyto předpoklady: Funkce $R(x)$ je pro všechny hodnoty x spojitá a stupeň čitatele je nejméně o dvě menší než stupeň jmenovatele. Není-li totiž splněn poslední předpoklad, integrál (5) diverguje.

Příklad 1. Pro výpočet integrálu

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2 + a^2)^3}$$



Obr. 107.

zvolíme za integrační cestu úsečku $(-R_1, R)$ reálné osy a horní půlkružnici $|z| = R$ (obr. 107) a budeme zkoumat funkci

$$f(z) = \frac{1}{(z^2 + a^2)^3}.$$

Uvnitř cesty L leží jeden z pólů naší funkce, a to $z_0 = ai$, který je třetího řádu a má residuum

$$c_{-1} = \frac{1}{2!} \lim_{z \to z_0} \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2} \left\{ \frac{(z - ai)^3}{(z^2 + a^2)^3} \right\} = \left[\frac{1}{2} \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2} \frac{1}{(z + ai)^3} \right]_{z=ai} =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{3 \cdot 4}{(2ai)^5} = \frac{3}{16a^5 i}.$$

Podle residuové věty

$$\oint_L f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{-R}^{R} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{C_R} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i\, c_{-1} = \frac{3\pi}{8a^5}, \tag{6}$$

kde C_R je horní půlkružnice $|z| = R$. Podle věty o odhadu integrálu § 46 pro dostatečně velká R je

$$\left| \int_{C_R} f(z)\,\mathrm{d}z \right| \leqq \frac{1}{R^6} \max_{|z|=R} \frac{1}{\left| 1 + \frac{a^2}{z^2} \right|^3} \cdot \pi R \leqq \frac{C}{R^5},$$

kde C je jistá konstanta (pro dostatečně velká R je $\left|1 + \frac{a^2}{z^2}\right|^3$ velmi blízké 1). Odtud

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

a ze vztahu (6) dostáváme pro hledaný výsledek*)

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2 + a^2)^3} = \frac{3\pi}{8a^5}. \tag{7}$$

Analogicky se vypočtou i integrály obsahující goniometrické funkce.

Příklad 2. Pro výpočet integrálu

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\cos x\,\mathrm{d}x}{x^2 + a^2}$$

zvolíme tutéž integrační cestu jako v předešlém příkladě a budeme zkoumat funkci

$$f(z) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z^2 + a^2},$$

která je pro $z = x$ shodná s funkcí za integračním znaménkem. Na půlkružnici C_R je $|\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}| = \mathrm{e}^{-y} < 1$, neboť $y = \mathrm{Im}\,z \geqq 0$, a pro dostatečně velká R dostáváme jako v předcházejícím příkladě odhad**)

$$\left|\int_{C_R} f(z)\,\mathrm{d}z\right| \leqq \frac{C}{R^2}\,\pi R = \frac{c\pi}{R},$$

z kterého je vidět, že $\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$. Uvnitř L leží jen jeden pól funkce $f(z)$ $z = a\mathrm{i}$ s residuem

$$c_{-1} = \frac{\varphi(a\mathrm{i})}{\psi'(a\mathrm{i})} = \frac{\mathrm{e}^{-a}}{2a\mathrm{i}} = \frac{1}{2a\mathrm{e}^{a}\mathrm{i}}$$

*) Integrál (7) můžeme vyčíslit též elementárně buď trojnásobným postupným integrováním per partes, nebo pomocí goniometrické substituce. Oba způsoby výpočtu však jsou dosti složité.

**) Kdybychom položili $f(z) = \frac{\cos z}{z^2 + a^2}$, nebyl by podobný odhad možný, neboť na C_R by $|\cos z|$ rychle vzrůstala.

(kde $\varphi(z) = e^{iz}$, $\psi(z) = z^2 + a^2$) a podle residuové věty

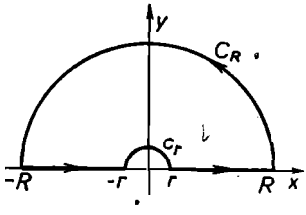
$$\oint_L f(z)\,dz = \int_{-R}^{0} \frac{e^{ix}\,dx}{x^2+a^2} + \int_0^R \frac{e^{ix}\,dx}{x^2+a^2} + \int_{C_R} f(z)\,dz = 2\pi i c_{-1} = \frac{\pi}{ae^a}. \quad (8)$$

Prvý z integrálů (8) přejde substitucí $x' = -x$ na integrál $-\int_R^0 \frac{e^{-ix'}\,dx'}{x'^2+a^2} = \int_0^R \frac{e^{-ix}\,dx}{x^2+a^2}$, kde jsme se opět vrátili k staré proměnné. Sečteme-li oba integrály, dostaneme $2\int_0^R \frac{\cos x\,dx}{x^2+a^2}$. Rovnice (8) přejde na tvar

$$\oint_L f(z)\,dz = 2\int_0^R \frac{\cos x\,dx}{x^2+a^2} + \int_{C_R} f(z)\,dz = \frac{\pi}{ae^a}.$$

Použijeme-li odhadu $\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} f(z)\,dz = 0$, dostaneme pro $R \to \infty$ z poslední rovnice hledaný výsledek*)

$$I = \int_0^\infty \frac{\cos x}{x^2+a^2}\,dx = \frac{\pi}{2ae^a}. \quad (9)$$



Obr. 108.

Příklad 3. Pro výpočet integrálu

$$I = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$$

použijeme pomocné funkce

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z},$$

jejíž imaginární část pro $z = x$ je shodná s funkcí za integračním znaménkem. Cesta zobrazená na obr. 107 je pro integrování v našem

*) Neurčitý integrál $\int \frac{\cos x\,dx}{x^2+a^2}$ není možno vyjádřit pomocí elementárních funkcí.

případě nevhodná, neboť $f(z)$ nabývá nekonečně velkých hodnot pro $z = 0$. Abychom se vyhnuli tomuto úskalí, použijeme menší půlkružnice $|z| < r$, $y > 0$, ležící uvnitř půlkružnice C_R obr. 107 (viz obr. 108), a budeme dvakrát limitovat $r \to 0$ a $R \to \infty$. V takto sestrojené oblasti je $f(z)$ regulární a podle Cauchyho věty § 47

$$\int_{-R}^{-r} \frac{e^{ix}}{x}\,dx + \int_{C_r} \frac{e^{iz}}{z}\,dz + \int_{r}^{R} \frac{e^{ix}}{x}\,dx + \int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z}\,dz = 0. \qquad (10)$$

Prvý z integrálů (10) přejde substitucí $t = -x$ na $\int_{R}^{r} \frac{e^{-it}}{t}\,dt =$ $= -\int_{r}^{R} \frac{e^{-ix}}{x}\,dx$, kde jsme přešli opět ke staré proměnné; sloučíme-li ho s třetím z integrálů 10) dostáváme $2i\int_{r}^{R} \frac{\sin x}{x}\,dx$. Pro odhad modulu čtvrtého z integrálů (10) nestačí omezenost funkce $|e^{iz}|$ na kružnici C_R neboť délka půlkružnice a modul jmenovatele jsou stejného řádu pro $|z|$. Budeme proto integrovat per partes, kde $\frac{1}{z} = u$, $e^{iz}\,dz = dv$, a dostaneme

$$\int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z}\,dz = \frac{e^{iz}}{iz}\Big|_{-R}^{R} + \int_{C_R} \frac{e^{iz}\,dz}{iz^2} = \frac{e^{iR} + e^{-iR}}{iR} + \frac{1}{i}\int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z^2}\,dz.$$

Část mimo integrál zřejmě konverguje k nule pro $R \to \infty$ a modul integrálu je menší nebo roven $\frac{1}{R^2}\,\pi R = \frac{\pi}{R}$, a tedy též konverguje k nule pro $R \to \infty$. Čtvrtý z integrálů tedy konverguje k nule pro $R \to \infty$. Pro odhad druhého z integrálů (10) pro $r \to 0$ použijeme Laurentova rozvoje funkce $\frac{e^{iz}}{z}$ v okolí bodu $z = 0$:

$$\frac{e^{iz}}{z} = \frac{1 + \frac{iz}{1!} + \frac{(iz)^2}{2!} + \frac{(iz)^3}{3!} + \cdots}{z} = \frac{1}{z} + P(z),$$

kde $P(z)$ je normální část Laurentova rozvoje, která je zřejmě regulární v okolí bodu $z = 0$. Protože pro $r \to 0$ délka oblouku půlkružnice C_r konverguje k nule a $P(z)$ je ohraničená, je $\lim_{r\to 0} \int_{C_r} P(z)\,\mathrm{d}z = 0$ a tedy

$$\lim_{r\to 0} \int_{C_r} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z}\,\mathrm{d}z = \lim_{r\to 0} \left\{ \int_{C_r} \frac{\mathrm{d}z}{z} + \int_{C_r} \mathrm{d}z \right\} = \lim_{r\to 0} \int_{C_r} \frac{\mathrm{d}z}{z}.$$

V posledním integrálu položíme $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$, $\mathrm{d}z = r\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\,\mathrm{d}\varphi$ a integrál přejde v $\int_{\pi}^{0} \mathrm{i}\,\mathrm{d}\varphi = -\mathrm{i}\pi$. Dostáváme tedy konečně z (10) pro $r \to 0$ a $R \to \infty$

$$2\mathrm{i} \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x - \mathrm{i}\pi = 0,$$

odkud

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} \tag{11}$$

je hledaný výsledek.

Příklad 4. Zcela analogicky vypočteme integrál*)

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\cos ax - \cos bx}{x^2}\,\mathrm{d}x, \quad a \geqq 0, \; b \geqq 0.$$

Použijeme pomocné funkce

$$f(z) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}az} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}bz}}{z^2}$$

a budeme integrovat podle cesty obr. 108. Dostaneme

$$\int_{-R}^{-r} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{C_r} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{r}^{R} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{C_R} f(z)\,\mathrm{d}z. \tag{12}$$

*) Poznamenejme, že tento integrál nelze vyjádřit jako rozdíl integrálů $\int_0^{\infty} \frac{\cos ax}{x^2}\,\mathrm{d}x$ a $\int_0^{\infty} \frac{\cos bx}{x^2}\,\mathrm{d}x$, neboť tyto integrály jsou divergentní.

Záměnou x na $-x$ sloučíme třetí integrál s prvým a dostaneme $2\int_r^R \frac{\cos ax - \cos bx}{x^2}\,dx$. Odhad čtvrtého integrálu bude jednodušší než v předcházejícím případě, neboť vzhledem k tomu, že $|e^{iaz}| = e^{-ay} \leqq 1$, a $|e^{ibz}| = e^{-by} = 1$ (pro $a \geqq 0$, $b \geqq 0$), máme $|f(z)| \leqq \frac{2}{R^2}$ a

$$\left|\int_{C_R} f(z)\,dz\right| \leqq \frac{2}{R^2}\,\pi R \to 0 \text{ pro } R \to \infty.$$

Pro odhad druhého integrálu rozvineme funkci $f(z)$ v Laurentovu řadu v okolí bodu $z = 0$:

$$f(z) = \frac{i(a-b)\,z + \frac{(iaz)^2 - (ibz)^2}{2!} + \cdots}{z^2} = \frac{1}{2}\,i\,\frac{(a-b)}{z} + P(z),$$

kde $P(z)$ je regulární v okolí bodu $z = 0$. Odtud jako v příkladě 3 dostaneme

$$\lim_{r\to 0}\int_{C_r} f(z)\,dz = i(a-b)\,(-i\pi) = (a-b)\,\pi$$

a z (12) pro $r \to 0$ a $R \to \infty$ dostáváme

$$2\int_0^\infty \frac{\cos ax - \cos bx}{x^2}\,dx + (a-b)\,\pi = 0;$$

hledaný výsledek je

$$I = \int_0^\infty \frac{\cos ax - \cos bx}{x^2}\,dx = \frac{1}{2}\,(b-a)\,\pi. \tag{13}$$

§ 74. Ostatní integrály. Úspěšné použití residuové věty pro výpočet ostatních integrálů je obyčejně vázáno na výběr vhodné integrační cesty.

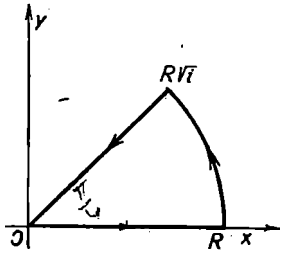
Příklad 1. Tak zvané Fresnelovy integrály

$$\int_0^\infty \cos x^2\,dx, \quad \int_0^\infty \sin x^2\,dx$$

je výhodné počítat současně. Použijeme funkce

$$f(z) = e^{iz^2},$$

jejíž reálná resp. imaginární část pro $z = x$ je shodná s prvním resp. s druhým z Fresnelových integrálů. Poznamenejme ještě, že na ose prvního kvadrantu, t. j. pro $z = r\sqrt{i}$, je funkce $f(z) = e^{-r^2}$ shodná s integrandem Poissonova integrálu*)



Obr. 109.

$$\int_0^\infty e^{-r^2}\,dr = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}. \qquad (14)$$

Použijeme tohoto faktu a zvolíme si integrační cestu z obr. 109. $f(z)$ je regulární uvnitř takto konstruované oblasti a podle Cauchyho věty

$$\int_0^R e^{ix^2}\,dx + \int_{C_R} e^{iz^2}\,dz + \int_R^0 e^{-r^2}\sqrt{i}\,dr = 0 \qquad (15)$$

(pro integrování podél osy prvního kvadrantu volíme za proměnnou r, takže je $z = r\sqrt{i}$, $dz = dr\sqrt{i}$). Jako v předešlých příkladech budeme limitovat pro $R \to \infty$. Abychom odhadli druhý z integrálů (15), budeme integrovat per partes

$$\int_{C_R} e^{iz^2}\,dz = \int_{C_R} \frac{de^{iz^2}}{2iz} = \frac{e^{iz^2}}{2iz}\Big|_R^{R\sqrt{i}} + \frac{1}{2i}\int_{C_R} \frac{e^{iz^2}}{z^2}\,dz.$$

Modul funkce mimo integrační znaménko se rovná

$$\left|\frac{e^{-R^2}}{2i\sqrt{i}R} - \frac{e^{iR^2}}{2iR}\right| \leqq \frac{e^{-R^2}}{2R} + \frac{1}{2R}$$

a konverguje pro $R \to \infty$ k nule. Modul integrandu $\left|\frac{e^{iz^2}}{z^2}\right| =$ $= \left|\frac{e^{i(R^2\cos 2\varphi + iR^2\sin 2\varphi)}}{z^2}\right| = \frac{e^{-R^2\sin 2\varphi}}{R^2}$, kde jsme položili $z = R(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, je na kružnici C_R menší než $\frac{1}{R^2}$, neboť je $\sin 2\varphi \geqq 0$ a $e^{-R^2\sin 2\varphi} \leqq 1$.

*) Viz př. 9 cvičení kap. VII.

Podle věty o odhadu integrálu

$$\left|\int_{C_R} \frac{e^{iz^2}}{z^2}\,dz\right| \leq \frac{1}{R^2}\,\frac{\pi}{4}\,R = \frac{\pi}{4R}$$

a pro $R \to \infty$ konverguje k nule, takže v (15) pro $R \to \infty$ dostáváme

$$\int_0^\infty e^{ix^2}\,dx - \sqrt{i}\int_0^\infty e^{r^2}dr = 0$$

a ze (14) po dosazení

$$\int_0^\infty e^{ix^2}\,dx = \int_0^\infty \cos x^2\,dx + i\int_0^\infty \sin x^2\,dx = \tfrac{1}{2}\sqrt{i}\,\sqrt{\pi} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}\,\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Porovnáme-li reálné a imaginární části obou stran rovnice, dostáváme hledaný výsledek:

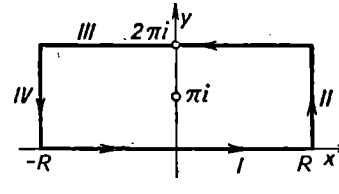
$$\int_0^\infty \cos x^2\,dx = \int_0^\infty \sin x^2\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}. \tag{16}$$

Příklad 2. Pro výpočet integrálu

$$\int_0^\infty \frac{e^{ax}\,dx}{1+e^x}$$

volíme pomocnou funkci

$$f(z) = \frac{e^{az}}{1+e^z}.$$



Obr. 110.

Použijeme toho, že funkce e^z má ryze imaginární periodu $2\pi i$, a toho, že se funkce e^{az} změní jen o konstantní součinitel $e^{2\pi a i}$ pro přírůstek $2\pi i$ argumentu z ($e^{a(z+2\pi i)} = e^{2\pi a i}e^{az}$). Vybereme si tedy integrační cestu podle obr. 110. Uvnitř čtyřúhelníka leží jen jediný singulární bod funkce $f(z)$: pól prvého řádu v bodě $z = \pi i$ (kde $e^z + 1 = 0$) s residuem

$$c_{-1} = \frac{e^{a\pi i}}{(1+e^z)'_{z=\pi i}} = \frac{e^{a\pi i}}{e^{\pi i}} = -e^{a\pi i}.$$

Podle residuové věty je

$$\int_I f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{II} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{III} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{IV} f(z)\,\mathrm{d}z = -2\pi i \mathrm{e}^{a\pi i}. \quad (17)$$

Avšak

$$\int_I f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{-R}^{R} \frac{\mathrm{e}^{ax}}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x, \quad \int_{III} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{R}^{-R} \frac{\mathrm{e}^{a(x+2\pi i)}}{1+\mathrm{e}^{x+2\pi i}}\,\mathrm{d}x = -\mathrm{e}^{2\pi a i}\int_{-R}^{R} \frac{\mathrm{e}^{ax}\,\mathrm{d}x}{1+\mathrm{e}^x}$$

Na úsečce II máme $|f(z)| \leqq \left|\frac{\mathrm{e}^{a(R+iy)}}{1+\mathrm{e}^{R+iy}}\right| \leqq \frac{\mathrm{e}^{aR}}{\mathrm{e}^R - 1}$, neboť podle (18) úvodu je $|\mathrm{e}^{R+iy}+1| \geqq |\mathrm{e}^{R+iy}| - 1 = \mathrm{e}^R - 1$, a tedy

$$\left|\int_{II} f(z)\,\mathrm{d}z\right| \leqq 2\pi \frac{\mathrm{e}^{aR}}{\mathrm{e}^R - 1} = 2\pi \frac{\mathrm{e}^{(a-1)R}}{1-\mathrm{e}^{-R}}$$

konverguje k nule pro $R \to \infty$ a pro $a < 1$, což předpokládáme.

Analogicky na úsečce IV

$$|f(z)| = \left|\frac{\mathrm{e}^{-R+iy}\cdot\mathrm{e}^{a\pi i}}{1+\mathrm{e}^{-R+iy}}\right| \leqq \frac{\mathrm{e}^{-aR}}{1-\mathrm{e}^{-R}},$$

neboť

$$|1+\mathrm{e}^{-R+iy}| \geqq 1 - |\mathrm{e}^{-R+iy}| = 1 - \mathrm{e}^{-R},$$

a tedy

$$\left|\int_{IV} f(z)\,\mathrm{d}z\right| \leqq 2\pi \frac{\mathrm{e}^{-aR}}{1-\mathrm{e}^{-R}}.$$

konverguje k nule pro $R \to \infty$ a pro $a > 0$, což též předpokládáme. Tak pro $0 < a < 1$ dostáváme z (17) v limitě pro $R \to \infty$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{ax}\mathrm{d}x}{1+\mathrm{e}^x} - \mathrm{e}^{2\pi a i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{ax}\,\mathrm{d}x}{1+\mathrm{e}^x} = -2\pi i \mathrm{e}^{a\pi i}$$

a odtud hledaný integrál

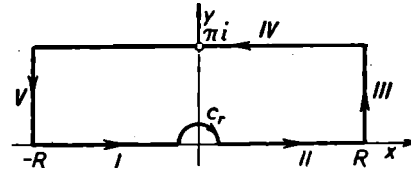
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{ax}\,\mathrm{d}x}{1+\mathrm{e}^x} = -2\pi i \frac{\mathrm{e}^{a\pi i}}{1-\mathrm{e}^{2a\pi i}} = \pi \frac{2i}{\mathrm{e}^{a\pi i} - \mathrm{e}^{-a\pi i}} = \frac{\pi}{\sin a\pi}, \; 0 < a < 1. \quad (18)$$

Pro $a < 0$ a též i pro $a > 1$ integrál diverguje, jak se snadno přesvědčíme.

Příklad 3. Integrál

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax} - e^{bx}}{1 - e^x}\,dx$$

není možno rozložit na dva integrály



Obr. 111.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1 - e^x}\,dx, \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{bx}}{1 - e^x}\,dx,$$

neboť každý z nich diverguje v bodě $x = 0$, kde integrand vzrůstá nade všechny meze. Položíme-li $z = x + \pi i$, pak $1 - e^z = 1 - e^{x+\pi i} = 1 + e^x$ je od nuly různé pro $x = 0$ a pro výpočet můžeme použít výsledku předešlého příkladu. Zvolíme tedy pomocnou funkci

$$f(z) = \frac{e^{az} - e^{bz}}{1 - e^z}$$

a integrační cestu volíme podle obr. 111, kde se vyhneme bodu $z = 0$, protože funkce $f(z)$ v něm není definována. Uvnitř oblasti obr. 111 je $f(z)$ regulární a podle Cauchyho věty*)

$$\int_I + \int_{C_r} + \int_{II} + \int_{III} + \int_{IV} + \int_V = 0. \tag{19}$$

V okolí bodu $z = 0$ rozvedeme funkci v řadu

$$f(z) = \frac{1 + az + \frac{(az)^2}{2} + \ldots - \left(1 + bz + \frac{(bz)^2}{2} + \ldots\right)}{1 - \left(1 + z + \frac{z^2}{2} + \ldots\right)} =$$

$$= \frac{a - b + \frac{a^2 - b^2}{2} z + \ldots}{-1 - \frac{1}{2}z - \ldots} = (b - a) + c_1 z + \ldots$$

*) Pro jednoduchost nepíšeme výraz za integračním znaménkem, který zůstává beze změny.

a bod $z = 0$ je pro ni bodem odstranitelné singularity. Je ohraničena pro $z \to 0$ a tedy v (19) konverguje $\int_{C_r} \to 0$ pro $r \to 0$. Integrály podél úseček *III* a *V* konvergují k nule pro $R \to \infty$ a pro $0 < a < 1$, $0 < b < 1$ (což předpokládáme). Dokáže se to zcela obdobným způsobem jako v předešlém příkladě, takže (19) nám v limitě pro $r \to 0$, $R \to \infty$ dává

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{e^{ax} - e^{bx}}{1 - e^{x}}\,dx + \int_{0}^{\infty} \frac{e^{ax} - e^{bx}}{1 + e^{x}}\,dx + \int_{\infty}^{-\infty} \frac{e^{a(x+\pi i)} - e^{b(x+\pi i)}}{1 - e^{x+\pi i}}\,dx = 0,$$

neboli

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax} - e^{bx}}{1 - e^{x}}\,dx = e^{a\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1 + e^{x}}\,dx - e^{b\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{bx}}{1 + e^{x}}\,dx.$$

Odtud pomocí (18) dostáváme konečně hledaný výsledek

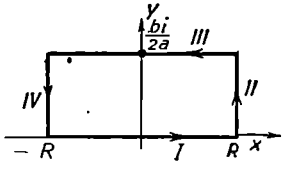
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax} - e^{bx}}{1 - e^{x}}\,dx = \frac{\pi e^{a\pi i}}{\sin a\pi} - \frac{\pi e^{b\pi i}}{\sin b\pi} =$$

$$= \pi(\operatorname{cotg} a\pi + i) - \pi(\operatorname{cotg} b\pi + i) = \pi(\operatorname{cotg} a\pi - \operatorname{cotg} b\pi),$$

$$0 < a < 1,\ 0 < b < 1. \qquad (20)$$

Příklad 4. Integrál

$$\int_{0}^{\infty} e^{-ax^2} \cos bx\,dx,$$



Obr. 112.

který se často vyskytuje v theorii vedení tepla, je zevšeobecněním integrálu Poissonova (14). Použijeme pomocné funkce

$$f(z) = e^{-az^2},$$

která na reálné ose přechází ve funkci e^{-ax^2}, jejíž integrál vypočteme podle (14). Na přímce $y = h$ přechází ve funkci $e^{-a(x+ih)^2} = e^{-ax^2} \cdot e^{-2iahx} \cdot e^{ah^2} = e^{ah^2} e^{-ax^2}(\cos 2ahx - i \sin 2ahx)$, jejíž reálná část je pro $h = \frac{b}{2a}$ shodná s funkcí pod integračním znaménkem našeho inte-

grálu. Zvolíme si tedy za integrační cestu obdélník na obr. 112 a podle věty Cauchyho je integrál po jeho obvodu

$$\int_I + \int_{II} + \int_{III} + \int_{IV} = 0.$$

Bude

$$\int_I = \int_{-R}^{R} e^{-ax^2}\,dx = \frac{2}{\sqrt{a}} \int_0^{R\sqrt{a}} e^{-t^2}\,dt$$

(kde jsme dosadili $x\sqrt{a} = t$ a použili toho, že integrand je funkce sudá) a integrál pro $R \to \infty$ konverguje podle (14) k $\frac{2}{\sqrt{a}} \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$. Pro třetí z integrálů platí

$$\int_{III} = \int_{-R}^{R} e^{-a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2}\,dx = e^{\frac{b^2}{4a}} \int_{-R}^{R} e^{-ax^2} e^{-bix}\,dx.$$

Pro integrály na úsečkách *II* a *IV* je $x = \pm R$ a

$$|e^{-az^2}| = e^{-a\,\mathrm{Re}\,z^2} = e^{-a(R^2-y^2)} \leqq e^{\frac{b^2}{4a}} e^{-aR^2}$$

(kde jsme místo y dosadili jeho maximum $\frac{b}{2a}$), a tedy jestliže $a > 0$ (což předpokládáme), konvergují integrály $\int_{II}$ a $\int_{IV}$ k nule pro $R \to \infty$. Dostáváme tedy z naší rovnice v limitě pro $R \to \infty$:

$$\sqrt{\frac{\pi}{a}} - e^{\frac{b^2}{4a}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} e^{-bix}\,dx = 0,$$

odkud porovnáním reálných částí plyne*)

---

*) Porovnáním imaginárních částí dostáváme triviální výsledek

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} \sin bx\,dx = 0,$$

neboť integrovaná funkce je lichá.

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} \cos bx \, dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{b^2}{4a}}.$$

Jelikož je integrand funkce sudá, dostáváme po snadné úpravě hledaný výsledek

$$\int_{0}^{\infty} e^{-ax^2} \cos bx \, dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{b^2}{4a}}, \quad a > 0. \tag{21}$$

§ 75. Integrály mnohoznačných funkcí.

Příklad 1. Hledejme integrál

$$I = \int_{0}^{1} \frac{\sqrt[4]{x(1-x)^3}}{(1+x)^3} \, dx.$$

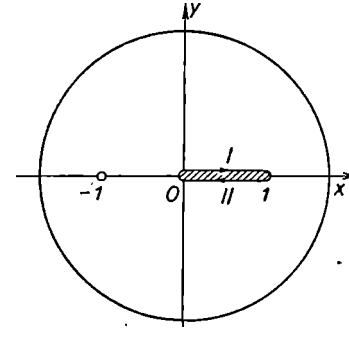
Použijeme pomocné funkce

$$f(z) = \frac{\sqrt[4]{z(1-z)^3}}{(1+z)^3},$$

která má v komplexním oboru tyto vlastnosti: 1. v rovině s vyňatou úsečkou (0, 1) se $f(z)$ rozpadá na čtyři regulární větve, 2. na opačných okrajích výřezu má $f(z)$ různé hodnoty, 3. každá z větví $f(z)$ má v bodě $z = \infty$ nulový bod druhého řádu. Vlastnost 1. plyne z toho, že při oběhu bodu z po libovolné křivce jednou kolem dokola bodů $z = 0$ a $z = 1$ vzroste $\arg z$ i $\arg(1 - z)$ o $+ 2\pi$ a tedy $\arg z(1 - z)$ o $2\pi + 3 \cdot 2\pi = 8\pi$ a $\sqrt[4]{z(1-z)^3}$ nabude opět výchozí hodnoty. Pro další výpočty vybereme si tu z větví $f(z)$, která na horním okraji výřezu (I) nabývá kladných hodnot, takže $\arg z = \arg(1 - z) = 0$ (viz obr. 113). Při oběhu bodu $z = 1$ ve směru naznačeném na obr. 113 se $\arg z$ nezmění, ale $\arg(1 - z)$ bude rovný -2π, t. j. hodnoty odmocniny na horním (I) a dolním okraji (II) výřezu se budou lišit koeficientem $e^{-1\frac{1}{2}6\pi} = e^{-1\frac{1}{2}3\pi} = i$ (vlastnost 2.). Vlastnost 3. plyne nakonec z toho, že

po dostatečně velké $|z|$ je řád čitatele roven řádu z a řád jmenovatele řádu z^3.*)

Zvolíme si integrační cestu podle obr. 113 a v dvojnásobně souvislé oblasti, kterou takto obdržíme, se budeme zabývat jednoznačnou větví funkce $f(z)$, kterou jsme si výše zvolili. Podle residuové věty, která platí i pro vícenásobné souvislé oblasti, pokud jsou v nich uvažované funkce jednoznačné, máme



Obr. 113.

$$\int_I + \int_{II} + \int_{C_R} = 2\pi \mathrm{i} c_{-1},$$

kde c_{-1} je residuum zvolené větve funkce $f(z)$ v bodě $z = -1$. Podle vlastnosti 3. je integrál $\int_{C_R} = 0$ pro dostatečně velká R, neboť residuum funkce $f(z)$ v bodě $z = \infty$ je rovno nule (§ 69). Z vlastnosti 2. plyne pro integrály $\int_I$ a $\int_{II}$ podél úsečky $(0, 1)$

$$\int_I + \int_{II} = \int_0^1 \frac{\sqrt[4]{x(1-x)^3}}{(1+x)^3}\,\mathrm{d}x + \mathrm{i}\int_0^1 \frac{\sqrt[4]{x(1-x)^3}}{(1+x)^3}\,\mathrm{d}x = (1-\mathrm{i})\,I,$$

takže

$$I = \frac{2\pi\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}\,c_{-1}. \tag{22}$$

Přesněji se to dokáže takto: Pro dostatečně velké $|z|$ lze čitatele rozložit v řadu

$$\sqrt[4]{z^4 + 3z^3 - 3z^2 + z} = z\left(1 + \frac{3}{z} - \frac{3}{z^2} + \frac{1}{z^3}\right)^{\frac{1}{4}} = z\left(1 + \frac{b_1}{z} + \frac{b_2}{z^2} + \ldots\right)$$

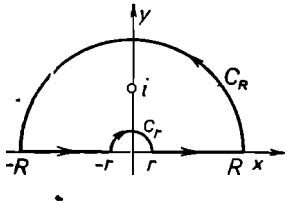
a $f(z)$ má Laurentův rozvoj

$$f(z) = \frac{z\left(1 + \frac{b_1}{z} + \frac{b_2}{z^2} + \ldots\right)}{z^3\left(1 + \frac{3}{z} + \frac{3}{z^2} + \frac{1}{z^3}\right)} = \frac{1}{z^2}\left(1 + \frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z^2} + \ldots\right)$$

a odtud ihned plyne naše tvrzení.

Zbývá jen najít residuum c_{-1}. Regulární větev funkce $f(z)$ má v bodě $z = -1$ pól třetího řádu a tedy podle (40) § 67

$$c_{-1} = \frac{1}{2} \lim_{z \to -1} \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2} [f(z)(1+z)^3] = \frac{1}{2} \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2} \sqrt[4]{z(1-z)^3}\Big|_{z=-1}.$$



Obr. 114.

Při výpočtu je třeba dbát ostražitosti a nezaměnit větve funkce $f(z)$. Větev, kterou jsme zvolili, je v bodě $z = -1$ charakterisována hodnotami $\arg z = \pi$, $\arg(z-1) = 0$, a proto musíme po derivování dosadit $z = \mathrm{e}^{\pi \mathrm{i}}$, $1 - z = 2$. Derivujeme podle Leibnizova vzorce (zde není možno odstranit závorky, abychom neporušili předpoklady o argumentech) a dostáváme

$$c_{-1} = \tfrac{1}{2}[\tfrac{1}{4}(-\tfrac{3}{4}) z^{-\frac{7}{4}} (1-z)^{\frac{3}{4}} + 2\tfrac{1}{4} z^{-\frac{3}{4}} \cdot \tfrac{3}{4}(1-z)^{-\frac{3}{4}} +$$
$$+ z^{\frac{1}{4}} \tfrac{3}{4}(-\tfrac{1}{4})(1-z)^{-\frac{5}{4}}]_{z=-1} = \tfrac{1}{2}(-\tfrac{3}{16} \mathrm{e}^{-\frac{7\pi \mathrm{i}}{4}} \cdot 2^{\frac{3}{4}} - \tfrac{3}{8} \mathrm{e}^{-\frac{3\pi \mathrm{i}}{4}} 2^{-\frac{1}{4}} -$$
$$- \tfrac{3}{16} \mathrm{e}^{\frac{\pi \mathrm{i}}{4}} 2^{-\frac{5}{4}}) = -\frac{3}{64\sqrt[4]{2}} \mathrm{e}^{\frac{\pi \mathrm{i}}{4}} = -\frac{3\sqrt[4]{2}}{64 \cdot 2}(1 + \mathrm{i}).$$

Dosadíme do (22) a dostáváme hledaný výsledek

$$I = \int_0^1 \frac{\sqrt[4]{x(1-x)^3}}{(1+x)^3} \,\mathrm{d}x = -\frac{2\pi \mathrm{i}}{1-\mathrm{i}} \frac{3\sqrt[4]{2}}{64 \cdot 2}(1+\mathrm{i}) = \frac{3\pi\sqrt[4]{2}}{64}. \quad (23)$$

Příklad 2. Pro výpočet integrálu

$$I = \int_0^\infty \frac{\ln x \,\mathrm{d}x}{(x^2+1)^2}$$

volíme integrační cestu naznačenou na obr. 114. Bod $z = 0$ vypouštíme, neboť funkce za integračním znaménkem nabývá v bodě $z = 0$ nekonečně velkých hodnot. V takto konstruované oblasti je pomocná funkce

$$f(z) = \frac{\ln z}{(z^2+1)^2}$$

jednoznačná, bereme-li hlavní hodnotu logaritmu (t. j. $0 \leqq \arg z \leqq \pi$). Má pól druhého řádu v bodě $z = \mathrm{i}$, jehož residuum najdeme podle vzorce

$$c_{-1} = \lim_{z \to \mathrm{i}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} [f(z)\,(z - \mathrm{i})^2] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \frac{\ln z}{(z + \mathrm{i})^2}\bigg|_{z=\mathrm{i}} = \frac{\pi + 2\mathrm{i}}{8}.$$

Podle residuové věty

$$\int_{-R}^{-r} + \int_{C_R} + \int_{r}^{R} + \int_{C_R} = 2\pi\mathrm{i}c_{-1} = \frac{\pi^2\mathrm{i}}{4} - \frac{\pi}{2}.$$

Abychom odhadli $\int_{C_R}$, uvážíme, že pro $z = Re^{\mathrm{i}\varphi}$

$$|\ln z| = \sqrt{\ln^2 R + \varphi^2} \leqq \sqrt{\ln^2 R + \pi^2} < 2 \ln R$$

$$\frac{1}{|z^2 + 1|^2} \leqq \frac{C}{R^4},$$

kde C je konstanta. Podle věty o odhadu integrálu je tedy

$$\left|\int_{C_R}\right| \leqq \frac{2C \ln R}{R^4} \cdot \pi R$$

a integrál $\int_{C_R} \to 0$ pro $R \to \infty$. Abychom odhadli $\int_{C_r}$, uvážíme, že pro $z = re^{\mathrm{i}\varphi}$

$$|\ln z| = \sqrt{\ln^2 r + \varphi^2} \leqq 2 \ln \frac{1}{r}$$

a

$$\frac{1}{|z^2 + 1|^2} \leqq C.$$

Tedy

$$\left|\int_{C_r}\right| \leqq 2C \ln \frac{1}{r} \cdot \pi r$$

a integrál $\int_{C_r}$ konverguje k nule pro $r \to 0$. V limitě pro $r \to 0$ a $R \to \infty$ dostáváme tedy

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{\ln z \,\mathrm{d}z}{(z^2 + 1)^2} + \int_{0}^{\infty} \frac{\ln x \,\mathrm{d}x}{(x^2 + 1)^2} = \tfrac{1}{4}\pi^2\mathrm{i} - \tfrac{1}{2}\pi.$$

V prvém integrálu je $z < 0$ a tedy $\ln z = \ln(-z) + \pi i$, odkud plyne

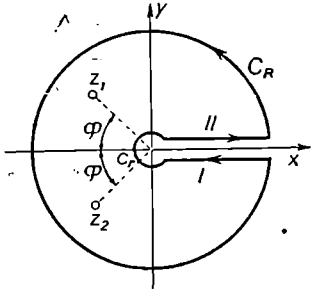
$$\int_{-\infty}^{0} \frac{\ln(-z)\,dz}{(z^2+1)^2} + \pi i \int_{-\infty}^{0} \frac{dz}{(z^2+1)^2} + \int_{0}^{\infty} \frac{\ln x\,dx}{(x^2+1)^2} = \tfrac{1}{4}\pi^2 i - \tfrac{1}{2}\pi.$$

Dosadíme v prvních dvou integrálech $-z = x$ a po záměně mezí dostáváme

$$2\int_{0}^{\infty} \frac{\ln x\,dx}{(x^2+1)^2} + \pi i \int_{0}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \tfrac{1}{4}\pi^2 i - \tfrac{1}{2}\pi. \tag{24}$$

Integrál $\int_0^\infty \frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx$ vypočteme jako v př. I § 73, takže je

$$\int_{0}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \tfrac{1}{4}\pi.$$



Obr. 115.

Porovnáním imaginárních částí v (24) dostáváme hledaný výsledek:

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\ln x\,dx}{(x^2+1)^2} = -\tfrac{1}{4}\pi. \tag{25}$$

Příklad 3. Pro výpočet integrálu

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\ln x\,dx}{(x+a)^2+b^2}$$

zvolíme integrační cestu podle obr. 115 a pomocnou funkci

$$f(z) = \frac{\ln^2 z}{(z+a)^2+b^2},$$

kde bereme regulární větev logaritmu, pro niž $0 \leqq \arg z \leqq 2\pi$. Na horním a dolním okraji výřezu nabývá $\ln^2 z$ hodnot $\ln^2 x$ resp. $(\ln x + 2\pi i)^2 = \ln^2 x + 4\pi i \ln x - 4\pi^2$ a hodnoty $\ln^2 x$ se navzájem vyruší, což nám umožňuje výpočet hledaného integrálu. Uvnitř takto konstruované oblasti má funkce $f(z)$ dva póly prvého řádu v bodech $z_{1,2} = -a \pm bi$, jejichž residua jsou

$$c_{-1}^{(1)} = \frac{\ln^2 z_1}{[(z+a)^2+b^2]'_{z=z_1}} = \frac{\ln^2(-a+bi)}{2bi} = \frac{1}{2bi}[\ln r + i(\pi - \varphi)]^2$$

$$c_{-1}^{(2)} = \frac{\ln^2 z_2}{[(z+a)^2+b^2]'_{z=z_2}} = \frac{\ln^2(-a-bi)}{-2bi} = -\frac{1}{2bi}[\ln r + i(\pi+\varphi)]^2,$$

kde $r = \sqrt{a^2+b^2}$ a $\varphi = \operatorname{arctg}\frac{b}{a}$. Podle residuové věty

$$\int_I + \int_{C_r} + \int_{II} + \int_{C_R} = 2\pi i(c_{-1}^{(1)} + c_{-1}^{(2)}) = \frac{\pi}{b} 4\varphi(\pi - i\ln r).$$

Jako v předešlém příkladě se dokáže, že $\lim\limits_{r\to 0}\int\limits_{C_r} = \lim\limits_{R\to\infty}\int\limits_{C_R} = 0$, takže v limitě pro $r \to 0$ a $R \to \infty$ dostáváme

$$\int_{\infty}^{0} \frac{\ln(x+2\pi i)^2}{(x+a)^2+b^2}\,dx + \int_0^{\infty} \frac{\ln^2 x}{(x+a)^2+b^2} = -4\pi i \int_0^{\infty} \frac{\ln x\,dx}{(x+a)^2+b^2} +$$

$$+ 4\pi^2 \int_0^{\infty} \frac{dx}{(x+a)^2+b^2} = \frac{4\pi\varphi}{b}(\pi - i\ln r).$$

Avšak

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x+a)^2+b^2} = \frac{1}{b}\int_{\frac{a}{b}}^{\infty} \frac{dt}{t^2+1} = \frac{1}{b}\left(\tfrac{1}{2}\pi - \operatorname{arctg}\frac{a}{b}\right) =$$

$$= \frac{1}{b}\operatorname{arctg}\frac{b}{a} = \frac{\varphi}{b};$$

po zkrácení a úpravě dostáváme hledaný integrál

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln x\,dx}{(x+a)^2+b^2} = \frac{\varphi \ln r}{b} = \frac{\ln\sqrt{a^2+b^2}}{b}\operatorname{arctg}\frac{b}{a}. \qquad (26)$$

Příklad 4. Pro výpočet integrálu

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{a-1}\,dx}{1+x}$$

znova použijeme integrační cesty z obr. 115 a pomocné funkce

$$f(z) = \frac{z^{a-1}}{1+z} = \frac{e^{(a-1)\ln z}}{1+z},$$

kde za $\ln z$ bereme tu větev logaritmu, pro kterou $0 \leqq \arg z \leqq 2\pi$. Tato funkce je jednoznačná v takto konstruované oblasti a je tam všude regulární kromě v bodě $z = -1$, v němž má pól prvého řádu. Residuum v tomto bodě je rovno

$$\operatorname{res} f(-1) = \frac{e^{(a-1)\ln(-1)}}{(1+z)'_{z=-1}} = e^{\pi(a-1)i} = -e^{a\pi i}$$

(kde jsme položili $-1 = e^{\pi i}$) a podle residuové věty

$$\int_I + \int_{C_r} + \int_{II} + \int_{C_R} = -2\pi i e^{a\pi i}$$

K odhadu $\int_{C_R}$ použijeme toho, že pro $|z| = R > 1$ je $|f(z)| = \frac{R^{a-1}}{|1+z|} \leqq$

$\leqq \frac{R^{a-1}}{R-1}$, a tedy

$$\left| \int_{C_R} \right| \leqq \frac{R^{a-1}}{R-1}\, \pi R \leqq C R^{a-1},$$

kde C je jistá konstanta. Odtud pro $a < 1$ (což předpokládáme) snadno zjistíme, že pro $R \to \infty$ integrál $\int_{C_R} \to 0$. Stejně tak pro

$$|z| = r < 1, \quad |f(z)| = \frac{r^{a-1}}{|1+z|} \leqq \frac{r^{a-1}}{1-r}$$

a

$$\left| \int_{C_R} \right| \leqq \pi \frac{r^{a-1}}{1-r}\, r \leqq C_1 r^a.$$

Z toho přímo plyne, že pro $a > 0$ (což předpokládáme) $\int_{C_R} \to 0$ pro $r \to 0$.

Tedy pro $r \to 0$, $R \to \infty$ bude v limitě pro $0 < a < 1$

$$\int_{\infty}^{0} {}_I f(z)\, dz + \int_{0}^{\infty} {}_{II} f(z)\, dz = -2\pi i e^{a\pi i}$$

V druhém integrálu integrujeme podél horního okraje výřezu a je

$z = x$ a $f(z) = \dfrac{x^{a-1}}{1+x}$, v druhém integrujeme podél dolního okraje a je $z = xe^{2\pi i}$ a

$$f(z) = \frac{x^{a-1}\, e^{2\pi(a-1)i}}{1 + e^{2\pi i}} = e^{2a\pi i}\, \frac{x^{a-1}}{1+x},$$

takže poslední rovnice nabývá tvaru

$$e^{-2a\pi i} \int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x}\, dx + \int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x}\, dx = -2\pi i e^{a\pi i}$$

a

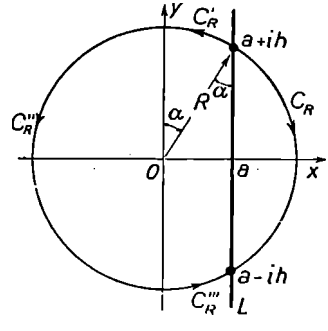
$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x}\, dx = \frac{2\pi i e^{a\pi i}}{e^{2a\pi i} - 1} = \pi\, \frac{2i}{e^{a\pi i} - e^{-a\pi i}} = \frac{\pi}{\sin a\pi}, \quad 0 < a < 1. \qquad (27)$$

Tento integrál se dá též substitucí $x = e^t$ převést na integrál př. 2 § 74.

§ 76. Vyjádření funkcí pomocí integrálů. Mějme integrál

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{e^{zt}}{z}\, dz,$$

kde integrujeme podél přímky $Re\, z = a$ $(a > 0)$ rovnoběžné s imaginární osou. Budiž nejprve $t < 0$. Pro kruhovou úseč omezenou přímkou $Re\, z = a$ a obloukem C_R kružnice $|z| = R$ podle Cauchyho integrální věty § 47 platí



Obr. 116.

$$\int_{a-ih}^{a+ih} \frac{e^{zt}}{z}\, dz + \int_{C_R} \frac{e^{zt}}{z}\, dz = 0 \qquad (28)$$

(kde $h = \sqrt{R^2 - a^2}$ a integrujeme po obvodě C_R v záporném smyslu oběhu). Abychom odhadli druhý integrál, integrujeme per partes

$$\int_{C_R} \frac{e^{zt}}{z}\,dz = \frac{1}{t}\int_{C_R} \frac{de^{zt}}{z} = \frac{1}{t}\frac{e^{zt}}{z}\Big|_{a-ih}^{a+ih} + \frac{1}{t}\int_{C_R} \frac{e^{zt}}{z^2}\,dz.$$

Je $\left|\frac{e^{(a+ih)t}}{a+ih} - \frac{e^{(a-ih)t}}{a-ih}\right| \leqq \frac{2e^{at}}{R}$; funkce mimo integrační znaménko tedy konverguje k nule pro $R \to \infty$ (a i t jsou pevné). Na C_R je $\left|\frac{e^{zt}}{z^2}\right| = \frac{e^{xt}}{R^2} \leqq \frac{1}{R^2}$ (podle předpokladu $x > 0$ a $t < 0$ a tedy $e^{xt} \leqq 1$). Odtud $\left|\int_{C_R} \frac{e^{zt}}{z^2}\,dz\right| \leqq \frac{1}{R^2}\,\pi R = \frac{\pi}{R}$ a integrál $\int_{C_R}$ též konverguje k nule pro $R \to \infty$. Tedy pro všechna $t < 0$ konverguje druhý z integrálů (28) k nule pro $R \to \infty$ a vztah (28) v limitě pro $R \to \infty$ nabývá tvaru

$$\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{e^{zt}}{z}\,dz = 2\pi i f(t) = 0, \quad t < 0,$$

a tedy $f(t) = 0$ pro všechna $t < 0$. Budiž nyní $t > 0$ a budeme integrovat podél kruhové úseče doplňující kruhovou úseč případu $t < 0$ (viz obr. 116). Uvnitř úseče má naše funkce jediný singulární bod, a to pól prvého řádu v bodě $z = 0$ s residuem $c_{-1} = \frac{1}{(z_0)'} = 1$, takže podle residuové věty bude

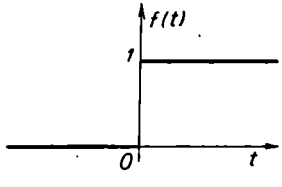
$$\int_{a-ih}^{a+ih} + \int_{C_R'} + \int_{C_R''} + \int_{C_R'''} = 2\pi i c_1 = 2\pi i. \tag{29}$$

Délky oblouků C_R' a C''' jsou rovny $\alpha R = R \arcsin \frac{a}{R} \sim R\frac{a}{R} = a$ a konvergují k a pro $R \to \infty$. Modul integrandu na těchto obloucích je $\left|\frac{e^{zt}}{z}\right| = \frac{e^{xt}}{R} \leqq \frac{e^{at}}{R}$ a konverguje k nule pro $R \to \infty$ (je $t < 0$ a $x \leqq a$, a, t jsou pevné) a tedy $\int_{C_R'} \to 0$ a $\int_{C_R'''} \to 0$ pro $R \to \infty$. Abychom odhadli integrál $\int_{C_R''}$, budeme integrovat per partes

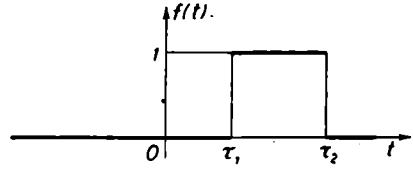
$$\int_{C_R''} = \frac{1}{t}\frac{e^{zt}}{z}\Big|_{+iR}^{-iR} + \frac{1}{t}\int_{C_R''} \frac{e^{zt}}{z^2}\,dz,$$

kde je $\left|\frac{e^{-iRt}}{-iR} - \frac{e^{iRt}}{iR}\right| \leqq \frac{1}{2}R$, $\left|\frac{e^{zt}}{z^2}\right| = \frac{e^{xt}}{R^2} \leqq \frac{1}{R^2}$ (neboť $f > 0$ a na C_R'' je $x < 0$). Tedy $\int_{C_R''} \to 0$ pro $R \to \infty$, takže pro všechna $f > 0$ a v limitě pro $R \to \infty$ nabývá (29) tvaru

$$\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{e^{zt}}{z}\,dz = 2\pi i f(t) = 2\pi i, \quad f > 0,$$



Obr. 117.



Obr. 118.

a tedy $f(t) = 1$ pro všechna $f > 0$. Shrneme oba výsledky do jediného zápisu

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{e^{zt}}{z}\,dz = \begin{cases} 0 \text{ pro } f < 0, \\ 1 \text{ pro } f > 0. \end{cases} \tag{30}$$

Integrál*) (30) tedy representuje jistou funkci, jejíž graf je sestrojen na obr. 117.

---

*) Pro $t = 0$ dostaneme divergentní integrál $\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{dz}{z}$. Budeme-li však místo něho brát t. zv. hlavní hodnotu nevlastního integrálu ve smyslu Cauchyho, t. j.

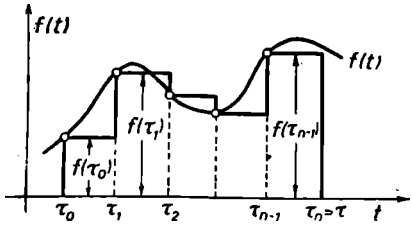
$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_{a-iN}^{a+iN} \frac{dz}{z} = \frac{1}{2\pi i}\lim_{N\to\infty} \ln\frac{a+iN}{a-iN} = \frac{1}{2\pi i}\ln(-1) = \frac{1}{2},$$

bude existovat a bude roven aritmetickému průměru hodnot funkce (30) v bodě $t = 0$ zprava a zleva. (V úvaze je podstatné, že integrál bereme v symetrickém intervalu od $a - iN$ do $a + iN$.)

Záměnou t na $t-\tau$ v (30) dostaneme integrál

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{e^{z(t-\tau)}}{z}\,dz=\begin{cases}0 \text{ pro } t<\tau\\ 1 \text{ pro } t<\tau.\end{cases} \tag{31}$$

Položíme-li dále v (31) nejprve τ rovno τ_1 a pak τ rovno τ_2 $(\tau_1<\tau_2)$ a odečteme-li od prvého integrálu druhý, dostaneme integrál



Obr. 119.

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}e^{zt}\,\frac{e^{-z\tau_1}-e^{-z\tau_2}}{z}\,dz=$$

$$=\begin{cases}0 \text{ pro } t<\tau_1,\\ 1 \text{ pro } \tau_1<t<\tau_2,\\ 0 \text{ pro } \tau_2<t,\end{cases} \tag{32}$$

který representuje funkci, jejíž graf je na obr. 118. Tímto způsobem je možno representovat jakoukoliv „schodovitou" funkci, jejíž graf je na obr. 119:

$$\frac{1}{2\pi i}\sum_{k=0}^{n-1}f(\tau_k)\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}e^{zt}\,\frac{e^{-z\tau_k}-e^{-z\tau_{k+1}}}{z}\,dz=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}e^{zt}\left\{\sum_{k=0}^{n-1}f(\tau_k)\,e^{-z\tau_k}\,\Delta\tau_k\right\}dz, \tag{33}$$

kde

$$\Delta\tau_k=\frac{1-e^{-z(\tau_{k+1}-\tau_k)}}{z}=$$

$$=(\tau_{k+1}-\tau_k)-\frac{1}{2!}(\tau_{k+1}-\tau_k)^2z+\frac{1}{3!}(\tau_{k+1}-\tau_k)^3z^2-\ldots$$

Jestliže nyní zvětšíme číslo n tak, že největší z rozdílů $\tau_{k+1}-\tau_k$ bude konvergovat k nule, t. j. $\Delta\tau_k$ bude veličinou nekonečně malou, ekvivalentní s $\tau_{k+1}-\tau_k$, pak se i suma (33) bude lišit velmi málo od integrálu a v limitě bude

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{zt} \left\{ \int_{\tau_0}^{\tau} f(\tau)\, e^{-z\tau}\, d\tau \right\} dz,$$

kde $f(t)$ je funkce z obr. 119 v intervalu (τ_0, τ), vyjádřená pomocí integrálu. Nebudeme se zde zabývat přesným důkazem limitního přechodu k integrálu. Poslední vzorec ve tvaru

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{zt} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\, e^{-z\tau}\, d\tau \right\} dz \tag{34}$$

platí pro libovolnou funkci $f(t)$, definovanou na reálné ose a splňující tyto předpoklady:

a) funkce $f(t)$ je v libovolném (konečném) intervalu $\langle -T, T \rangle$ reálné osy po úsecích hladká (t. j. její graf je křivka po úsecích hladká, viz § 8),

b) integrál $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-at} f(t)\, dt$ je absolutně konvergentní.

(34) je možno též přepsat do dvou vzájemně oddělených vzorců

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{zt} g(z)\, dz,$$

kde

$$g(z) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z\tau} f(\tau)\, d\tau \tag{35}$$

Funkcionální zobrazení, které přiřazuje funkci $f(t)$ funkci $g(z)$ vztahem (35), se nazývá *Laplaceova transformace*. První ze vztahů (35) „obrací" druhou, t. j. vyjadřuje funkci $f(t)$ pomocí jejího obrazu $g(z)$. Druhý ze vztahů (35) můžeme ovšem též považovat za obrácení prvého. Proto nazýváme vztahy (35) *inversními vztahy Laplaceovy transformace*. Laplaceovy transformace se velmi často používá v matematické fysice.*)

*) Viz na př. Carslaw-Jaeger: Operational Methods in Applied Mathematics, Oxford University Press 1941 (ruský překlad Karslou i Eger: Operacionnyje metody v prikladnoj matěmatike, Gosinoizdat, Moskva, 1948), Wagner: Opera-

(Pokračování na násl. str.)

§ 77. Logaritmické residuum. Princip argumentu. *Logaritmickým residuem* funkce $f(z)$ v bodě $z = a$ nazýváme residuum její logaritmické derivace $\frac{f'(z)}{f(z)}$ v tomto bodě. Logaritmická derivace $\frac{f'(z)}{f(z)}$ může mít singularity v singulárních bodech funkce i v jejích nulových bodech. Budiž $z = a$ nulový bod řádu n funkce $f(z)$; pak její Laurentův rozvoj v okolí tohoto bodu má tvar (§ 62):

$$f(z) = c_n(z-a)^n + c_{n+1}(z-a)^{n+1} + \ldots, \quad c_n \neq 0$$

a tedy

$$f'(z) = nc_n(z-a)^{n-1} + (n+1)\,c_{n+1}(z-a)^n + \ldots$$

Odtud pro Laurentovu řadu logaritmické derivace v okolí bodu $z = a$ máme

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{nc_n(z-a)^n + (n+1)\,c_{n+1}(z-a)^{n+1} + \ldots}{c_n(z-a)^{n-1} + c_{n+1}(z-a)^n + \ldots} =$$

$$= \frac{1}{z-a} \cdot \frac{nc_n + (n+1)\,c_{n+1}(z-a) + \ldots}{c_n + c_{n+1}(z-a) + \ldots}.$$

Podíl dvou regulárních funkcí je regulární v bodě, v němž je dělitel různý od nuly, a tedy v okolí tohoto bodu je funkce rozvinutelná v potenční řadu. Absolutní člen se určí jako podíl absolutních členů. Tedy

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{z-a}\{n + c_0'(z-a) + c_1'(z-a)^2 + \ldots\} =$$

$$= \frac{n}{z-a} + c_0' + c_1'(z-a) + \ldots \qquad (36)$$

---

torenrechnung nebst Anvendungen in Physik und technik, Leipzig, 1940, Vodička: Operátorový počet a jeho technicko-fysikální použití, JČMF, Praha, 1949, kde je též uvedena další literatura. M. I. Kontorovič: Operacionnoje isčislenije i nestacionarnije javlenija v električeskich cepjach, GOSTĚCHIZDAT, Moskva, 1949. T. Karmán, M. Biot: Mathematical Methods in engineering, (ruský překlad: T. Karman i M. Bio: Matematičeskie metody v inženernom děle, OGIZ, GOSTĚCHIZDAT, Moskva, 1948), kap. X., V. A. Ditkin i P. J. Kuzněcov: Spravočnik po operacionnomu isčisleniju, GOSTĚCHIZDAT, Moskva, 1951, Lurje: Operacionnoje isčislenije, Moskva, 1951 (zaměřeno na mechaniku), M. Gardner, J. Byrnes: Transients in Linear Systems, (ruský překlad: Gardner i Berns: Pěrechodnije processy v linejnych systemach s sosredotočennymi postojannymi, GOSTĚCHIZDAT, Moskva, 1951, Lavrentěv-Šabat: Metody funkcij kompleksnogo peremĕnogo, GOSTĚCHIZDAT, Moskva 1951, kap. VI (v této knize najde čtenář mnoho doplňující látky k látce vykládané v této knize). (Pozn. překl.)

je Laurentův rozvoj logaritmické derivace v okolí bodu $z = a$. Odtud je ihned vidět, že má v bodě $z = a$ pól prvého řádu s residuem rovným n. *Logaritmické residuum v nulovém bodě funkce $f(z)$ je rovno řádu tohoto nulového bodu.*

Budiž nyní $z = b$ pólem řádu p funkce $f(z)$; pak lze v okolí bodu $z = b$ rozvinout funkci $f(z)$ v řadu

$$f(z) = \frac{c_{-p}}{(z-b)^p} + \frac{c_{-p+1}}{(z-b)^{p-1}} + \ldots, \quad c_{-p} \neq 0$$

a $f'(z)$ v řadu

$$f'(z) = \frac{-pc_{-p}}{(z-b)^{p+1}} + \frac{-(p-1)\,c_{-p+1}}{(z-b)^p} + \ldots$$

a tedy

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{z-b} \cdot \frac{-pc_{-p} - (p-1)\,c_{-p+1}(z-b) + \ldots}{c_{-p} + c_{-p+1}(z-b) + \ldots} =$$

$$= \frac{1}{z-b}\{-p + c_0'(z-b) + c_1'(z-b)^2 + \ldots\},$$

odkud dostáváme Laurentův rozvoj logaritmické derivace v okolí bodu $z = b$:

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{-p}{z-b} + c_0' + c_1'(z-b) + \ldots \tag{37}$$

Z (37) vidíme ihned, že $z = b$ je pólem prvého řádu funkce $\frac{f'(z)}{f(z)}$ s residuem $-p$. *Logaritmické residuum funkce v pólu je rovno záporně vzatému řádu tohoto pólu.*

Použijeme těchto výsledků k důkazu jedné věty o argumentu funkce, t. zv. *principu argumentu*. Budiž $f(z)$ regulární všude v uzavřené oblasti $\bar{D}$ kromě konečného počtu bodů $b_1, b_2, \ldots, b_m$, kde má póly řádů $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_m$, a nechť má nulové body v bodech $a_1, a_2, \ldots, a_l$ řádů $n_1, n_2, \ldots, n_l$. Předpokládejme ještě, že funkce $f(z)$ nemá na hranici C oblasti D ani póly, ani nulové body.*)

Za těchto předpokladů je logaritmická derivace regulární na hranici

*) Lze dokázat, že *konečnost* počtu nulových bodů a pólů vyplývá z této podmínky.

C a má uvnitř C jen konečný počet singularit. Podle residuové věty a použitím právě odvozených výsledků je

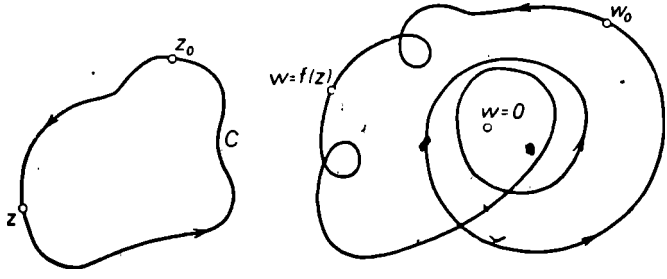
$$\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}(n_1 + n_2 + \ldots + n_s - p_1 - p_2 - \ldots - p_m) = \quad (38)$$

$$= 2\pi\mathrm{i}(N - P),$$

kde N a P označují počet nulových bodů a počet pólů funkce $f(z)$ uvnitř C, při čemž každý počítáme s násobností jeho řádu.

Ujasníme si geometrický smysl naší věty. Je

$$\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z = \oint_C \mathrm{d}\ln f(z) = \oint_C \mathrm{d}\ln|f(z)| + \mathrm{i}\oint_C \mathrm{d}\arg f(z),$$



Obr. 120.

(kde ln i arg jsou některé jednoznačné a spojité větve obou funkcí). Protože funkce $\ln|f(z)|$ je jednoznačná, nabude opět při oběhnutí kontury C od jistého bodu z_0 výchozí hodnoty a je

$$\oint_C \mathrm{d}\ln|f(z)| = \ln|f(z_0)| - \ln|f(z_0)| = 0.$$

Při oběhu kontury C se může hodnota $\arg f(z)$ změnit, jestliže při tom bod $w = f(z)$ oběhne počátek $w = 0$ (na obr. 120 se konečná hodnota $\arg f(z_0)$ liší od výchozí o 6π). Je tedy

$$\oint_C \mathrm{d}\arg f(z) = \Delta_C \arg f(z),$$

kde jsme symbolem Δ_C označili změnu $\arg f(z)$ při oběhnutí kontury C (t. j. rozdíl mezi konečnou a výchozí hodnotou). Tato změna může být obecně nenulová.

Tedy

$$\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = i\Delta_C \arg f(z)$$

a vzorec (38) možno psát

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \frac{1}{2\pi}\Delta_C \arg f(z) = N - P. \tag{39}$$

Vzorec (39) vyjadřuje tento princip:

Princip argumentu. *Je-li funkce $f(z)$ regulární všude v uzavřené oblasti $\overline{D}$ kromě konečného počtu pólů a nemá na hranici této oblasti ani póly ani nulové body, pak rozdíl nulových bodů a pólů této funkce uvnitř oblasti D, kde každý pól resp. nulový bod počítáme s násobností jeho řádu, je roven přírůstku* $\arg f(z)$ *při oběhu hranice C dělenému 2π.*

Jako příklad dokážeme Rouchéovu větu:

Jsou-li $f(z)$ a $g(z)$ regulární v uzavřené oblasti $\overline{D}$ a je-li na hranici této oblasti $|f(z)| > |g(z)| > 0$, mají funkce $f(z)$ a $f(z) + g(z)$ v této oblasti stejný počet nulových bodů (každý nulový bod počítáme s příslušnou násobností).

Důkaz. Budiž C hranice oblasti D. Je $\arg [f(z) + g(z)] = \arg f(z) + \arg \left\{1 + \frac{g(z)}{f(z)}\right\}$ a tedy $\Delta_C \arg [f(z) + g(z)] = \Delta_C \arg f(z) + \Delta_C \arg \left\{1 + \frac{g(z)}{f(z)}\right\}$. Podle předpokladu pro všechna z na C je však $\left|\frac{g(z)}{f(z)}\right| < 1$, a tedy bod $\omega = 1 + \frac{g(z)}{f(z)}$ leží uvnitř kružnice $|\omega - 1| < 1$. Tento kruh neobsahuje bod $\omega = 0$, a tedy ω se při oběhu křivky C vrátí ke své výchozí hodnotě. Tedy $\Delta_C \arg \left\{1 + \frac{g(z)}{f(z)}\right\} = 0$ a

$$\Delta_C \arg [f(z) + g(z)] = \Delta_C \arg f(z).$$

Jelikož ani $f(z)$, ani $f(z) + g(z)$ nemají v $\overline{D}$ žádné póly, poslední vztah

podle principu argumentu znamená, že obě funkce mají v D stejný počet nulových bodů (neboť na C je $|f(z)| > 0$ a $|f(z) + g(z)| \geqq \geqq |f(z)| - |g(z)| > 0$, takže je možno použít principu argumentu).

Rouchéova věta je velmi příhodná pro výpočet počtu nulových bodů.

Příklad 1. Abychom stanovili počet nulových bodů funkce

$$z^8 - 4z^5 + z^2 - 1 = 0,$$

ležících v jednotkovém kruhu $|z| < 1$, položíme $f(z) = z^8 - 4z^5$ a $g(z) = z^2 - 1$. Na kružnici $|z| = 1$ bude $|f(z)| = |z^3 - 4| \geqq 4 - |z|^3 = 3$, $|g(z)| = |z^2 - 1| \leqq |z^2| + 1 = 2$. Můžeme tedy použít věty Rouchéovy a počet nulových bodů naší funkce je roven počtu nulových bodů funkce $z^8 - 4z^5 = z^5(z^3 - 4)$ uvnitř kruhu $|z| < 1$, který činí 5, neboť $z^3 - 4 \neq 0$ pro $|z| < 1$.

Příklad 2. Abychom stanovili počet nulových bodů funkce

$$e^{z-\lambda} = z, \quad \lambda \geqq 1$$

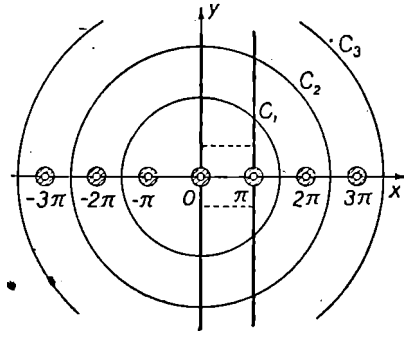
uvnitř jednotkového kruhu $|z| < 1$, položíme $f(z) = z$, $g(z) = e^{z-\lambda}$. Na kružnici $|z| = 1$ je $|f(z)| = 1$, $|g(z)| = e^{x-\lambda} < e^{1-\lambda} < 1$, neboť $\lambda > 1$, a použijeme-li opět věty Rouchéovy, je počet nulových bodů naší funkce roven počtu nulových bodů funkce $f(z) = z$ uvnitř jednotkového kruhu. Funkce $f(z) = z$ má jediný takový bod, a to $z = 0$. Všimneme si ještě toho, že reálná funkce $\varphi(x) = e^{x-\lambda} - x$ nabývá kladné hodnoty v bodě $x = 0$ a záporné hodnoty v bodě $x = 1$, t. j. kořen leží v intervalu $(0, 1)$. Odtud plyne, že hledaný kořen je reálný a kladný.

Příklad 3. Dokážeme si zde jako příklad t. zv. fundamentální větu algebry: *Libovolný mnohočlen n-tého stupně*

$$P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n \quad (a_0 \neq 0)$$

má právě n kořenů. (*Přitom počítáme mnohonásobný kořen s příslušnou násobností.*) Položíme $f(z) = a_0 z^n$ a $g(z) = a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n$. Na kružnici $|z| = R$ je $|f(z)| = |a_0| R^n$ a $|g(z)| \leqq |a_1| R^{n-1} + \ldots + |a_n|$. Protože mocnina R^n pro přirozené n roste rychleji než libovolný mnohočlen stupně $n - 1$, lze najít tak velké R, že na kružnici $|z| = R$ platí $|f(z)| > |g(z)|$. S druhé strany je $\lim_{z \to \infty} g(z) = \infty$, a tedy pro dosta-

tečně velké R je na kružnici $|z| = R$ $|g(z)| > 0$. Pak podle věty Rouchéovy je počet nulových bodů funkce $P(z) = f(z) + g(z)$ a funkce $f(z)$ uvnitř kruhu $|z| < R$ stejný, ale počet nulových bodů druhé funkce v tomto kruhu je roven právě n, což se mělo dokázat. Protože $\lim_{z\to\infty} P(z) = \infty$, leží zřejmě v tomto kruhu všechny nulové body funkce $P(z)$.



Obr. 121.

§ 78. Rozklad funkce cotg z v nekonečný součet zlomků. Mittag—Lefflerova věta.

Funkce

$$\operatorname{cotg} z = \frac{\cos z}{\sin z} = \mathrm{i}\,\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}$$

je meromorfní (§ 71) a má póly prvého řádu v bodech $z_k = k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) s residui $R_k = \left.\frac{\cos z}{(\sin z)'}\right|_{z=k} = 1$. Dokážeme, že naše funkce je ohraničena v celé rovině (z) s vynětím libovolně malých okolí bodů z_k: $|z - z_k| < r$. Protože $\operatorname{cotg} z$ je funkce periodická s periodou π, nabývá stejných hodnot v pásech $k\pi \leqq \operatorname{Re} z \leqq (k+1)\pi$ a stačí tedy dokázat její ohraničenost v pásu $0 \leqq \operatorname{Re} z \leqq \pi$ s vyňatými půlkružnicemi $|z| < r$, $\operatorname{Re} z > 0$ a $|z - \pi| < r$, $\operatorname{Re} z < \pi$. Je

$$|\operatorname{cotg} z| \leqq \frac{|\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}| + |\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}|}{||\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}| - |\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}||} = \frac{\mathrm{e}^{-y} + \mathrm{e}^{y}}{|\mathrm{e}^{-y} - \mathrm{e}^{y}|},$$

a tedy pro $y = 1$ je $|\operatorname{cotg} z| \leqq \frac{\mathrm{e}^{y} - \mathrm{e}^{-y}}{\mathrm{e}^{y} - \mathrm{e}^{-y}} = \frac{1 + \mathrm{e}^{-2y}}{1 - \mathrm{e}^{-2y}} \leqq \frac{1 + \mathrm{e}^{-2}}{1 - \mathrm{e}^{-2}}$

a funkce je ohraničená. Podobně pro $y < -1$ dostaneme

$$|\operatorname{cotg} z| \leqq \frac{\mathrm{e}^{-y} + \mathrm{e}^{y}}{\mathrm{e}^{-y} - \mathrm{e}^{y}} = \frac{1 + \mathrm{e}^{2y}}{1 - \mathrm{e}^{2y}} \leqq \frac{1 + \mathrm{e}^{-2}}{1 - \mathrm{e}^{-2}}$$

a funkce je opět ohraničená. Potom však z vlastností spojitých funkcí (§ 13) plyne, že funkce je ohraničená i pro $-1 \leqq y \leqq 1$.

Tedy $|\mathrm{cotg} z|$ je ohraničená v celé rovině (z) s vynětím bodů z_k, pro něž platí $|z - z_k| < r$, a lze najít takové číslo M, že s výjimkou uvedených bodů je pro všechna z

$$|f(z)| < M. \tag{40}$$

Jelikož cotg$z$ má v bodě $z = 0$ pól prvého řádu s residuem rovným jedné, je hlavní část jejího Laurentova rozvoje v okolí bodu $z = 0$ rovna $\frac{1}{z}$, a tedy funkce

$$f(z) = \mathrm{cotg} z - \frac{1}{z}$$

má v bodě $z = 0$ odstranitelnou singularitu. Z lichosti naší funkce plyne $\lim_{z \to 0} f(z) = 0$ (neboť při průchodu bodem $z = 0$ třeba po ose x musí měnit znaménko a zůstat spojitá). Položíme tedy definitoricky $f(0) = 0$ a funkce $f(z)$ bude regulární v bodě $z = 0$.

Označme C_n kružnici $|z| = (n + \frac{1}{2})\pi$ a budiž z bod, ležící uvnitř této kružnice a různý od bodu z_k. Funkce $\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$ má pak uvnitř C_n póly prvého řádu v bodech $\zeta = z$ a $\zeta = z_k$ $(0 < |k| \leqq n)$ s residui $R' = \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)'}\Big|_{\zeta = z} = f(z)$ a $R'_k = \frac{\zeta \cos\zeta - \sin\zeta}{\zeta(\zeta - z)(\sin\zeta)'}\Big|_{\zeta = k\pi} = \frac{1}{k\pi - z}$.

Podle Cauchyho residuové věty pro $z \neq k\pi$

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_n} \frac{f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta}{\zeta - z} = f(z) + \sum_{k=-n}^{n}{}' \frac{1}{k\pi - z}, \tag{41}$$

kde znak $\sum'$ znamená, že při sčítání vynecháváme index $k = 0$ (neboť bod $\zeta = 0$ není pólem funkce $f(\zeta)$). Dosadíme-li $z = 0$ do (41), dostaneme

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_n} \frac{f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta}{\zeta} = \sum_{k=-n}^{n}{}' \frac{1}{k\pi}, \tag{42}$$

neboť $f(0) = 0$. Dosadíme-li (42) do (41) a můžeme přepsat (41) na tvar

$$f(z) = -\sum_{k=-n}^{n}{}' \frac{1}{k\pi - z} + \sum_{k=-n}^{n}{}' \frac{1}{k\pi} + \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_n} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} - \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_n} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta} =$$

$$= \sum_{k=-n}^{n}{}' \left(\frac{1}{z - k\pi} + \frac{1}{k\pi}\right) + \frac{z}{2\pi i}\oint_{C_n} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta(\zeta - z)}. \qquad (41')$$

Nechme nyní $n \to \infty$ a z nechť zůstane pevné. Protože pro $r < \frac{1}{2}\pi$ leží všechny C_n v oblasti, pro kterou platí (40), a v posledním vzorci $|\zeta| = \varrho_n$, $\frac{1}{|\zeta - z|} \leqq \frac{1}{|\zeta| - |z|} = \frac{1}{\varrho_n - |z|}$, kde $\varrho_n = (n + \frac{1}{2})\pi$ je poloměr kružnice C_n, je

$$\left|\oint_{C_n} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta(\zeta - z)}\right| \leqq \frac{M \cdot 2\pi\varrho_n}{\varrho_n(\varrho_n - |z|)},$$

a tedy $\oint_{C_n} \to 0$ pro $n \to \infty$. V limitě nabývá (41') tvaru

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}{}' \left(\frac{1}{z - k\pi} + \frac{1}{k\pi}\right), \quad z \neq k\pi,$$

odkud

$$\operatorname{cotg} z = \frac{1}{z} + \sum_{k=-\infty}^{\infty}{}' \left(\frac{1}{z - k\pi} + \frac{1}{k\pi}\right), \quad z \neq k\pi. \qquad (43)$$

V konečném kruhu $|z| \leqq A$ pro dostatečně velká $|k|$ platí pro modul obecného členu řady (43)

$$\left|\frac{z}{(z - k\pi)\,k\pi}\right| = \frac{1}{k^2} \frac{|z|}{\pi\left|\pi - \frac{z}{k}\right|} \leqq \frac{A}{\pi\left(\pi - \frac{A}{|k|}\right)} \cdot \frac{1}{k^2}.$$

Koeficient při $\frac{1}{k^2}$ je ohraničený a řada $\sum_{k=-\infty}^{+\infty}{}' \frac{1}{k^2}$ konverguje. Odtud ihned vidíme, že řada (43) konverguje počínaje n-tým členem *stejnoměrně a absolutně v libovolném kruhu* $|z| < A$.

Z toho plyne, že pro libovolné konečné $z \neq k\pi$ můžeme v řadě (43) přestavit členy libovolným způsobem. Sloučíme-li v (43) vždy dva členy, které mají stejný modul a jejichž indexy mají opačné znaménko, můžeme (43) přepsat ve tvaru

$$\operatorname{cotg} z = \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - k^2\pi^2}, \quad z \neq k\pi. \tag{44}$$

Odvodíme ještě vzorec, který dostaneme z (43) a (44) záměnou z na πz:

$$\pi \operatorname{cotg} \pi z = \frac{1}{z} + \sum_{k=-\infty}^{\infty}{}' \left(\frac{1}{z-k} + \frac{1}{k} \right) = \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - k^2}. \tag{45}$$

Residua pólů funkce $\operatorname{cotg} z$ $z = k\pi$ se vesměs rovnají jedné, a tedy $\frac{1}{z - k\pi}$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ jsou hlavními částmi jejich Laurentovských rozvojů v okolí bodů $z = k\pi$. Rozvoj (43) se skládá z hlavních částí Laurentových rozvojů a je v tomto smyslu analogický rozkladu racionální lomené funkce na parciální zlomky (§ 71). Řada $\frac{1}{z} + \sum_{k=-\infty}^{\infty}{}' \frac{1}{z - k\pi}$, pozůstávající jen z hlavních částí Laurentových rozvojů, je divergentní, jak se snadno dokáže. Proto byly v rozvoji (43) k hlavním částem připojeny ještě členy $\frac{1}{k\pi}$, které zaručují konvergenci řady (43).

Napíšeme-li si Taylorův rozvoj pro $\frac{1}{z - k\pi} = -\frac{1}{k\pi} - \frac{z}{k^2\pi^2} - \ldots$, vidíme, že $\frac{1}{k\pi}$ je prvým členem Taylorova rozvoje hlavní části podle mocnin z, vzatým se znaménkem minus. Podobné tvrzení platí pro meromorfní funkce obecně. Platí

Mittag-Lefflerova věta. *Nechť je $f(z)$ meromorfní a má póly v bodech $z = a_k$, $|a_1| \leqq |a_2| \leqq \ldots$ s hlavními částmi Laurentova rozvoje $g_k\left(\frac{1}{z - a_k}\right) = G_k(z)$; nechť $h_k^{(p)}(0) = G_k(0) + G_k'(0)\, z + \ldots + \frac{G_k^{(p)}(0)}{p!} z^p$ je začátek Taylorova rozvoje hlavní části $g_k\left(\frac{1}{z - a_k}\right)$ podle mocnin z. Pak existuje posloupnost celých čísel p_k a celistvá funkce $f_0(z)$ tak, že rozvoj*

$$f(z) = f_0(z) + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ g_k\left(\frac{1}{z - a_k}\right) h_k^{(p_k)}(z) \right\} \tag{46}$$

konverguje absolutně a stejnoměrně pro všechna $z \neq a_k$ *v každém konečném kruhu* $|z| \leqq A$.

Rozklad (46) je analogický rozkladu racionální funkce lomené na celistvou část a parciální zlomky a nazývá se *Mittag-Lefflerovým rozvojem funkce* $f(z)$. Setkáváme se s ním v mnoha důležitých problémech.

§ 79. Rozklad sin z v nekonečný součin. Věta Weierstrassova. Řada (44) konverguje stejnoměrně v libovolném konečném kruhu $|z| \leq A$ pro $z \neq k\pi$. Lze tedy najít pro libovolné číslo $\varepsilon > 0$ takové číslo $N_0 = N_0(\varepsilon)$, že pro všechna $N > N_0$ je v rozvoji

$$\operatorname{cotg} z - \frac{1}{z} = \sum_{k=1}^{N} \frac{2z}{z^2 - k^2\pi^2} + \alpha_N(z), \tag{47}$$

$$|\alpha_N(z)| < \varepsilon, \tag{48}$$

pro všechna $z \neq k\pi$ v kruhu $|z| \leqq A$. Levá strana rovnice (47) je funkce regulární v bodě $z = 0$, když položíme levou stranu v bodě $z = 0$ rovnu nule (viz předcházející paragraf). Integrujeme-li podél libovolné cesty od bodu $z = 0$ do bodu $z \neq k\pi$ (integrační cesta neobsahuje body $z = k\pi$), dostaneme

$$\ln \frac{\sin z}{z}\Big|_0^z = \sum_{k=1}^{N} \ln(z^2 + k^2\pi^2)\Big|_0^z + \int_0^z \alpha_N(z)\, dz.$$

Funkce $\frac{\sin z}{z}$ je v bodě $z = 0$ rovna jedné (plyne z předpokladu o regularitě) a tedy $\ln \frac{\sin z}{z}\Big|_0^z = \ln \frac{\sin z}{z} - \ln 1 = \ln \frac{\sin z}{z}$ a $\ln(z^2 + k^2\pi^2)\Big|_0^z = \ln \frac{z^2 - k^2\pi^2}{-k^2\pi^2} = \ln\left(1 - \frac{z^2}{k^2\pi^2}\right)$. Naše poslední rovnice nabude tvaru

$$\ln \frac{\sin z}{z} = \sum_{k=1}^{N} \ln\left(1 - \frac{z^2}{k^2\pi^2}\right) + \beta_N(z), \tag{49}$$

kde v důsledku (48) pro všechna $z \neq k\pi$ z kruhu $|z| < A$

$$|\beta_N(z)| = \left|\int_0^z \alpha_N(z)\, dz\right| < \varepsilon \cdot 2A \tag{50}$$

(libovolný bod $z \neq k\pi$ z kruhu $|z| < A$ můžeme spojit v bodem $z = 0$ křivkou, jejíž délka $< 2A$; v úvaze předpokládáme, že integrujeme podél takové křivky).

Přepíšeme (49) na tvar

$$\frac{\sin z}{z} = e^{\beta_N(z)} \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{z^2}{k^2\pi^2}\right),$$

kde Π je znak pro násobení. Z nerovnosti (50) plyne, že pro $z \neq k\pi$ z kruhu $|z| < A$ je $\lim_{N\to\infty} \beta_N(z) = 0$ a tedy pro $N \to \infty$ $e^{\beta_N(z)} \to 1$ a

$$\lim_{N\to\infty} \prod_{k=1}^{N} \left(1 - \frac{z^2}{k^2\pi^2}\right) = \frac{\sin z}{z}.$$

Definice. Existuje-li limita

$$f(z) = \lim_{N\to\infty} \prod_{k=1}^{N} (1 + f_k(z)) \tag{51}$$

a je-li různá od nuly v každém bodě jisté oblasti D, říkáme, že *nekonečný součin* $\prod_{k=1}^{\infty} (1 + f_k(z))$ konverguje v oblasti D k funkci $f(z)$.

Poznámka. Snadno se dokáže, že v konvergentním nekonečném součinu tvaru (51) je $f_k(z) \to 0$, že součin tvaru (51) konverguje současně s řadou $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ (jsou-li funkce $f_k(z)$ od jistého indexu počínaje téhož znaménka pro pevné z), že součin (51) konverguje absolutně a že je možno libovolně přemisťovat jeho členy, konverguje-li řada $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ absolutně atd.

Poznámka 2. Jestliže jsou mezi členy součinu (51) členy, které nabývají hodnoty 0 v bodě z, a jestliže po vynětí těchto členů je (51) konvergentní v našem smyslu, říkáme, že (51) *konverguje k nule* v tomto bodě. Předpoklad, že limita (51) je od nuly různá, je nutný, chceme-li, aby si nekonečný součin zachoval vlastnost konečného součinu, totiž že je rovný nule tehdy a jen tehdy, je-li aspoň jeden z činitelů rovný nule.

Můžeme tedy nyní říci, že pro $z \neq k\pi$ z kruhu $|z| \leqq A$ můžeme sinz psát jako nekonečný součin

$$\sin z = z \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{k^2\pi^2}\right). \tag{52}$$

Pro $z = k\pi$ konverguje tento součin k nule a naše vyjádření sinz nekonečným součinem je platné *pro všechna* z z kruhu $|z| < A$. Protože můžeme číslo A volit libovolně veliké, platí naše *vyjádření funkce* sinz *ve tvaru nekonečného součinu pro všechna konečná* z. Tento součin po prvé odvodil (jiným způsobem) Euler.

Kdybychom v naší úvaze vyšli místo z (44) z rovnice (43), dostali bychom místo (52) součin

$$\sin z = z \prod_{k=-\infty}^{\infty}{}' \left(1 - \frac{z}{k\pi}\right) e^{\frac{z}{k\pi}}, \tag{53}$$

kde znak $'$ značí, že v součinu vynecháváme index $k = 0$. Vyjádření (53) je rovněž platné pro všechna konečná z.

Vztah (53) připomíná rozklad mnohočlenu v kořenové činitele

$$P(z) = A(z - a_1)(z - a_2) \ldots (z - a_n) = B \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{z}{a_k}\right),$$

známý čtenáři z algebry (pro funkci sinz jsou body $a_k = k\pi$ rovněž nulovými body). Rozklad $\prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_k}\right)$ obsahující jen činitele, kteří odpovídají nulovým bodům, je divergentní, jak se snadno dokáže. V rozkladu (53) byli proto ještě připojeni činitelé $e^{\frac{z}{k\pi}}$, kteří zaručují konvergenci součinu (53).

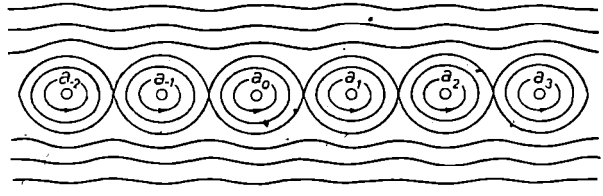
Podobný rozklad je možno najít pro libovolnou celistvou funkci a platí

Weierstrassova věta. *Budiž* $f(z)$ *celistvá funkce s nulovými body v bodech* $z = a_k$ $(0 < |a_1| \leqq |a_2| \leqq \ldots \leqq |a_k| \leqq \ldots)$; *nulové body počítáme s příslušnou násobností; dále nechť má funkce v bodě* $z = 0$ *nulový bod řádu* $n (n \geqq 0)$; *budiž* $h_k^{(p)}(z) = -\frac{z}{a_k} - \frac{z^2}{2a_k^2} - \ldots - \frac{z^p}{pa_k^p}$ *začátek Tay-*

lorova rozvoje funkce $\ln\left(1-\frac{z}{a_k}\right)$ *podle mocnin z. Pak existuje posloupnost celých čísel* p_k *a celistvá funkce* $f_0(z) \neq 0$ *taková, že pro všechna konečná z platí rozklad*

$$f(z) = f_0(z)\, z^n \prod_{k=1}^{\infty} \left(1-\frac{z}{a_k}\right) e^{-h_k^{(p_k)}(z)}. \tag{54}$$

Rozklad (54), který je analogický rozkladu mnohočlenu na kořenové činitele, se nazývá *Weierstrassovým rozkladem funkce* $f(z)$.



Obr. 122.

Příklad. Mějme nekonečnou řadu bodových vírů se stejnou intensitou P, jež jsou rozprostřeny v bodech $z = a_0 + kl$, t. j. leží na jisté přímce ve stejné vzdálenosti, která je rovna l od sebe (*vírový řetězec*, obr. 122).

Z počátku budiž počet vírů konečný a roven $2N+1$ ($|k| \leqq N$). Komplexní potenciál proudění v libovolném bodě $z \neq a_k$ se pak rovná součtu komplexních potenciálů jednotlivých vírů:

$$w = \Phi_N(z) = \frac{\Gamma}{2\pi i}\left\{\operatorname{Ln}\frac{\pi(z-a_0)}{i} + \sum_{k=1}^{N}\left(\operatorname{Ln}\frac{z-a_k}{-kl} + \operatorname{Ln}\frac{z-a_k}{kl}\right)\right\}$$

(kde jsme násobili $z - a_0$ číslem $\frac{\pi}{l}$ a $(z - a_k)$ číslem $\frac{1}{-kl}$, čímž se změnila jen nepodstatná adiční konstanta; viz § 39). Po úpravě můžeme psát

$$\Phi_N(z) = \frac{\Gamma}{2\pi i} \operatorname{Ln}\left\{\frac{\pi(z-a_0)}{l}\prod_{k=1}^{N}\left(1-\frac{(z-a_0)^2}{k^2l^2}\right)\right\}.$$

Členy tohoto výrazu se liší od členů výrazu (54) jen tím, že místo z

zde máme $\frac{\pi(z-a_0)}{l}$. Dostáváme tedy v limitě pro $N \to \infty$ *komplexní potenciál vírového řetězce*:

$$w = \Phi(z) = \frac{\Gamma}{2\pi i} \operatorname{Ln} \left\{ \frac{\pi(z-a_0)}{l} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{(z-a_0)^2}{k^2 l^2}\right) \right\} = \\ = \frac{\Gamma}{2\pi i} \operatorname{Ln} \sin \frac{\pi(z-a_0)}{l}. \tag{55}$$

Analogicky se odvodí vzorec pro komplexní potenciál nekonečně mnoha bodových nábojů velikosti $+q$ rozprostřených v těchže bodech a_k:

$$w = F(z) = -2qi \operatorname{Ln} \left\{ \frac{\pi(z-a_0)}{l} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{(z-a_0)^2}{k^2 l^2}\right) \right\} = \\ = 2qi \operatorname{Ln} \frac{1}{\sin \frac{\pi(z-a_0)}{l}}.$$

§ 80. Eulerova funkce $\Gamma(z)$. Budeme nejprve definovat *logaritmickou derivaci Eulerovy funkce* $\Gamma(z)$:

$$\psi(1+z) = -C - \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z+k} - \frac{1}{k} \right), \tag{56}$$

kde C je konstanta, jejíž velikost ještě určíme. Řada (56) sestává z členů řady (45) pro $\pi \operatorname{cotg} \pi z$ se zápornými indexy.*) Je to vlastnost, které si všimneme ještě později. Rozvoj (56) je zřejmě Mittag-Lefflerovým rozvojem funkce $\psi(1+z)$, která je tedy *meromorfní a má póly prvého řádu v bodech* $z = -1, -2, -3, \ldots$

Eulerova funkce $\Gamma(z)$, nazývaná též gamma funkce, je definována svou logaritmickou derivací

$$\ln \Gamma(1+z) = \int_0^z \psi(1+z)\, dz = -Cz - \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \ln \left(1 + \frac{z}{k}\right) - \frac{z}{k} \right\}, \tag{57}$$

kde $z \neq -k$ ($k = 1, 2, 3, \ldots$); integrujeme podél libovolné cesty, která

*) Vzorce (45) a (56) se liší ještě znaménkem k.

neprochází právě uvedenými body. K tomu nás opravňuje stejnoměrná konvergence řady (5C).

Odlogaritmováním rovnice (57) dostáváme

$$\frac{1}{\Gamma(1+z)} = e^{Cz} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1+\frac{z}{k}\right) e^{-\frac{z}{k}}, \tag{58}$$

kde nekonečný součin konverguje, neboť je částí Weierstrassova rozvoje pro $\sin \pi z$, odpovídající záporným indexům k,**) Z (58) plyne, že funkce $\frac{1}{\Gamma(1+z)}$ je celistvá a má nulové body v bodech $z = -k$ ($k = 1, 2, 3, \ldots$) a jen v těchto bodech. *Funkce $\Gamma(1+z)$ nenabývá nikde hodnoty nulové, je meromorfní a má póly prvého řádu v bodech $z = -k$ ($k = 1, 2, 3, \ldots$) a jen v těchto bodech.*

Z (58) plyne dále: $\Gamma(1) = 1$. Jelikož podle předpokladu $\Gamma(2) \neq 0$ a konstanta C není ještě určena, položme $\Gamma(2)$ a 1. Pak určíme konstantu C takto: Z (57) plyne

$$0 = -C - \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) - \frac{1}{k} \right\}$$

a tedy

$$C = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{k} - \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) \right\} = \lim_{n=\infty} \sum_{k=1}^{n} \left\{ \frac{1}{k} - \ln \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \ldots \cdot \frac{n+1}{n} \right\} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left\{ \frac{1}{k} - \ln(n+1) \right\}.$$

Přidáme-li k výrazu v závorce člen $\frac{1}{n+1}$, který nezmění hodnotu limity, neboť v limitě je $\frac{1}{n+1} \to 0$, a jestliže místo $n+1$ píšeme n, dostáváme konečně pro C vyjádření

$$C = \lim_{n\to\infty} \left\{ 1 + \tfrac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n \right\}. \tag{59}$$

**) Viz vzorec (53), kde jsme zaměnili k za $-k$ a z za $4\pi z$.

Konstanta C se nazývá *Eulerovou konstantou**) a naší úvahou je dokázána její existence.

Odvoďme si nyní některé vztahy pro funkci $\Gamma(z)$. Především z (56) dostaneme pro $z \neq k$

$$\psi(1+z) - \psi(z) = -\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{z+k-1} - \frac{1}{z+k}\right\} = \frac{1}{z},$$

neboť všechny ostatní členy se zruší. Integrujeme a dostaneme rovnici $\ln\Gamma(1+z) - \ln\Gamma(z) = \ln z + A$, kde zbývá ještě určit integrační konstantu A. Je $\Gamma(1+z) = Az\Gamma(z)$; položíme-li $z = 1$, dostaneme $A = 1$, neboť $\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1$, a konečně hledaný vztah

$$\Gamma(1+z) = z\Gamma(z). \tag{60}$$

Rekurentní vztah, který jsme právě odvodili, umožňuje výpočet $\Gamma(z)$ v pásech $k < \mathrm{Re}\, z \leqq k+1$ a $k-2 < \mathrm{Re}\, z \leqq k-1$, jsou-li známy hodnoty v pásu $k-1 < \mathrm{Re}\, z \leqq k$. Pomocí (60) dostaneme postupně:

$$\Gamma(z+2) = (z+1)\Gamma(z+1) = (z+1)\,z\Gamma(z),$$
$$\Gamma(z+3) = (z+2)\Gamma(z+2) = (z+2)(z+1)z\Gamma(z)$$

a konečně pro celistvá kladná n:

$$\Gamma(z+n) = (z+n-1)(z+n-2)\ldots z\Gamma(z) \tag{61}$$

Pomocí vzorce (61) můžeme stanovit hodnoty funkce $\Gamma(z)$ v celé rovině, známe-li hodnoty v pásu $0 \leqq \mathrm{Re}\, z \leqq 1$.

Speciálně položíme-li $z = 1$, dostaneme

$$\Gamma(1+n) = n!. \tag{62}$$

odkud je vidět, že *$\Gamma(z)$ je pokračováním celočíselné funkce $n!$ do komplexního oboru.*

Pomocí (61) můžeme též najít residua funkce $\Gamma(z)$ v jejích pólech. Podle uvedeného vzorce je

$$\Gamma(z) = \frac{1}{z(z+1)\ldots(z+n)}\,\Gamma(z+n+1),$$

*) Její přibližná hodnota je 0,5772157.

odkud podle (41) § 67

$$\operatorname{res}\Gamma(-n) =$$

$$= \lim_{z\to -n}(z+n)\,\Gamma(z) = \lim_{z\to -n}\frac{1}{z(z+1)\dots(z+n-1)}\,\Gamma(z+n+1) =$$

$$= \frac{1}{-n(-n+1)\dots(-1)}\,\Gamma(1)$$

a konečně

$$\operatorname{res}\Gamma(-n) = \frac{(-1)^n}{n!}. \tag{63}$$

Dále plyne ze vzorce (58)

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \frac{z}{\Gamma(1+z)} = z\mathrm{e}^{Cz}\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{k}\right)\mathrm{e}^{-\frac{z}{k}}$$

a

$$\frac{1}{\Gamma(1-z)} = \mathrm{e}^{-Cz}\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{k}\right)\mathrm{e}^{\frac{z}{k}}.$$

Vynásobením těchto rozvojů tak, že násobíme odpovídající členy (snadno se dokáže, že je tento postup dovolen), dostaneme:

$$\frac{1}{\Gamma(z)\,\Gamma(1-z)} = z\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{k^2}\right).$$

Porovnáme-li náš výraz s rovnicí (52), vidíme, že se pravá strana rovná $\frac{1}{\pi}\sin\pi z$, a tedy

$$\Gamma(z)\,\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin\pi z}. \tag{64}$$

Vzorec (64) nám dovoluje výpočet hodnot funkce $\Gamma(z)$ v pásu $0 < \operatorname{Re} z \leqq 1$ (a tedy i hodnot funkce $\Gamma(z)$ v celé rovině) pomocí hodnot z pásu $0 < \operatorname{Re} z \leqq \frac{1}{2}$. Speciálně pro $z = \frac{1}{2}$ dostaneme $\Gamma^2(\frac{1}{2}) = \pi$, odkud

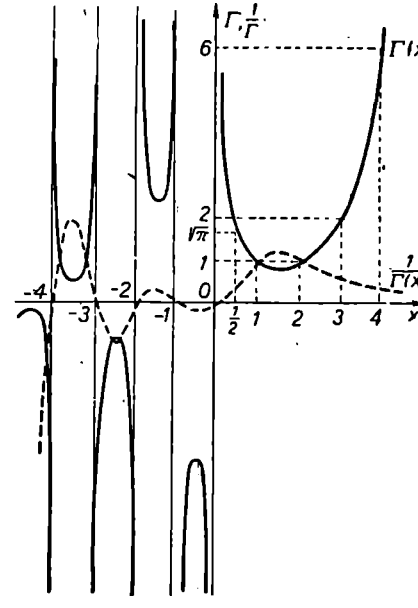
$$\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \sqrt{\pi}. \tag{65}$$

V závěru uvedeme ještě tabulku s hodnotami funkce $\Gamma(x)$ v intervalu (1, 2) reálné osy:

x	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9
$\Gamma(x)$	0,9514	0,9182	0,8975	0,8873	0,8862	0,8935	0,9086	0,9314	0,9618

Průběh funkce $\Gamma(x)$ je pro reálná x graficky znázorněn na obr. 123, kde je též zobrazena funkce $\frac{1}{\Gamma(x)}$. Obecný průběh funkce $\Gamma(x)$ jasně plyne z jejích vlastností, které jsme výše uvedli. Poznamenejme ještě, že rychlé přibližování minim funkce $\Gamma(x)$ k záporné ose pro $x \to -\infty$ je spjato s rychlým ubýváním jejích residuí v pólech. Podle (63) je v okolí bodu $z = -n$

$$\Gamma(x) = \frac{(-1)^n}{n!} + \frac{1}{x+n} + \\ + c_0 + x\,c_1(x+n) + \ldots$$



Obr. 123.

a s růstem n velmi prudce klesá koeficient hlavní části Laurentova rozvoje.

§ 81. Vyjádření Γ-funkce pomocí integrálu.

Integrál

$$f(z) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t} t^{z-1}\,\mathrm{d}t, \tag{66}$$

kde t je reálná proměnná, $z = x + \mathrm{i}y$ komplexní parametr a pod t^{z-1} rozumíme $\mathrm{e}^{(z-1)\ln t}$ (§ 32), konverguje pro všechna z z pravé

poloroviny $\mathrm{Re}\, z > 0$. Důkaz: $|e^{-t}t^{z-1}| = e^{-t+(x-1)\ln t} = e^{-t}t^{x-1}$. Činitel e^{-t} zaručuje konvergenci (66) na pravém okraji pro všechna x a činitel t^{x-1} konvergenci na levém okraji pro $x > 0$.

Mějme posloupnost funkcí

$$f_n(z) = \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{z-1}\, \mathrm{d}t.$$

Protože $\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \to e^{-t}$ pro $n \to \infty$ a horní mez integrálu v $f_n(z)$ též $\to \infty$ pro $n \to \infty$, je $f_n(z) \to f(z)$. Přesný důkaz tohoto tvrzení nespadá do rámce naší knihy, a proto od něho upustíme. Dosadíme do výrazu pro $f_n(z)$ novou proměnnou $\tau = \frac{t}{n}$ a integrujeme per partes:

$$f_n(z) = n^z \int_0^1 (1-\tau)^n\, \tau^{z-1}\, \mathrm{d}\tau = n^z \int_0^1 (1-\tau)^n\, \mathrm{d}\frac{\tau^z}{z} =$$

$$= \frac{n^z}{z}\, \tau^z\, (1-\tau)^n \Big|_0^1 + \frac{n^z}{z}\, n \int_0^1 (1-\tau)^{n-1}\, \tau^z\, \mathrm{d}\tau = \frac{n^z}{z}\, n \int_0^1 (1-\tau)^{n-1}\, \tau^z\, \mathrm{d}\tau,$$

kde výraz stojící mimo integrál je roven nule. Budeme nyní znova integrovat per partes tak dlouho, až nám za integračním znaménkem zmizí výraz $(1-\tau)$. Výrazy stojící mimo integrál budou vždy po dosazení mezí rovny nule a po konečném počtu kroků dostaneme:

$$f_n(z) = \frac{n^z n!}{z(z+1)\ldots(z+n-1)} \int_0^1 \tau^{z+n-1}\, \mathrm{d}\tau =$$

$$= \frac{n^z n!}{z(z+1)(z+2)\ldots(z+n-1)(z+n)} =$$

$$= \frac{e^{z\ln n}}{z\left(1+\frac{z}{1}\right)\left(1+\frac{z}{2}\right)\ldots\left(1+\frac{z}{n}\right)}.$$

Výsledek si ještě trochu upravíme. Násobíme čitatele i jmenovatele zlomku číslem $e^{-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}$ a dostaneme:

$$f_n(z) = \frac{e^{-z\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n\right)}}{z(1+z)\,e^{-z}\left(1+\frac{z}{2}\right)e^{-\frac{z}{2}}\ldots\left(1+\frac{z}{n}\right)^{-\frac{z}{n}}} =$$

$$= \frac{1}{ze^{z\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n\right)}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{z}{k}\right)e^{-\frac{z}{k}}}.$$

Použijeme-li ještě (59), (58), (60), dostaneme konečně

$$f(z) = \lim_{n\to\infty} f(z) = \frac{1}{ze^{Cz}\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{k}\right)e^{-\frac{z}{k}}} = \frac{\Gamma(1+z)}{z} = \Gamma(z).$$

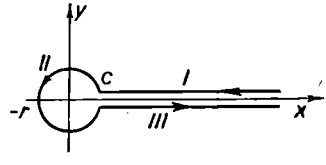
Jako výsledek jsme tedy dostali *integrální vyjádření Γ-funkce*:

$$\boxed{\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t}t^{z-1}\,dt,\ \mathrm{Re}\,z > 0.} \tag{67}$$

Mějme nyní integrál

$$F(z) = \int_0 e^{-\zeta}\zeta^{z-1}\,d\zeta,$$

kde integrujeme podél cesty vyznačené na obr. 124. Cesta je složena z horního a dolního okraje reálné poloosy a oblouku kružnice $|\zeta| = r$. Pod ζ^{z-1} budeme rozumět funkci $e^{(z-1)\ln\zeta}$, kde $\ln\zeta$ je ta větev logaritmu, pro niž $0 \leqq \arg\zeta \leqq 2\pi$. Na úseku (I) je $\zeta = t$ a $\zeta^{z-1} = e^{(z-1)\ln t} = t^{z-1}$, na úseku (II) je $\zeta = te^{2\pi i}$ a $\zeta^{z-1} = e^{(z-1)(\ln t+2\pi i)} = e^{2\pi iz}t^{z-1}$, a tedy



Obr. 124.

$$F(z) = \int_I + \int_{II} + \int_{III} = \int_{\infty}^{r} e^{-t}t^{z-1}\,dt + \int_{II} e^{-\zeta}\zeta^{z-1}\,d\zeta +$$

$$+ e^{2\pi iz}\int_r^{\infty} e^{-t}t^{z-1}\,dt = (e^{2\pi iz} - 1)\int_r^{\infty} e^{-t}t^{z-2}\,dt + \int_{II}.$$

Předpokládejme nyní, že $\mathrm{Re}\, z > 0$; pak na úseku (II) $\zeta = re^{i\varphi}$, $|e^{-\zeta}\zeta^{z-1}| = e^{-r\cos\varphi}\, e^{(x-1)\ln r - \varphi y} > Ar^{x-1}$, kde A je jistá konstanta, a $\left|\int_{II}\right| < Ar^{x-1}2\pi r = A_1 r^x$, takže $\int_{II} \to 0$ pro $r \to 0$. V limitě dostaneme po odečtení (67)

$$F(z) = (e^{2\pi i z} - 1)\int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}\,dt = (e^{2\pi z} - 1)\,\Gamma(z),$$

a tedy konečně

$$\Gamma(z) = \frac{1}{e^{2\pi i z} - 1}\int_C e^{-\zeta}\zeta^{z-1}\,d\zeta. \tag{68}$$

Integrální vyjádření Γ-funkce jsme odvodili pro body z ležící v pravé polorovině. Čitatel výrazu (68), t. j. integrál $\int_C e^{-\zeta}\zeta^{z-1}\,d\zeta$, je však funkce celistvá a rovněž jmenovatel je funkce celistvá s nulovými body v bodech $z = k$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$). Pravá strana rovnice (68) je tedy regulární ve všech konečných bodech kromě bodů $z = k$. Levá strana rovnice (68) je podle toho, co jsme si dokázali dříve, regulární ve všech konečných bodech kromě bodů $z = k$ ($k = 0, -1, -2, \ldots$). Pro pravou polorovinu jsou obě funkce shodné, a proto podle věty o jednoznačnosti (§ 62) budou shodné pro všechny body oblasti, v níž jsou regulární, a *rovnice* (68) *nám dává integrální vyjádření Γ-funkce, platné pro všechna konečná z kromě uvedených výjimek.**)

Vyjádření (68) je zajímavé také z toho důvodu, že definuje meromorfní funkci $\Gamma(z)$ jako podíl dvou celistvých funkcí (viz § 71).

Položíme-li v (68) místo z výraz $1 - z$, dostaneme:

$$\Gamma(1-z) = \frac{1}{e^{-2\pi i z} - 1}\int_C e^{-\zeta}\zeta^{-z}\,d\zeta = \frac{e^{-2\pi i z}}{e^{-2\pi i z} - 1}\int_C e^{-\zeta}(-\zeta)^{-z}\,d\zeta =$$

$$= \frac{i}{2\sin\pi z}\int_C e^{-\zeta}(-\zeta)^{-z}\,d\zeta.$$

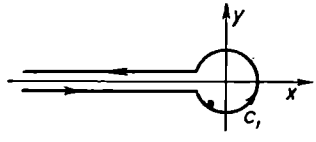
Zaměníme ještě ζ a $-\zeta$, při čemž se integrační cesta C z obr. 124

*) Pro $\mathrm{Re}\, z \leqq 0$ nelze v ní přejít k limitě pro $r \to 0$ jako v případě $\mathrm{Re}\, z > 0$.

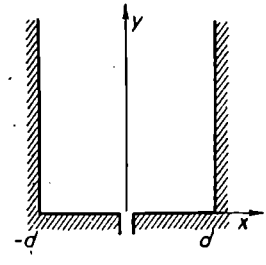
zamění cestou C_1 z obr. 125, a použijeme (64). Po úpravě dostáváme integrální vyjádření funkce $\Gamma(z)$:

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} e^{\zeta}\zeta^{-z}\,d\zeta. \tag{69}$$

Integrální vyjádření (68) a (69) se nazývají *Hankelovy vzorce.*



Obr. 125.



Obr. 126.

ÚLOHY

1. Vypočtěte integrály:

a) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^4}$; b) $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{\cos x + a}$, $a > 1$; c) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos ax\,dx}{x^4+1}$; d) $\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx$;

e) $\int_0^{\infty} \frac{\sin x\,dx}{x(1+x^2+x^4)}$; f) $\int_0^{\infty} \frac{x^{-a}}{1+2x\cos\lambda+x^2}$ $-1 < a < 1 - \pi < \lambda < \pi$;

g) $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{(1-x)(1+x)^2}}$; h) $\int_0^{\infty} \frac{x^2 \ln x\,dx}{(1+x^2)^2}$; i) $\int_0^{\infty} \frac{\ln^2 x}{1+x^2}\,dx$.

2. Která funkce má integrální vyjádření

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{e^{tz}}{z^2}\,dz,$$

kde integrujeme podél přímky $\mathrm{Re}\,z = a > 0$; t reálná proměnná.

3. Dokažte, že rovnice $\lambda - z - e^{-z} = 0$, kde $\lambda > 0$, má v pravé polorovině jediný kořen, a to reálný.

4. Dokažte: Je-li $f(z)$ regulární v kruhu $|z| \leqq 1$ a $|f(z)| < 1$, má rovnice $f(z) = z$ uvnitř tohoto kruhu jediný kořen (t. zv. samodružný bod při zobrazení $w = f(z)$).

5. Najděte rozklad funkcí:

a) $\operatorname{tg} z$; b) $\frac{1}{\sin z}$, c) $\frac{\pi}{\cos \pi z}$ a d) $\frac{1}{e^z - 1}$

v řadu parciálních zlomků.

6. Rozložte v nekonečné součiny funkce:
a) $e^z - 1$; b) $\cos \pi z - \cos \pi z_0$; c) $\cosh z - \cos z$.

7. Stanovte komplexní potenciál pole nekonečně mnoha bodových nábojů stejné velikosti se střídavými znaménky, které jsou rozprostřeny v bodech: $z_k = kd$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

8. Jaký je komplexní potenciál proudění kapaliny v nádobě zobrazené na obr. 126, kde je ve středu dna vyvrtán malý otvor, jímž vytéká Q litrů kapaliny za sec. Použijte methody zrcadlení na stěnách (§ 45).

9. Vypočtěte pomocí Γ-funkce Poissonův integrál

$$I = \int_0^\infty e^{-x^2} \, dx.$$

10. Dokažte, že v pásu $0 < \operatorname{Re} z < 1$ je

$$\int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} \, dt = \Gamma(z) \, . \, e^{-\frac{\pi i z}{2}},$$

a pomocí uvedeného vztahu vypočtěte pro $n > 1$ integrály

a) $\int_0^\infty \cos(t^n) \, dt$; b) $\int_0^\infty \sin(t^n) \, dt$; c) $\int_0^\infty \frac{\sin(t^n)}{t^n} \, dt$.

11. Dokažte, že se Eulerova funkce prvního druhu (t. zv. betafunkce) $B(p, q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{2-1} \, dt$, kde $\operatorname{Re} p > 0$, $\operatorname{Re} q > 0$, vyjádří pomocí Γ-funkce vztahem

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p) \, \Gamma(q)}{\Gamma(p + q)}.$$

12. Vypočtěte pomocí Γ-funkce integrály:

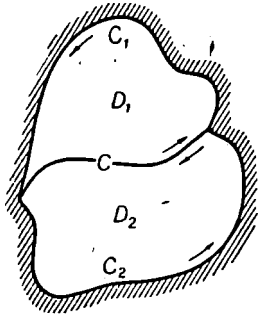
a) $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^{2p}\varphi \cos^{2q}\varphi \, \mathrm{d}\varphi$; b) $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \mathrm{tg}^{p}\varphi \, \mathrm{d}\varphi$;

c) $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^4}}$; d) $\int_0^\infty \frac{x^m \, \mathrm{d}x}{(a+bx^n)^p}$ $(a > 0, b > 0, np > m+1)$.

ZOBRAZOVÁNÍ POLYGONÁLNÍCH OBLASTÍ

§ 82. Princip symetrie. V této kapitole si odvodíme pro praxi velmi důležitý způsob analytického pokračování funkcí zprostředkujících konformní zobrazení. Nejprve si dokážeme obecnou větu o analytickém pokračování regulárních funkcí, kterou budeme nazývat *principem spojitého pokračování*.

Nechť D_1 a D_2 jsou dvě oblasti mající společnou část svých hraničních bodů a nechť je tato společná část tvořena křivkou C. Nechť dále $f_1(z)$ resp. $f_2(z)$ jsou funkce regulární v oblasti D_1 resp. D_2 a spojité v uzavřené oblasti $\overline{D}_1$ resp. $\overline{D}_2$ (obr. 127). *Jsou-li hodnoty funkcí $f_1(z)$ a $f_2(z)$ na společné hranici shodné, je jedna z funkcí analytickým pokračováním druhé.*



Obr. 127.

Označme si C_1 a C_2 onu část hranic, která není společná, a definujme si funkci spojitou na $C_1 + C_2 + C$:

$$\varphi(\zeta) = \begin{cases} f_1(\zeta) \text{ na } C_1, \\ f_2(\zeta) \text{ na } C_2, \\ f_1(\zeta) = f_2(\zeta) \text{ na } C. \end{cases}$$

Pomocí takto definované funkce $\varphi(\zeta)$ sestrojíme integrál typu Cauchyho,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{C_1+C_2} \frac{\varphi(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta}{\zeta - z} \tag{1}$$

a podle § 52 je funkce $f(z)$ regulární v oblasti $D_1 + D_2$. Přidáme-li na levé straně rovnice (1) integrály podél C, které se navzájem ruší, protože je bereme v opačných směrech, dostaneme

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{C_1+C} \frac{\varphi(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta}{\zeta - z} + \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{C_2+C} \frac{\varphi(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta}{\zeta - z} = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{C_1+C} \frac{f_1(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta}{\zeta - z} +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{C_2+C} \frac{f_2(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}z, \tag{2}$$

neboť na $C_1 + C$ $\varphi(\zeta) = f_1(\zeta)$ a na $C_2 + C$ $\varphi(\zeta) = f_2(\zeta)$. Leží-li bod z uvnitř oblasti D_1, pak podle Cauchyho věty § 47 je v rovnici (2) druhý z integrálů napravo roven nule, neboť $\frac{f_2(\zeta)}{\zeta - z}$ je všude v oblasti D_2 regulární funkcí ζ a

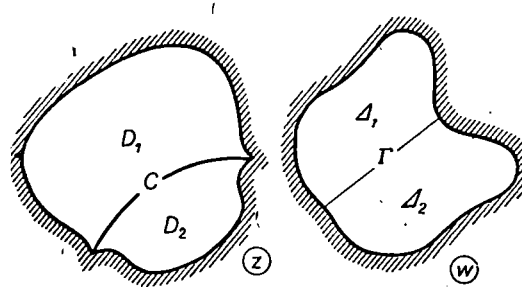
$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1+C} \frac{f_1(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta.$$

Podle integrální věty Cauchyho*) je tedy všude v D_1 $f(z) = f_1(z)$. Zcela stejně odvodíme, že všude v D_2 je

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2+C} \frac{f_2(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta = f_2(z),$$

a věta je dokázána.

Poznámka. Jsou-li funkce $f_1(z)$ a $f_2(z)$ regulární nejen v oblastech D_1 a D_2, nýbrž i na hranici C, je věta zřejmá. Důkaz: V tomto případě jsou $f_1(z)$ a $f_2(z)$ regulární v jisté oblasti D_0 obchvacující C a podle věty o jednoznačnosti (§ 62) jsou shodné v této oblasti, protože jsou shodné na C, což značí, že $f_1(z)$ a $f_2(z)$ jsou analytickým pokračováním jedna druhé.



Obr. 128.

Důležitým důsledkem této věty je tento princip:

Princip symetrie. *Nechť hranice oblasti D_1 obsahuje oblouk kružnice nebo úsečku a nechť funkce $w = f_1(z)$ zobrazí oblast D_1 konformně na oblast Δ_1 tak, že C přejde na část hranice Γ oblasti Δ_1 a nechť je Γ též tvořena obloukem kružnice nebo úsečkou. Pak existuje analytické po-*

*) Použili jsme Cauchyho vzorce za předpokladu, že funkce $f_1(z)$ je regulární pouze v oblasti D_1 a spojitá v $\overline{D}_1$. V § 52 bylo dokázáno, že Cauchyho vzorec platí i za těchto předpokladů (poznámka 2).

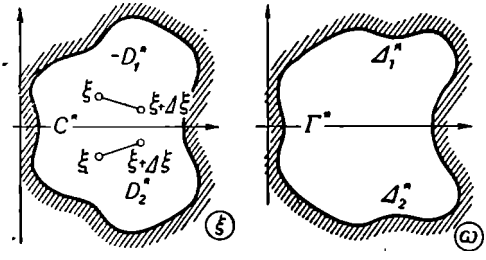
kračování funkce $w = f_1(z)$ *do oblasti* D_2, *která je symetrická s oblastí* D_1 *podle* C. *Analytické pokračování* $w = f_2(z)$ *zprostředkuje konformní zobrazení oblasti* D_2 *na oblast* Δ_2, *která je symetrická s oblastí* Δ_1 *podle* Γ, *a funkce*

$$f(z) = \begin{cases} f_1(z) \text{ na } D_1 \\ f_2(z) \text{ na } D_2 \end{cases}$$

zprostředkuje konformní zobrazení oblasti $D_1 + D_2$ *na oblast* $\Delta_1 + \Delta_2$.

Abychom dokázali naše tvrzení, sestrojíme lineární lomené zobrazení

$$\zeta = \frac{az + b}{cz + d}, \quad \omega = \frac{\alpha w + \beta}{\gamma w + \delta}, \tag{3}$$



Obr. 129.

které zobrazí křivku C resp. Γ na úsek C^* resp. Γ^* reálné osy v rovině ζ resp. ω rak, že se oblasti D_1 a Δ_1 zobrazí na oblasti D_1^* a Δ_1^*. Funkce $w = f_1(z)$ přejde při tom na funkci

$$\omega = f^*(\zeta),$$

která zprostředkuje konformní zobrazení oblasti D_1^* na Δ_1^*. Budiž D_2^* oblast symetrická s oblastí D_1^* podle C^*; sestrojme v D_2^* funkci

$$\omega = f_2^*(\zeta) = \overline{f_1^*(\zeta)}$$

a dokážeme, že je analytickým pokračováním funkce $f_1^*(\zeta)$. Na úsečce C^* je $f_1^*(\zeta) = f_2^*(\zeta)$, neboť pro reálná ζ a $f_1^*(\zeta)$ je $\zeta = \bar{\zeta}$ a $\overline{f_1^*(\bar{\zeta})} = f_1^*(\zeta)$. Abychom mohli použít právě dokázané věty, stačí dokázat, že funkce $f_2^*(\zeta)$ je regulární v D_2^*. Buďtež ζ a $\zeta + \Delta\zeta$ dva body v D_2^*; je

$$\frac{f_2^*(\zeta + \Delta\zeta) - f_2^*(\zeta)}{\Delta\zeta} = \frac{\overline{f_1^*(\bar{\zeta} + \Delta\bar{\zeta})} - \overline{f_1^*(\bar{\zeta})}}{\Delta\zeta} = \left(\frac{\overline{f_1^*(\bar{\zeta} + \Delta\bar{\zeta}) - f_1^*(\bar{\zeta})}}{\Delta\bar{\zeta}}\right),$$

kde $\overline{\zeta}$ a $\overline{\zeta} + \Delta\overline{\zeta}$ jsou body v D_1^* a limita

$$f_2^{*\prime}(\zeta) = \lim_{\Delta\overline{\zeta}\to 0}\left(\overline{\frac{f_1^*(\overline{\zeta}+\Delta\overline{\zeta}) - f_1^*(\overline{\zeta})}{\Delta\overline{\zeta}}}\right) = \overline{f_1^{*\prime}(\overline{\zeta})}$$

existuje, protože $f_1^*(\zeta)$ je regulární v bodě $\overline{\zeta}$. Můžeme tedy použít naší věty a vidíme, že funkce $f_2^*(\zeta)$ je analytickým pokračováním funkce $f_1^*(\zeta)$.

Z konstrukce naší funkce okamžitě plyne, že $\omega = f_2^*(\zeta)$ zprostředkuje konformní zobrazení oblasti D_2^* na oblast Δ_2^*, která je symetrická s oblastí Δ_1^*, podle Γ_1^*, a funkce

$$\omega = f^*(\zeta) = \begin{cases} f_1^*(\zeta) \text{ na } D_1^* \\ f_2^*(\zeta) \text{ na } D_2^* \end{cases}$$

Zprostředkuje konformní zobrazení oblasti $D_1^* + D_2^*$ na oblast $\Delta_1^* + \Delta_2^*$.

Posléze se vrátíme pomocí substitucí inversních k substitucím (3) k původním proměnným z a w. V oblasti D_2 symetrické s oblastí D_1 podle C dostaneme funkci $w = f_2(z)$ (§ 20), která je analytickým pokračováním funkce $f_1(z)$ v oblasti D_2 a zprostředkuje konformní zobrazení oblasti D_2 na oblast Δ_2 symetrickou s Δ_1 podle Γ. Při tom funkce (2) zprostředkuje zobrazení oblasti $D_1 + D_2$ na oblast $\Delta_1 + \Delta_2$. Tím jsme dokázali naše tvrzení.

V příštím paragrafu ukážeme na konkretních příkladech použití principu symetrie.

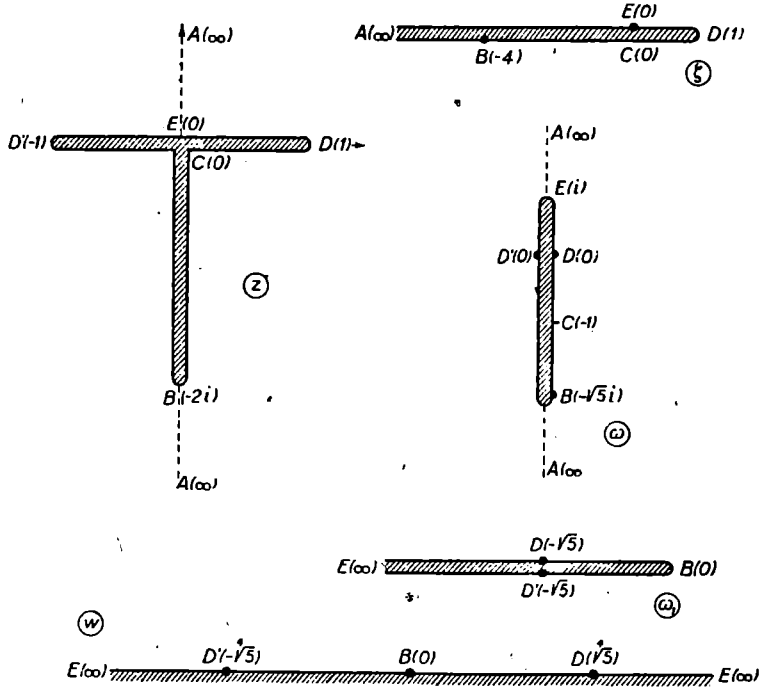
Poznámka. Princip symetrie připouští jisté zevšeobecnění:

Nechť hranice C oblasti D je analytická a nechť funkce $w = f(z)$ zprostředkuje konformní zobrazení oblasti D na oblast Δ tak, že hranice C přejde v analytickou hranici Γ. Pak funkce $f(z)$ připouští analytické pokračování přes tuto hranici a je tedy regulární na této hranici.

O hranici C říkáme, že je analytická, je-li křivka tvořící hranici dána funkcí reálného argumentu $z = z(t)$, $t_1 \leqq t \leqq t_2$, která je v okolí každého bodu t intervalu $\langle t_1, t_2\rangle$ rozvinutelná v potenční řadu.

Jsou-li celé hranice oblastí D a Δ analytickými křivkami, je funkce $f(z)$ regulární v uzavřené oblasti $\overline{D}$.

§ 83. Příklady. Příklad 1. Hledejme konformní zobrazení vnějšku písmene „T" (obr. 130) na horní polorovinu. Úlohu si nejprve doplníme pomocnými výřezy EA a AB podél imaginární osy (tečkování na obr. 130) a na horní polorovinu zobrazíme pomocnou oblast $ABCDEA$,



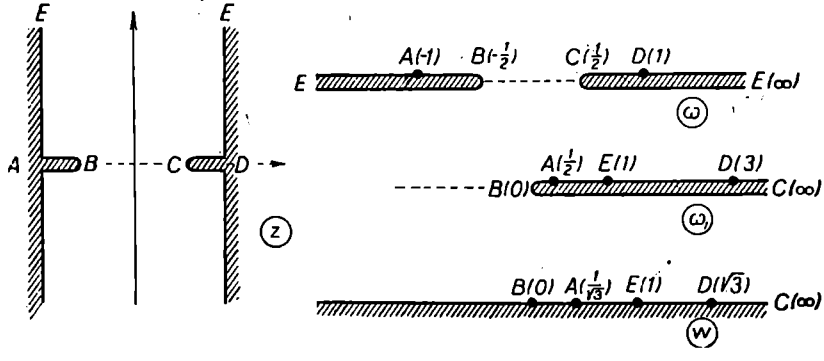
Obr. 130.

t. j. pravou polorovinu s výřezem podél intervalu (0, 1) reálné kladné poloosy. Tato pomocná úloha je řešena tímto sledem zobrazení:

$$\zeta = z^2, \quad \omega = \sqrt{\zeta - 1} = \sqrt{z^2 - 1}.$$

Funkce $\omega = \sqrt{z^2 - 1}$, jež vznikla superposicí těchto zobrazení, zobrazí oblast $ABCDEA$ roviny (z) na pravou polorovinu (ω). Přitom úsečka EAB hranice na kouli (z) (od bodu $E = 0$ po imaginární ose přes bod $z = \infty$ do bodu $z = B = -2i$) přejde v úsečku EAB hranice

na kouli (ω) (od bodu $\omega = E = \mathrm{i}$ po imaginární ose přes bod $\omega = \infty$ do bodu $B = -\mathrm{i}\sqrt{5}$). Nyní aplikujeme na funkci $\omega = \sqrt{z^2 - 1}$ princip symetrie a podle tohoto principu zobrazí analytické pokračování funkce $\omega = \sqrt{z^2 - 1}$ přes úsečku EAB levou polorovinu (z) s výřezem podél intervalu $(-1; 0)$ záporné reálné poloosy na levou polorovinu (ω). Při tom body rovin (z) a (ω) označené čárkováním budou vnitřními body oblastí a společnými body obou oblastí budou jen body písmene „T“ v rovině (z) a body úsečky BE na imaginární ose v rovině (ζ). Funkce $\omega = \sqrt{z^2 - 1}$ bude spolu se svým analytickým pokračováním (které označíme stejným symbolem) prostředkovat zob-



Obr. 131.

razení vnějšku písmene „T“ na celou rovinu ω s výřezem podél úsečky BE imaginární osy.

Nyní už zbývá jen zobrazit vnější úsečky BE imaginární osy v rovině (ω) na horní polorovinu. Tuto úlohu řeší lineární lomená funkce

$$\omega_1 = \frac{\omega + \mathrm{i}\sqrt{5}}{\omega - \mathrm{i}},$$

která zobrazí uvažovanou oblast na vnějšek úsečky $B = 0$, $E \neq \infty$ roviny ω_1. Protože se bod $D = 0$ zobrazí do bodu $\omega_1 = -\sqrt{5}$, je tato úsečka shodná se zápornou poloosou. Na konec ještě zobrazíme tuto oblast pomocí funkce $w = \sqrt{-\omega_1}$ na horní polorovinu (w). Funkce vzniklá superposicí těchto zobrazení

$$w = \sqrt{\frac{\omega + i\sqrt{5}}{i - \omega}} = \sqrt{\frac{\sqrt{z^2 - 1} + i\sqrt{5}}{i - \sqrt{z^2 - 1}}} \tag{4}$$

je hledaným řešením naší úlohy.

Příklad 2. Hledejme konformní zobrazení pásu $-\frac{1}{2}\pi < x < \frac{1}{2}\pi$ s výřezy podél intervalů $(-\frac{1}{2}\pi, -\frac{1}{6}\pi)$ a $(\frac{1}{6}\pi, \frac{1}{2}\pi)$ reálné osy na horní polorovinu. Nejprve opět provedeme doplňující výřez podél intervalu $(-\frac{1}{6}\pi, \frac{1}{6}\pi)$ reálné osy (čárkováno na obr. 131) a budeme nejprve konstruovat zobrazení polopásu $EABCDE$ (obr. 131) na polorovinu (ω). Podle př. 2 § 33 řeší tuto úlohu funkce

$$\omega = \sin z.$$

Aplikujeme-li princip symetrie na úsečku BC, dostaneme, že naše funkce zprostředkuje zobrazení dolního polopásu na dolní polorovinu a danou oblast zobrazí na rovinu (ω) s výřezem podél polopřímek EB a CE reálné osy (čárkovaný úsek na obr. 131 se při analytickém pokračování „setře" a ostatní body reálné osy zůstanou hraničními body).

Zbývá už jen zobrazit takto získanou oblast na horní polorovinu. Zobrazíme nejprve úsečku CEB na kouli (ω) na kladnou reálnou poloosu roviny (ω_1) pomocí lineární lomené funkce

$$\omega_1 = \frac{\omega + \frac{1}{2}}{\omega - \frac{1}{2}}$$

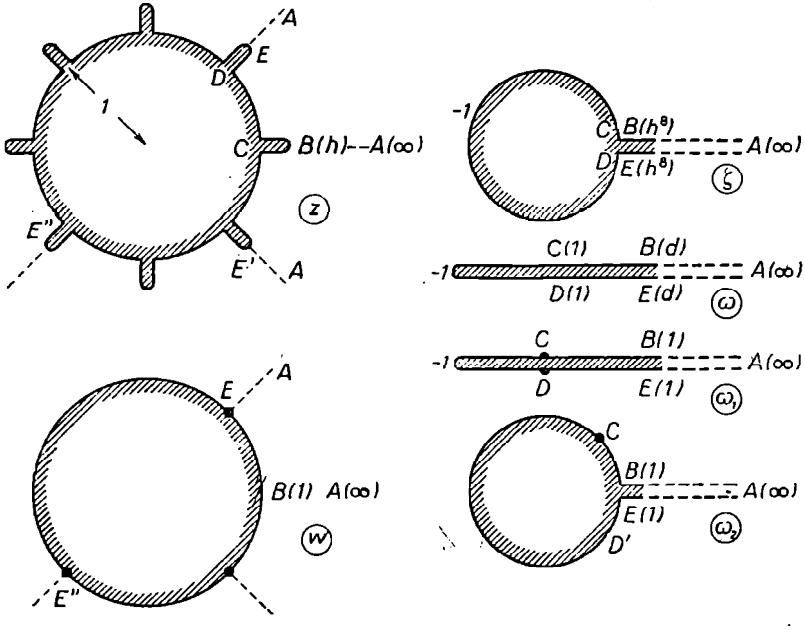
a pak takto získanou oblast zobrazíme na horní polorovinu (w) pomocí funkce $w = \sqrt{\omega_1}$. Superposicí našich zobrazení dostáváme hledané řešení naší úlohy:

$$w = \sqrt{\omega_1} = \sqrt{\frac{2\sin z + 1}{2\sin z - 1}}. \tag{5}$$

Příklad 3. Hledejme zobrazení vnějšku „mlýnského kola" na vnějšek jednotkové kružnice (obr. 132). Nejprve provedeme pomocné výřezy podél polopřímek AB a EA a zkonstruujeme zobrazení výseče $ABCDEA$ na podobnou výseč tak, aby body B a E byly „nárožní" (t. j. aby úsečky BC a DE se „smrštily" v oblouk kružnice). Nejprve sestrojíme zobrazení $\zeta = z^8$. Zobrazením

$$\omega = \frac{1}{2}\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right)$$

zobrazíme výseč na vnějšek polopřímky $-1 < \omega < \infty$, při čemž bodům B a E odpovídá bod $\omega = d = \frac{1}{2}\left(h^8 + \frac{1}{h^8}\right)$. Lineárním zobrazením $\omega_1 = \alpha\omega + \beta$ zobrazíme úsečku $-1 < \omega < d$ na úsečku



Obr. 132.

$-1 < \omega_1 < 1$. Z přiřazení bodů $-1 = -\alpha + \beta$ a $1 = \alpha d + \beta$ dostaneme $\alpha = \frac{2}{1+d}$ a $\beta = \frac{1-d}{1+d}$, po dosazení

$$\omega_1 = \frac{2\omega + 1 - d}{1 + d}.$$

Pak zobrazíme vnějšek úsečky $-1 < \omega_1 < 1$ na vnějšek jednotkové kružnice zobrazením

$$\omega_2 = \omega_1 + \sqrt{\omega_1^2 - 1}$$

[viz § 26 (12)]. Při tom čárkované výřezy přejdou v polopřímku $1 < \omega_2 < \infty$ a zobrazením

$$w = \sqrt[8]{\omega_2}$$

dostaneme výseč $|w| > 1$, $0 < \arg w < \frac{1}{4}\pi$, při čemž čárkované výřezy přejdou v polopřímky $\arg w = 0$, $|w| > 1$ a $\arg w = \frac{1}{4}\pi$, $|w| > 1$.

Na funkci vzniklou superposicí všech těchto zobrazení

$$w = \frac{\sqrt[8]{z^8 + \frac{1}{z^8} + 1 - d + \sqrt{\left(z^8 + \frac{1}{z^8} + 2\right)\left(z^8 + \frac{1}{z^8} - 2d\right)}}}{\sqrt[8]{1+d}} \tag{6}$$

aplikujeme princip symetrie. Podle tohoto principu připouští (6) analytické pokračování přes úsečku AB, které zobrazí výseč $AE'EA$ roviny (z) na výseč $AE'EA$ roviny (w) (body úsečky BA jsou při tom vnitřními body oblasti). Takto konstruované analytické pokračování můžeme opět dále pokračovat přes úsečku AE' a dostaneme zobrazení výseče $AE''EA$ roviny (z) na výseč $AE''EA$ roviny (w) (body úsečky $E'A$ jsou vnitřními body oblasti). Pokračujeme-li naši funkci ještě přes úsečku AE'', dostaneme zobrazení vnějšku „mlýnského kola" s výřezem podél polopřímky AE na vnějšek jednotkové kružnice s výřezem podél polopřímky AE. Aplikujeme-li na polopřímku princip symetrie znova a pokračujeme-li funkci (6) přes tuto polopřímku, dostáváme konečně hledané konformní zobrazení.

Poznámka. Je vidět, že (6) pro $\alpha = 1$ přejde (6) ve $w = z$, což je výsledek zcela pochopitelný, všimneme-li si toho, že pro $d = 1$ jsou „lopaty" kola rovny nule ($h = 1$). Pro lopaty o malé délce ($h \approx 1$) je veličina $d = \frac{1}{2}\left(h^8 + \frac{1}{h^8}\right)$ blízká 1. Položme $d = 1 + \eta$, kde η je tečně malé číslo a dosaďme do (6). Použijeme-li přibližných vzorců pro odmocninu, kde výraz pod odmocninou je blízký 1, $\sqrt[n]{1+\delta} \approx 1 + \frac{\delta}{n}$ (δ malé), dostaneme

$$w = \frac{\sqrt[8]{z^8 + \frac{1}{z^8} + \sqrt{\left(z^8 - \frac{1}{z^8}\right)^2 - 2\eta\left(z^8 + \frac{1}{z^8} + 2\right)}}}{\sqrt[8]{2+\eta}} \approx$$

$$\approx \frac{1}{\sqrt[8]{2+\eta}} \sqrt[8]{2z^8 - \eta\,\frac{z^8+1}{z^8-1}} \approx$$

$$\approx \left(1 - \frac{\eta}{16}\right)\left(z - \frac{\eta}{16\sqrt[8]{2z^8}}\,\frac{z^8+1}{z^8-1}\right).$$

Roznásobíme-li závorky a zanedbáme-li veličiny nekonečně malé druhého řádu, dostaneme přibližnou hodnotu

$$w \approx z - \frac{1}{16}\eta\left(z + \frac{1}{z^8\sqrt[8]{2}}\,\frac{z^8+1}{z^8-1}\right). \tag{7}$$

Pro dostatečně velké $|z|$ je druhý člen v závorce zanedbatelně malý v porovnání s prvým členem a dostáváme konečně velmi jednoduchý vzorec

$$w \approx \left(1 - \frac{1}{16}\eta\right) z. \tag{8}$$

Vzorce (7) a (8) dávají hlavní část zobrazení (6), lineární vzhledem k parametru η.

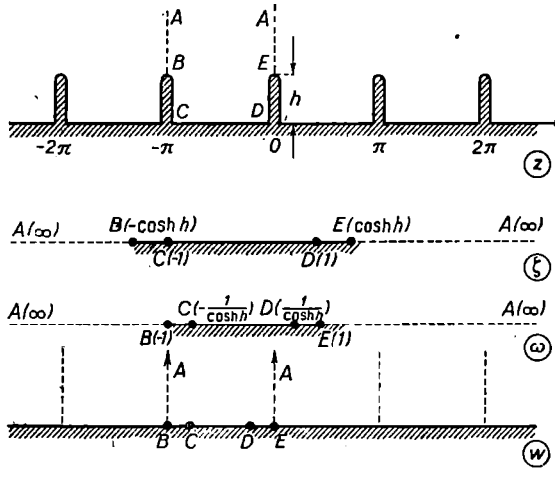
Vlastnosti konfotmních zobrazení při nekonečně malých změnách některých parametrů zobrazení (specielně v případech nekonečně malých deformací oblastí) se studují pomocí *variačních method*. Důležité a hluboké výsledky z tohoto oboru jsou uloženy v pracích sovětského matematika *M. A. Lavrentěva*.*)

Příklad 4. Hledejme konformní zobrazení „mříže" z obr. 133 na horní polorovinu. Výřezy jsou podél úseček $x = k\pi$, $0 < y < h$, $k =$

*) Základy těchto method jsou vyloženy na př. v knize M. A. Lavrentěv: Konformnyje otobraženija (Konformní zobrazení), GOSTĚCHIZDAT, Moskva 1946, Lavrentěv-Šabat: Metody teorii funkcij kompleksnogo peremĕnogo, GOSTĚCHIZDAT, Moskva, 1951, kap. IV (v této knize najde čtenář mnoho doplňující látky k látce vykládané v naší knize). (Pozn. překl.)

$= 0, \pm 1, \ldots$ Nejprve sestrojíme pomocné výřezy podél polopřímek AB a EA (čárkované na obr. 133). a sestrojíme konformní zobrazení takto sestrojeného polopásu na podobný polopás tak, že body B a E budou nárožní. Funkce

$$\zeta = \cos z \tag{9}$$



Obr. 133.

zobrazí náš polopás na horní polorovinu, neboť pro $z = x$ probíhající úsečku CD probíhá ζ interval $(0, 1)$, pro $z = iy$ probíhající polopřímku DA, $\zeta = \cos iy = \cosh y$ probíhá polopřímku $(1, iy)$ a pro $z = -\pi + iy$ probíhající polopřímku AC, $\zeta = \cos(-\pi + iy) = -\cosh y$ probíhá polopřímku $(-\infty, -1)$ (viz princip zachování hranic § 23). Body B a E při tom přejdou v body $-\cosh h$ a $\cosh h$; pak provedeme kontrakci roviny ζ tak, aby tyto body přešly v body -1 a $+1$. Tuto úlohu řeší funkce:

$$\omega = \frac{1}{\cosh h}\,\zeta.$$

Nakonec pomocí zobrazení

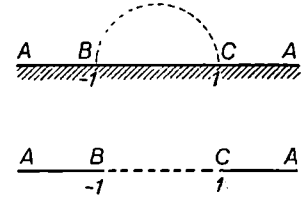
$$w = \arccos\omega$$

inversního k zobrazení (9) zobrazíme horní polorovinu (ω) v polopás

$-\pi < \operatorname{Re} w < 0$, $\operatorname{Im} w > 0$ tak, že bodům $B(-1)$ a $E(-1)$ odpovídají body $B(-\pi)$ a $E(0)$. Při tom bereme tu větev $\arccos\omega$, která má v bodě $\omega = 1$ hodnotu 0. Superposice našich zobrazení

$$w = \arccos \frac{\cos z}{\cosh h} \tag{10}$$

zprostředkuje zobrazení polopásu $-\pi < \operatorname{Re} z < 0$, $\operatorname{Im} z > 0$ na polopás $-\pi < \operatorname{Re} w < 0$, $\operatorname{Im} w < 0$, při čemž polopřímky AB a AE přejdou v polopřímky $\operatorname{Re} w = -\pi$, $\operatorname{Im} w < 0$ a $\operatorname{Re} w = 0$, $\operatorname{Im} w = 0$. Pak aplikujeme na funkci (10) princip symetrie. Aplikujeme-li princip symetrie na naši funkci nekonečně mnohokrát za sebou na obě strany, vidíme, že naše funkce řeší danou úlohu.



Obr. 134.

Nakonec uvedeme ještě jeden případ, kde se aplikuje princip symetrie na oblouk kružnice.

Příklad 5. Jak je známo (§ 26), funkce

$$w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) \tag{11}$$

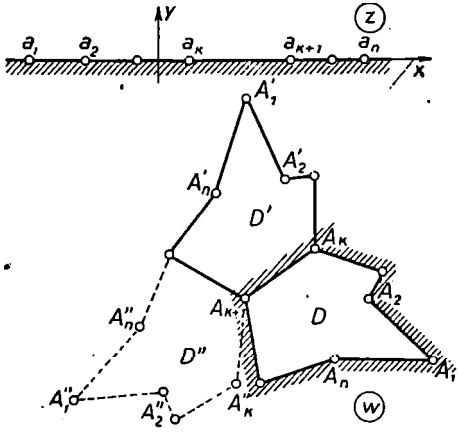
zprostředkuje konformní zobrazení vnějšku kruhu $|z| > 1$ na vnějšek úsečky $(-1, 1)$ reálné osy. Při tom horní část vnějšku kružnice $ABCA$ se zobrazí na horní poloroviny (w) (obr. 134). Oblouk $\overset{\frown}{BC}$ kružnice $|z| = 1$ se zobrazí na interval $(-1, 1)$. Aplikujeme-li princip symetrie, vidíme, že analytické pokračování funkce (11) zprostředkuje konformní zobrazení oblasti symetrické s $ABCA$ podle oblouku $\overset{\frown}{BC}$, t. j. vnitřku horního jednotkového polokruhu $|z| < 1$ na dolní poloroviny. Tedy funkce (11) zároveň se svým analytickým pokračováním zprostředkuje zobrazení celé horní poloroviny (z) na rovinu (w) s výřezem podél polopřímek $(-\infty, 1)$ a $(1, \infty)$.

§ 84. Integrál Christoffela-Schwarze nám poskytuje funkce zprostředkující konformní zobrazení horní poloroviny na polygonální oblasti, t. j. oblasti, jejichž hranice jsou tvořeny konečným počtem úseček. Takové oblasti se velmi často vyskytují v aplikacích a z toho plyne velký praktický význam Christoffelova-Schwarzova integrálu.

Budiž v rovině (w) dán libovolný uzavřený mnohoúhelník D obsahující jen konečné body.*) Podle věty o existenci konformního zobrazení § 23 existuje jen jediná funkce

$$w = f(z),$$

zprostředkující konformní zobrazení horní poloroviny na mnohoúhelník D tak, že se při tom tři libovolné pevné body reálné osy na příklad (a_1, a_2 a a_3) zobrazí na tři libovolné body hranice D, na příklad na vrcholy A_1, A_2 a A_3. Předpokládejme nejprve, že už naši funkci známe, t. j. známe body a_k, $k = 4, 5, 6, \ldots$ osy x, které v zobrazení odpovídají vrcholům mnohoúhelníka A_k a budeme se snažit najít analytické vyjádření této funkce.



Obr. 135.

Protože na libovolné úsečce (a_k, a_{k+1}) osy x nabývá funkce $w = f(z)$ hodnot ležících na přímce A_k, A_{k+1}, aplikujeme na ni princip symetrie a její analytické pokračování přes tuto úsečku do dolní poloroviny $\operatorname{Im} z < 0$ zprostředkuje zobrazení dolní poloroviny na mnohoúhelník D', který bude symetrický s mnohoúhelníkem D podle strany A_kA_{k+1}. Pak můžeme znova pokračovat naši funkci přes libovolnou úsečku $(a_{k'}, a_{k'+1})$ do horní roviny a příslušné analytické pokračování bude zobrazovat horní polorovinu na mnohoúhelník D'' symetrický s mnohoúhelníkem D' podle strany $A_{k'}$, $A_{k'+1}$.

Představme si nyní, že jsme provedli všechna možná taková analytická prodloužení [i přes úsečku (a_n, a_1) na kouli (z), která obsahuje bod $z = \infty$] v libovolném počtu. Jako výsledek dostaneme úplnou analytickou funkci $w = F(z)$ (§ 63), pro kterou bude funkce $w = f(z)$ jednou z jejích regulárních větví.

*) V příštím paragrafu upustíme od tohoto omezení.

Všimněme si ještě toho, že libovolné dvě regulární větve $w = f^*(z)$ a $w = f^{**}(z)$ této funkce jsou v horní polorovině svázány velmi jednoduchým vztahem. Podle naší úvahy vznikly tyto dvě větve jedna z druhé sudým počtem pokračování přes úsečky (a_k, a_{k+1}) a zprostředkují zobrazení vrchní poloroviny na dva mnohoúhelníky D^* a D^{**}. Mnohoúhelník D^{**} dostaneme z mnohoúhelníka D^* (resp. naopak) sudým počtem symetrií podle stran. Každý pár symetrií se však redukuje na otočení a posun. Tedy mnohoúhelník D^{**} dostaneme z mnohoúhelníka D^* otočením a posunem. Z toho plyne, že v horní polorovině

$$f^{**}(z) \equiv e^{i\alpha} f^*(z) + a, \tag{12}$$

kde α je reálná konstanta charakterisující otočení a a komplexní konstanta charakterisující posun. Podobné tvrzení platí zřejmě o libovolných dvou regulárních větvích funkce $F(z)$ v dolní polorovině.

Dále, funkce

$$\varphi(z) = \frac{f''(z)}{f'(z)}$$

je regulární v horní polorovině, neboť funkce $f'(z)$ jako derivace funkce zprostředkující jedno-jednoznačné konformní zobrazení je všude v horní polorovině různá od nuly. Z našich úvah plyne, že funkce $\varphi(z)$ bude jednoznačnou pro všechna možná analytická pokračování funkce $f(z)$. Neboť ať vezmeme jakékoliv dvě regulární větve funkce $F(z)$, pak z (12) plyne

$$f^{**}(z) = e^{i\alpha} f^{*\prime}(z), \quad f^{**\prime\prime}(z) = e^{i\alpha} f^{*\prime\prime}(z)$$

a

$$\frac{f^{**\prime\prime}(z)}{f^{**\prime}(z)} = \frac{f^{*\prime\prime}(z)}{f^{*\prime}(z)},$$

t. j. hodnota funkce $\varphi(z)$ v libovolném bodě je nezávislá na volbě větve funkce $F(z)$.

Můžeme tedy říci, *že funkce $\varphi(z)$ spolu se všemi svými analytickými prodlouženími* (která označíme tímtéž symbolem) *je regulární ve všech bodech roviny z kromě bodů $z = a_k$.**) Objasníme si nyní chování funkce $\varphi(z)$

*) Regularita funkce $\varphi(z)$ v bodech $z \neq a_k$ reálné osy, v bodě $z = \infty$ a v bodech dolní poloroviny plyne z toho, že $f(z)$ je možno analyticky pokračovat do těchto bodů tak, že derivace analytického pokračování bude nenulová.

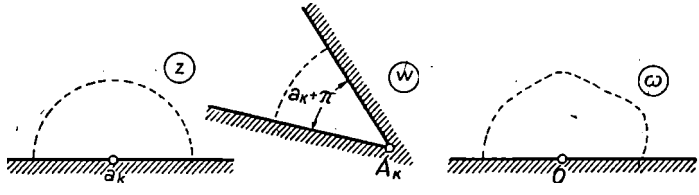
v těchto bodech. Označme $\alpha_k\pi$ úhel mnohoúhelníka ve vrcholu A_k a sestrojme si pomocnou rovinu proměnné

$$\omega = (w - w_k)^{\frac{1}{\alpha_k}}.$$

Úhel mnohoúhelníka se při přechodu z roviny (w) do roviny (ω) zřejmě „napřímí" (obr. 136) a na funkci

$$\omega = \omega(z) = [f(z) - w_k]^{\frac{1}{\alpha_k}}$$

která zprostředkuje zobrazení jistého půlkružnicového okolí bodu $z = a_k$ v horní polorovině na půlkružnicové okolí bodu $\omega = 0$ v horní



Obr. 136.

polorovině (ω) aplikujeme princip symetrie. Můžeme tedy sestrojit analytické pokračování do celého okolí bodu a_k, v němž ji rozvineme v Taylorovu řadu:

$$\omega(z) = [f(z) - w_k]^{\frac{1}{\alpha_k}} = c_1(z - a_k) + c_2(z - a_k)^2 + \dots \qquad (13)$$

V rozvoji (13) odpadne absolutní člen, neboť $\omega(a_k) = 0$, ale $c_1 = \omega'(a_k) \neq 0$, neboť $\omega(z)$ zprostředkuje jedno-jednoznačné konformní zobrazení (viz § 15, poznámka 3).

Z (13) dostaneme

$$f(z) = w_k + (z - a_k)^{\alpha_k}[c_1 + c_2(z - a_k) + \dots]^{\alpha_k}, \quad c_1 \neq 0,$$

kde výraz v závorce pod exponentem α_k je regulární funkce v okolí bodu a_k, takže ji můžeme rozvinout v Taylorovu řadu a dostaneme

$$\begin{aligned} f(z) &= w_k + (z - a_k)^{\alpha_k}[c_1' + c_2'(z - a_k) + \dots] = \\ &= w_k + c_1'(z - a_k)^{\alpha_k} + c_2'(z - a_k)^{\alpha_k + 1} + \dots \end{aligned} \qquad (14)$$

Ze (14) snadno vypočteme

$$\varphi(z) = \frac{f''(z)}{f'(z)} = \frac{(\alpha_k - 1)\,\alpha_k c_1'(z - a_k)^{\alpha_k - 2} + \dots}{\alpha_k c_1'\,(z - a_k)^{\alpha_k - 1} + \dots} =$$

$$= \frac{1}{z - a_k} \cdot \frac{(\alpha_k - 1)\,\alpha_k c_1' + \dots}{\alpha_k c_1' + \dots},$$

kde jsme si vytkli v čitateli $(z - a_k)^{\alpha_k - 1}$ a ve jmenovateli $(z - a_k)^{\alpha_k - 1}$ a zkrátili. Druhý z činitelů je funkce regulární v bodě $z = a_k$ a můžeme ji tedy rozvinout v potenční řadu

$$(\alpha_k - 1) + c_1''(z - a_k) + c_2''(z - a_k)^2 + \dots,$$

kde absolutní člen najdeme z hodnoty zlomku pro $z = a_k$. Z toho

$$\varphi(z) = \frac{1}{z - a_k}\{(\alpha_k - 1) + c_1''(z - a_k) + c_2''(z - a_k)^2 + \dots\} =$$

$$= \frac{\alpha_k - 1}{z - a_k} + c_1'' + c_2''(z - a_k) + \dots \tag{15}$$

Rovnice (15) nám dává Laurentův rozvoj funkce $\varphi(z)$ v okolí bodu $z = a_k$. Z něho plyne, že *funkce $\varphi(z)$ má v bodě $z = a_k$ pól prvého řádu s residuem rovným $\alpha_k - 1$, kde $\alpha_k \pi$ je úhel mnohoúhelníka ve vrcholu A_k.*

Funkce $\varphi(z)$ bude tedy mít v celé rovině (z) jen n singulárních bodů — pólů prvého řádu. Odečteme-li od funkce $\varphi(z)$ hlavní části jejích Laurentových rozvojů v okolí pólů

$$\psi(z) = \varphi(z) - \frac{\alpha_1 - 1}{z - a_2} - \frac{\alpha_2 - 1}{z - a_2} - \dots - \frac{\alpha_n - 1}{z - a_n} \tag{16}$$

dostaneme funkci regulární v celé rovině a tedy podle Liouvilleovy věty (§ 69, § 71) identicky rovnou konstantě. Abychom stanovili její hodnotu, uvážíme, že funkce $\varphi(z)$ je regulární v bodě $z = \infty$ (který je vnitřním bodem úsečky (a_n, a_1)) a má tedy v okolí bodu $z = \infty$ rozvoj

$$f(z) = c_0 + \frac{c_{-p}}{z^p} + \frac{c_{-p+1}}{z^{p+1}} + \dots, \tag{17}$$

kde c_p je první koeficient Laurentova rozvoje funkce $f(z)$ různý od nuly. Ze (17) plyne pro funkci $\varphi(z)$ v okolí bodu $z = \infty$

$$\varphi(z) = \frac{f''(z)}{f'(z)} = \frac{p(p+1)\frac{c_{-p}}{z^{p+2}} + \dots}{-p\frac{c_{-p}}{z^{p+1}} + \dots} =$$

$$= \frac{1}{z}\frac{p(p+1)c_{-p} + \dots}{-pc_{-p}} = -\frac{p+1}{z} + \dots,$$

a z toho: $\varphi(\infty) = 0$. V (16) jsou však pro $z = \infty$ rovny nule i všechny ostatní členy napravo a tedy i $\psi(\infty)$, t. j. $\psi(\infty) = 0$, a z toho

$$\varphi(z) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\ln f'(z) = \frac{\alpha_1 - 1}{z - a_1} + \frac{\alpha_2 - 1}{z - a_2} + \dots + \frac{\alpha_n - 1}{z - a_n}$$

(kde ln napravo je hlavní hodnota logaritmu a ln nalevo jeho odpovídající hodnoty). Odlogaritmováním naší rovnice dostáváme výraz pro derivaci konformního zobrazení

$$f'(z) = C(z - \alpha_1)^{\alpha_1 - 1}(z - \alpha_2)^{\alpha_2 - 1} \dots (z - \alpha_n)^{\alpha_n - 1}. \qquad (18)$$

Integrováním rovnice (18) podél libovolné křivky v horní polorovině dostaneme hledaný *Christoffelův-Schwarzův integrál*

$$f(z) = C\int_{z_0}^{z}(z - a_1)^{\alpha_1 - 1}(z - a_2)^{\alpha_2 - 1} \dots (z - a_n)^{\alpha_n - 1}\,\mathrm{d}z + C_1. \qquad (19)$$

Znovu si připomeňme, že body a_k jsou body reálné osy, odpovídající vrcholům A_k mnohoúhelníka, a α_k velikost příslušných vnitřních úhlů měřená v π (úhel při vrcholu A_k je $\alpha_k\pi$).

Integrál Christoffela-Schwarze jsme odvodili za předpokladu, že body $a_1, a_2, \dots, a_n$ reálné osy, kterým odpovídají vrcholy $A_1, A_2, \dots, \dots, A_n$ mnohoúhelníka, jsou nám známy. V praktických úlohách jsou však dány jen vrcholy mnohoúhelníka $A_1, A_2, \dots$ a body $a_1, a_2, \dots$ zůstanou neurčeny. Podle věty o existenci konformního zobrazení (§ 23) můžeme tři z nich (na př. a_1, a_2, a_3) volit libovolně a ostatní zároveň s konstantami C a C_1 se musí určit z podmínek zobrazení.

Způsoby výpočtu α_k, C a C_1 budou ukázány níže na konkretních praktických výpočtech. Principiální možnost jejich výpočtu plyne z odvození vzorce (19). Budiž dán mnohoúhelník D v rovině (w); vybereme si obrazy tří libovolných jeho vrcholů, na př. a_1, a_2, a_3. Pak

podle věty o existenci konformního zobrazení § 23 existuje jediné zobrazení $z = \varphi(w)$ mnohoúhelníku D na polorovinu $\operatorname{Im} z > 0$. Označme si $a_4, a_5, \ldots, a_n$ obrazy ostatních vrcholů mnohoúhelníka D a budiž $w = f(z)$ inversní funkce k funkci $z = \varphi(w)$. Podle toho, co jsme si dokázali výše, je funkce $w = f(z)$ definována vzorcem (19), kde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ jsou výše uvedené body a C a C_1 dvě konstanty. Jsou tedy body a_k (při volbě tří z nich) určeny jednoznačně*) zároveň s konstantami C a C_1 pro libovolný mnohoúhelník.

§ 85. Singulární případ. Předpokládejme nyní, že jeden z bodů a_k na př. a_n je bodem v nekonečnu. Abychom transformovali náš případ na případ předešlý, použijeme lineárního zobrazení**)

$$\zeta = a'_n - \frac{1}{z}, \tag{20}$$

které zobrazí polorovinu $\operatorname{Im} z > 0$ na polorovinu $\operatorname{Im} \zeta < 0$, při čemž převádí body $a_1, a_2, \ldots, a_n = \infty$ v konečné body $a'_1, a'_2, \ldots, a'_n$. Pak funkce $w = g(\zeta)$ zobrazující $\operatorname{Im} \zeta > 0$ na D je dána vzorcem

$$w = C' \int_{\zeta_0}^{\zeta} (\zeta - a'_1)^{\alpha_1 - 1} (\zeta - a'_2)^{\alpha_2 - 1} \ldots (\zeta - a'_n)^{\alpha_n - 1} \, \mathrm{d}\zeta + c'_1.$$

Proveďme v posledně uvedeném vzorci transformaci proměnných (20):

$$w = C' \int_{z_0}^{z} \left(a'_n - a'_1 - \frac{1}{z}\right)^{\alpha_1 - 1} \left(a'_n - a'_2 - \frac{1}{z}\right)^{\alpha_2 - 1} \ldots \left(-\frac{1}{z}\right)^{\alpha_n - 1} \frac{\mathrm{d}z}{z^2} + C'_1.$$

Poslední výraz ještě upravíme pomocí vztahu pro součet úhlů n-úhelníka

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = n - 2$$

známého z elementární geometrie. Dostaneme

---

*) Změna konstant C a C_1 vede k lineárnímu zobrazení, jsou tedy obě konstanty určeny danými vzorci a mnohoúhelníkem jednoznačně.

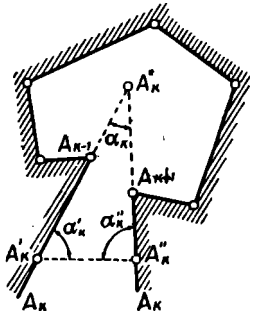
**) Ve (20) je a'_n libovolná reálná konstanta a znaménko bereme tak, aby horní polorovina přešla opět v horní polorovinu. Je-li některý z bodů a_k roven 0, přejde (20) na tvar $\zeta = a'_n - \frac{1}{z - a}$, kde a je různé od všech a_k, jinak by jeden z bodů a'_k byl roven ∞.

$$w = C' \int_{z_0}^{z} \{(a_n' - a_1')\, z - 1\}^{\alpha_1 - 1} \{(a_n' - a_2')\, z - 1\}^{\alpha_2 - 1} \dots$$

$$\dots \{(a_n' - a_{n-1}')\, z - 1\}^{\alpha_n - 1 - 1} (-1)^{\alpha_n - 1} \frac{\mathrm{d}z}{z^{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n - n + 2}} + C_1' =$$

$$= C \int_{z_0}^{z} (z - a_1)^{\alpha_1 - 1} (z - a_2)^{\alpha_2 - 1} \dots (z - a_{n-1})^{\alpha_n - 1 - 1} \, \mathrm{d}z + C_1. \qquad (21)$$

Odpovídá-li tedy některému vrcholu mnohoúhelníka nekonečně vzdálený bod, vypadne v Christoffelově-Schwarzově integrálu jemu odpovídající součinitel. Této vlastnosti se používá k zjednodušení Christoffelova-Schwarzova integrálu (viz § 86 a další).



Obr. 137.

Pro praktické výpočty je důležitý i případ vyloučený v předcházejícím paragrafu, je-li totiž jeden nebo i více vrcholů mnohoúhelníka v nekonečnu. Nechť na př. vrchol A_k mnohoúhelníka D leží v nekonečnu (obr. 137). Pak vybereme na polopřímkách $A_{k-1}A_k$ a $A_{k+1}A_k$ po jednom bodu, označíme je A_k' a A_k''. Spojíme pak body A_k' a A_k'' úsečkou a budeme se zabývat takto sestrojeným $(n+1)$-úhelníkem. Funkce zobrazující polorovinu $\operatorname{Im} z > 0$ na tento mnohoúhelník má podle (19) tvar

$$w = C \int_{0}^{z} (z - a_1)^{\alpha_1 - 1} (z - a_2)^{\alpha_2 - 2} \dots (z - a_k')^{\alpha' k - 1} (z - a_k'')^{\alpha'' k - 1} \dots$$
$$\dots (z - a_n)^{\alpha_n - 1} \, \mathrm{d}z + C_1,$$

kde α_k', α_k'' jsou vnitřní úhly při vrcholech A_k' a A_k'' měřeny v π a body a_k', a_k'' jsou body osy x odpovídající těmto vrcholům. Pro $A_k' \to A_k$ a $A_k'' \to A_k$ body a_k', a_k'' splynou v jediný bod a_k odpovídající bodu A_k a uvedený vzorec bude mít v limitě tvar

$$w = C \int_{0}^{z} (z - a_1)^{\alpha_1 - 1} \dots (z - a_k)^{\alpha' k + \alpha'' k - 1} \dots (z - a_n)^{\alpha n - 1} \, \mathrm{d}z + C_1.$$

Označme $\pi\alpha_k$ úhel polopřímek $A_{k-1}A_k$ a A_kA_{k+1} v konečném průsečíku A_k^* vzatý se znaménkem minus. Pro úhly trojúhelníka $A_k'A_k''A_k^*$ (obr. 137) platí

$$\alpha_k' + \alpha_k'' - \alpha_k = 1, \quad \alpha_k' + \alpha_k'' - 2 = \alpha_k - 1,$$

a vzorec nabývá konečného tvaru

$$w = C \int_0^z (z - a_1)^{\alpha_1 - 1} (z - a_2)^{\alpha_2 - 1} \dots (z - a_k)^{\alpha_k - 1} \dots$$
$$\dots (z - a_n)^{\alpha_n - 1} \, dz + C_1.$$

Podobnou úvahu bychom provedli, kdyby leželo v nekonečnu i více vrcholů mnohoúhelníka D. Tedy: *integrál Christoffelův-Schwarzův zůstává v platnosti i pro případ, kdy jeden nebo více vrcholů mnohoúhelníka leží v nekonečnu, bereme-li za úhel dvou přímek protínajících se v nekonečnu úhel v jejich konečném průsečíku s opačným znaménkem* (viz § 18).

§ 86. Příklady. Uvedeme z počátku dva příklady, které nám budou ilustrovat methodu výpočtu, ale nedají nové výsledky.

Příklad 1. Polopás $-\frac{1}{2}\pi < \operatorname{Re} w < \frac{1}{2}\pi$, $\operatorname{Im} w > 0$ představuje „trojúhelník" s vrcholy $A_1 = -\frac{1}{2}\pi$, $A_2 = \frac{1}{2}\pi$, $A_3 = \infty$. Úhly při vrcholech v tomtéž pořádku jsou $\alpha_1 = \frac{1}{2}$, $\alpha_2 = \frac{1}{2}$, $\alpha_3 = 0$ ($\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$ jako pro každý trojúhelník). Pro přehlednost si zapíšeme údaje do tabulky, do níž zaneseme také volbu bodů a_k:

A_k	α_k	a_k
$-\frac{1}{2}\pi$	$\frac{1}{2}$	-1
$\frac{1}{2}\pi$	$\frac{1}{2}$	1
∞	0	∞

Integrál Christoffelův-Schwarzův má tvar

$$w = C \int_0^z (z + 1)^{-\frac{1}{2}} (z - 1)^{-\frac{1}{2}} \, dz + C_1 =$$

$$= C' \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}} + C_1 = C' \arcsin z + C_1.$$

Pomocí odpovídajících si dvojic bodů a_1, a_2 a A_1, A_2 dostaneme

$$-\tfrac{1}{2}\pi = -\tfrac{1}{2}\pi C' + C_1, \quad \tfrac{1}{2}\pi = \tfrac{1}{2}\pi C' + C_1,$$

z toho

$$C_1 = 0, \quad C' = 1$$

a funkce zobrazící polorovinu na polopás bude mít tvar

$$w = \operatorname{arcsin} z. \tag{22}$$

Inversní funkci $z = \sin w$ jsme odvodili v § 31 elementárním způsobem.

Příklad 2. Polorovina $v > 0$ s výřezem podél úsečky imaginární osy $0 < v < h$, $u = 0$ $(w = u + \mathrm{i}v)$ představuje čtyřúhelník. Úhly ve vrcholech a body odpovídající vrcholům jsou zaneseny v tabulce. Tři z nich si volíme libovolně, čtvrtý označíme ξ, úhel v nekonečnu je roven -1, neboť polopřímky A_2A_1 a A_4A_1 jsou jednak pokračováním druhé, t. j. svírají spolu úhel 1. $\Sigma\alpha_k = 2$ jako v každém čtyrúhelníku.

A_k	α_k	a_k
∞	-1	∞
0	$\frac{1}{2}$	-1
$h\mathrm{i}$	2	0
0	$\frac{1}{2}$	ξ

Abychom stanovili bod $a_4 = \xi$, použijeme principu symetrie. Hledané zobrazení bychom též obdrželi jako analytické pokračování zobrazení druhého kvadrantu roviny (z) na druhý kvadrant roviny (w), při čemž $\infty \longleftrightarrow \infty$, $\mathrm{i}h \longleftrightarrow 0$. Z toho plyne, že bod a_4 musí být symetrický s bodem a_2 podle imaginární osy, t. j. $a_4 = \xi = 1$, a integrál Christoffela-Schwarze má tvar

$$w = C \int (z+1)^{-\frac{1}{2}} z(z-1)^{-\frac{1}{2}}\, \mathrm{d}z =$$

$$-C \int \frac{z\,\mathrm{d}z}{\sqrt{z^2-1}} = C' \sqrt{z^2-1} + C_1$$

(kde místo omezeného integrálu jsme vzali neurčitý integrál, což můžeme udělat, neboť konstanta C_1 je zcela libovolná). Pro určení konstant C' a C_1 použijeme toho, že si odpovídají body a_2, A_2 a a_3, A_3.

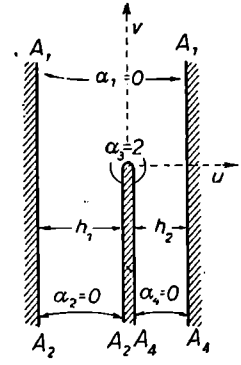
Odtud $0 = 0 + C_1$, $ih = iC' + C_1$; $C_1 = 0$, $C' = h$ a hledaná funkce má tvar (viz § 27):

$$w = h\sqrt{z^2 - 1}. \tag{23}$$

Uvedeme nyní několik příkladů nikoliv elementárního charakteru, jejichž řešení bez pomoci Christoffelova-Schwarzova integrálu by bylo značně obtížné.

Příklad 3. Oblast zobrazená na obr. 138 je v podstatě čtyřúhelník s třemi vrcholy v nekonečnu. Jeho zadání a odpovídající si body jsou zaneseny v tabulce. Tři body a_k jsou voleny libovolně, čtvrtý označíme ξ, úhly v bodě $w = \infty$ jsou vesměs rovny nule, neboť odpovídající polopřímky jsou vesměs rovnoběžné. $\Sigma\alpha_k = 2$ jako v každém čtyrúhelníku:

A_k	α_k	a_k
∞	0	∞
∞	0	-1
0	2	ξ
∞	0	1



Obr. 138.

Christoffelův-Schwarzův integrál má tvar

$$w = C\int (z+1)^{-1}(z-\xi)(z-1)^{-1}\,dz = C\int \frac{z-\xi}{z^2-1}\,dz =$$

$$= C\left\{\frac{1+\xi}{2}\ln(z+1) + \frac{1-\xi}{2}\ln(z-1)\right\} + C_1$$

a obsahuje tři neznámé konstanty C, C_1 a ξ. Abychom určili C_1 a ξ, provedeme tuto úvahu: když bod z oběhne bod $a_2 = -1$ po libovolně nekonečně malé půlkružnici C_r poloměru r (t. j. vektor $z + 1 = re^{i\varphi}$ se otáčí a mění argument od π do 0), musí odpovídající bod přejít z polopřímky A_1A_2 na polopřímku A_2A_3, t. j. funkce w musí mít přírůstek

$$\Delta w = h_1 + o(r),$$

kde $o(r)$ je komplexní veličina nekonečně malého řádu pro $r \to 0$.

Tuto úvahu potvrzuje i fakt, že se obraz kružnice C_r pro dostatečně malá r málo liší od nejkratší úsečky spojující polopřímky A_1A_2 a A_2A_3.*) Pro takový nekonečně malý přírůstek Δz člen s $\ln(z-1)$ v Christoffelově-Schwarzově integrálu bude mít nekonečně malý přírůstek v důsledku spojitosti této funkce a konečný je jen přírůstek funkce $\ln(z+1) = \ln r + i\varphi$, který je roven $-\pi i$. Odtud

$$\Delta w = -\tfrac{1}{2}C(1+\xi)\pi i + o(r),$$

kde $o(r)$ je nekonečně malá komplexní veličina pro $r \to 0$. Položíme-li oba výrazy pro Δw sobě rovny a přejdeme-li k limitě pro $r \to 0$, dostaneme

$$-\tfrac{1}{2}C(1+\xi)\pi i = h_1.$$

Analogicky, jestliže bod z oběhne bod $a_4 = 1$ po nekonečně malé půlkružnici poloměru r, odpovídající bod w musí přejíti z polopřímky A_2A_3 na polopřímku A_4A_1, t. j. $\Delta w = h_2 + o(r)$. S druhé strany $\Delta w = C\frac{1-\xi}{2}(-\pi i) + o(r)$, odtud

$$-\tfrac{1}{2}(1-\xi)\pi i = h_2.$$

Porovnáním obou rovnic dostáváme hledané hodnoty

$$C = \frac{i}{\pi}(h_1 + h_2), \quad \xi = \frac{h_1 - h_2}{h_1 - h_2}$$

a funkce zprostředkující hledané zobrazení je

$$w = \frac{i}{\pi}\{h_1 \ln(z+1) + h_2 \ln(z-1)\} + C_1. \tag{24}$$

Konstantu C_1 určíme z přiřazení bodu $a_3 = \xi$ a $A_3 = 0$:

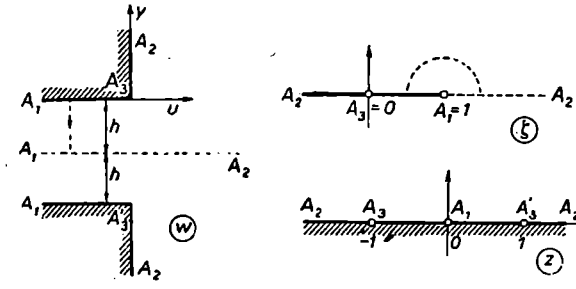
$$C_1 = -h_2\pi^2 + \pi i \ln h_1^{h_1} h_2^{h_2} \left(\frac{2}{H}\right)^H,$$

kde $H = h_1 + h_2$.

Příklad 4. Oblast z obr. 139 představuje v podstatě čtyrúhelník, jehož dva body leží v bodě $w = \infty$. Pomocí pomocného výřezu (čár-

*) Předpokládáme tento fakt jako zřejmý, ale bylo by možné ho též přesně dokázat.

kovaného na obr. 139) v ose horizontální části a aplikováním principu symetrie můžeme celou úlohu převést v úlohu zobrazení poloviny nakreslené oblasti, na př. horní na horní polorovinu. Uvažovaná



Obr. 139.

polovina nakreslené oblasti je v podstatě trojúhelníkem s dvěma vrcholy v bodě $w = \infty$. Zadání a body a_k, odpovídající vrcholům trojúhelníka, jsou opět v tabulce:

A_k	α_k	a_k
∞	0	1
∞	$-\frac{1}{2}$	∞
0	$\frac{1}{2}$	0

Body a_k volím libovolně, úhly v nekonečnu určím v souhlase s § 85 a $\Sigma\alpha_k = 1$. Funkce, která konformně zobrazuje polorovinu $\operatorname{Im}\xi > 0$ na tento trojúhelník je

$$w = C\int_0^{\zeta}(\zeta - 1)^{-1}\,\zeta^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}\zeta + C_1 = C\int_0^{\zeta}\frac{\sqrt{\zeta}}{\zeta - 1}\,\mathrm{d}\zeta, \qquad (25)$$

kde $C_1 = 0$, protože si odpovídají body $\zeta = 0$ a $w = 0$. Abychom určili konstantu C, použijeme toho, že v blízkosti bodu $\zeta = 1$ můžeme ve funkci za integračním znaménkem ve výrazu (25) zaměnit funkci $\sqrt{\zeta}$ spojitou v bodě $\zeta = 1$ její hodnotou v tomto bodě. Odtud

$$w = C \int_0^{\zeta} \frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta - 1} + o(\zeta - 1) = C\{\ln(\zeta - 1) - \pi\mathrm{i}\} + o(\zeta - 1), \quad (26)$$

kde $o(\zeta - 1)$ konverguje k nule pro $\zeta \to 1$.*) Jelikož přechodu bodu ζ po půlkružnici $|z - 1| = r$ s úsečky A_3A_1 na polopřímku A_1A_2 odpovídá přechod bodu w s polopřímky A_3A_1 na polopřímku A_1A_2, je $\Delta w = -h\mathrm{i} + o(\zeta - 1)$, kde h je poloviční šířka horizontální části oblasti z obr. 139. Naopak podle (26) $\Delta w = C\mathrm{i}\,\Delta\arg(\zeta - 1) + o(\zeta - 1) = -\pi C\mathrm{i} + o(\zeta - 1)$. Porovnáme-li nyní oba výrazy pro Δw v limitě pro $\zeta \to 1$, dostaneme $-h\mathrm{i} = -\pi C\mathrm{i}$, t. j. $C = \frac{h}{\pi}$. Tedy (25) má tvar

$$w = \frac{h}{\pi} \int_0^{\zeta} \frac{\sqrt{\zeta}\,\mathrm{d}\zeta}{\zeta - 1} = \frac{h}{\pi}\left(2\sqrt{\zeta} + \ln\frac{\sqrt{\zeta} - 1}{\sqrt{\zeta} + 1}\right)\Bigg|_0^{\zeta} =$$

$$= \frac{2h}{\pi}\sqrt{\zeta} + \frac{h}{\pi}\ln\frac{\sqrt{\zeta} - 1}{\sqrt{\zeta} + 1} - h\mathrm{i}. \quad (27)$$

Pomocnému (čárkovanému) výřezu A_1A_2 v rovině ζ odpovídá výřez $(1, \infty)$ podél reálné osy. Tedy podle principu symetrie funkce (27) spolu se svým analytickým pokračováním zobrazí celou rovinu ζ s výřezem podél $(1, \infty)$ podél reálné osy na oblast obr. 139. Funkce $z = \mathrm{i}\sqrt{\zeta - 1}$ zobrazí posledně zmíněnou oblast na horní polorovinu (z) a substitucí $\zeta = 1 - z^2$ do (27) dostaneme tedy zobrazení horní poloroviny (z) na oblast obr. 139:

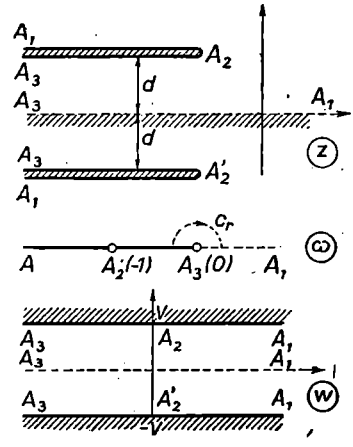
$$w = \frac{1}{\pi}\,2h\sqrt{1 - z^2} + \frac{1}{\pi}\,h\ln\frac{\sqrt{1 - z^2} - 1}{\sqrt{1 - z^2} + 1} - h\mathrm{i} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\,2h\left\{\sqrt{1 - z^2} + \ln\frac{z}{1 + \sqrt{1 - z^2}}\right\}. \quad (28)$$

§ 87. Výpočet pole na okrajích kondensátoru. Kondensátor Rogovského. Při zkoumání elektrického pole mezi polepy deskového kondensátoru můžeme je prakticky pokládat za homogenní. Jen v blíz-

*) Což je možno též přesně dokázat.

kosti okrajů kondensátoru dojde k narušení homogennosti pole a musí být proveden speciální výpočet. Abychom zjednodušili výpočet, budeme zkoumat jen pole u jednoho okraje kondensátoru a zanedbáme vliv druhého okraje. Kondensátor si představíme jako dvě poloroviny navzájem rovnoběžné a položené nad sebou (stopa desek kondensátoru do roviny kolmé na desky je na obr. 140). Předpokládejme ještě, že desky kondensátoru nesou potenciál $\pm V$. Výpočet takového pole patří k typu I úloh § 40. Jde nám v podstatě o konstrukci konformního zobrazení oblasti z obr. 140 na pás $-V < \operatorname{Im}\omega < V$.



Obr. 140.

Sestrojíme inversní funkci $z = z(\omega)$. V rovině (z) sestrojíme pomocný výřez A_3A_1 podél osy naší oblasti (čárkováno na obr. 140) a najdeme zobrazení pomocné poloroviny $\operatorname{Im} z > 0$ na „trojúhelník" $A_1A_2A_3$. Zadání trojúhelníka a body odpovídající jeho vrcholům jsou v tabulce:

A_k	α_k	a_k
∞	-1	∞
A_2	2	-1
∞	0	0

Body a_k volíme libovolně, bod A_2 zatím neurčíme. Zobrazení poloroviny na „trojúhelník" zprostředkuje funkce

$$z = C\int(\omega+1)\,\omega^{-1}\,\mathrm{d}\omega = C\int\frac{\omega+1}{\omega}\,\mathrm{d}\omega = \\ = C(\omega+\ln\omega)+C_1. \tag{29}$$

K určení konstanty C opět použijeme toho, že při přechodu bodu ω z polopřímky A_2A_3 na polopřímku A_3A_1 je přírůstek $\Delta z = -d\mathrm{i} +$

$+ o(\omega)$, kde d je poloviční vzdálenost desek kondensátoru a $o(\omega) \to 0$ pro $\omega \to 0$. Naopak pomocí (29) $\Delta z = C\mathrm{i} \arg \omega + o(\omega) = -C\pi\mathrm{i} + o(\omega)$, a z toho $-d\mathrm{i} = -\pi C\mathrm{i}$, $C = \frac{d}{\pi}$ a (29) má tvar

$$z = \frac{d}{\pi}(\omega + \ln \omega) + C_1.$$

Konstanta C_1 charakterisuje posun kondensátoru*) v rovině (z). Umístíme si jej tak, aby $C_1 = 0$; pak

$$z = \frac{d}{\pi}(\omega + \ln \omega). \tag{30}$$

Protože na polopřímce A_3A_1 v rovině (ω) je $\omega > 0$, odpovídají podle (30) těmto bodům reálná z a výřez A_3A_1 v rovině (z) je tedy podél reálné osy. Polohu okraje kondensátoru dostaneme z (30) pro

$$\omega = -1 : A_2 = \frac{d}{\pi}\{-1 + \ln(-1)\} = -\frac{d}{\pi} + d\mathrm{i}.$$

Tím je poloha kondensátoru plně určena.

Zobrazením $\frac{V}{\pi} \ln \omega$ zobrazíme ještě polorovinu $\operatorname{Im} \omega > 0$ na polopás $0 < \operatorname{Im} w < V$. Přitom se zobrazí polopřímka A_3A_1 na reálnou poloosu. Odtud

$$\omega = \mathrm{e}^{\frac{\pi}{V}w}$$

a dosazením tohoto výrazu do (30) dostáváme zobrazení polopásu $0 < \operatorname{Im} w < V$ na horní polorovinu pole kondensátoru

$$z = \frac{d}{\pi}\left(\mathrm{e}^{\frac{\pi w}{V}} + \frac{\pi w}{V}\right). \tag{31}$$

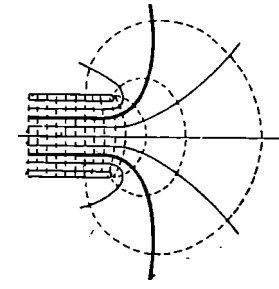
Aplikujeme princip symetrie a pak zobrazení (31) zprostředkuje zobrazení pásu $-V < \operatorname{Im} w < V$ na celé pole kondensátoru. (31) je zřejmě inversní funkce*) ke komplexnímu potenciálu pole.

Na obr. 141 jsou nakresleny siločáry a ekvipotenciální křivky pole; jsou to obrazy polopřímek $\arg \omega = \text{const}$ a kružnic $|\omega| = \text{const}$

*) Nebo, což je totéž, posunutí souřadného systému v rovině.
*) Rovnice (31) vzhledem k w není řešitelná elementárními funkcemi.

při zobrazení (30). Je možno je též sestrojit jako obrazy přímek $\operatorname{Im} w = \text{const}$ a $\operatorname{Re} w = \text{const}$ při zobrazení (31). Položme $z = x + iy$ a oddělme v (30) reálnou a imaginární část

$$x = \frac{d}{\pi}(\varrho \cos\psi + \ln\varrho),$$
$$y = \frac{d}{\pi}(\varrho \sin\psi + \psi). \tag{32}$$



Obr. 141.

Rovnice (32) pro $\psi = \text{const}$ dávají parametrické rovnice ekvipotenciálních**) křivek a pro $\varrho = \text{const}$ parametrické rovnice siločar.

Vektor napětí pole je podle (39) § 38 roven

$$\boldsymbol{E} = -\mathrm{i}\frac{\overline{\mathrm{d}w}}{\mathrm{d}z} = -\mathrm{i}\frac{1}{\overline{\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}w}}} = -\mathrm{i}\frac{V}{d}\frac{1}{1+\mathrm{e}^{\frac{\pi}{V}\overline{w}}} = -i\frac{V}{d}\cdot\frac{1}{1+\overline{w}}. \tag{33}$$

Uvnitř kondensátoru, t. j. pro body z blízké bodu A_3, je ω blízké bodu $\omega = 0$ a napětí pole kondensátoru

$$\boldsymbol{E} \approx -\mathrm{i}\frac{V}{d}$$

se málo liší od napětí homogenního pole. Při přiblížení bodu z k okraji kondensátoru A_2, bod $\omega \to -1$ a napětí $\boldsymbol{E}$ vzrůstá nade všechny meze (neboť v tomto případě též $\overline{\omega} \to -1$).

Zkoumejme velikost změny modulu napětí $\boldsymbol{E} = \left|\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\right|$ podél ekvipotencionálních křivek. Jelikož derivace regulární funkce nezávisí na tom, jakým způsobem se Δz blíží k nule, můžeme předpokládat, že se blížíme k danému bodu po silokřivce. Pak $|\mathrm{d}w| = |\mathrm{d}v|$, kde $v = \operatorname{Im} w$ (neboť podél silokřivky $u = \text{const}$) a $|\mathrm{d}z| = \mathrm{d}s$ je diferenciál oblouku silokřivky. Přejdeme opět do pomocné roviny $\omega = \varrho e^{i\psi}$ a máme

**) Křivkám $\operatorname{Im} w = \pm V$, t. j. $\psi = \pm \pi$, odpovídají desky kondensátoru $x = \frac{d}{\pi}(\ln\varrho - \varrho), y = \pm d$.

$v = \frac{V}{\pi}\psi$ odkud $\mathrm{d}v = \frac{V}{\pi}\mathrm{d}\psi$ a z (32), kde položíme $\varrho = \text{const}$, dostaneme $\mathrm{d}s = \sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2} = \frac{d}{\pi}\sqrt{\varrho^2 + 2\varrho\cos\psi + 1}\,\mathrm{d}\psi$. Odtud

$$E = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s} = \frac{V}{d}\frac{1}{\sqrt{\varrho^2 + 2\varrho\cos\psi + 1}}.$$

Abychom našli maximum hodnoty E podél ekvipotenciální křivky, stačí najít minimum funkce $\varrho^2 + 2\varrho\cos\psi + 1$ podél téže křivky pro různá ϱ a konstantní ψ. Nutná podmínka pro minimum funkce, t. j. anulování první derivace

$$2\varrho + 2\cos\psi = 0,$$

není splněna pro ta ψ, pro která $\cos\psi$ je kladný (neboť je $\varrho \geqq 0$), t. j. pro $-\frac{1}{2}\pi < \psi < \frac{1}{2}\pi$. Pro taková ψ se modul napětí pole E mění podél ekvipotenciálních křivek monotonně, t. j. nemá ani maximum ani minimum.

Pro $\psi = \pm\frac{1}{2}\pi$ je maximum pro $\varrho = 0$, t. j. na levém okraji kondensátoru. Sestrojíme-li takový kondensátor, jehož desky budou mít tvar ekvipotenciálních křivek pro $\psi = \pm\frac{1}{2}\pi$*) (silně vytažené na obr. 141), bude modul napětí pole takového kondensátoru

$$E = \frac{V}{d}\frac{1}{\sqrt{\varrho^2 + 1}} \tag{34}$$

ubývat při přibližování k jeho okrajům. Takový kondensátor byl propočten a konstruován *Rogovským*. Kondensátoru Rogovského se používá při zkoumání elektrické pevnosti isolačních hmot na probití.

§ 88. Pole deskových elektrod. Předpokládejme, že elektrody nesou potenciál $\pm V$. Budeme konstruovat konformní zobrazení mnohoúhelníka z obr. 142 na pás $-V < \mathrm{Im}\,w < V$. Sestrojíme nejprve

*) Rovnice ekvipotenciálních křivek vypočteny z (32) jsou:

$$x = \frac{d}{\pi}\ln\varrho; \quad y = \pm\frac{d}{\pi}(-\tfrac{1}{2}\pi + \varrho),$$

odkud

$$y = \pm\left(\frac{d}{2} + \frac{d}{\pi}\mathrm{e}^{\frac{\pi x}{d}}\right).$$

zobrazení horní poloroviny pole „trojúhelníka" $A_1A_2A_3$ na pomocnou polorovinu $\operatorname{Im}\zeta > 0$. Zadání trojúhelníka jakož i body odpovídající jeho vrcholům jsou v tabulce:

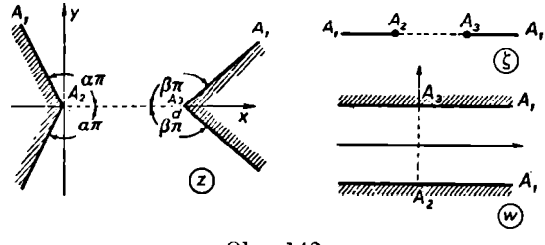
A_k	$\varkappa_k$	a_k
∞	$1-\alpha-\beta$	∞
0	α	0
a	β	1

Christoffelův-Schwarzův integrál má tvar

$$z = C\int_0^{\zeta} \zeta^{\alpha-1}(\zeta-1)^{\beta-1}\,\mathrm{d}\zeta = C'\int_0^{\zeta} \zeta^{\alpha-1}(1-\zeta)^{\beta-1}\,\mathrm{d}\zeta \qquad (35)$$

(kde konstanta $C_1 = 0$, protože si odpovídají navzájem body $\zeta = 0$ a $z = 0$). K určení konstanty C' použijeme toho, že bod $\zeta = 1$ přejde do bodu $z = d$, kde d je vzdálenost mezi vrcholy úhlů:

$$d = C'\int_0^{1} \zeta^{\alpha-1}(1-\zeta)^{\beta-1}\,\mathrm{d}\zeta.$$



Obr. 142.

Integrál napravo vyjádříme pomocí funkce **B**:

$$\int_0^1 \zeta^{\alpha-1}(1-\zeta)^{\beta-1}\,\mathrm{d}\zeta = \mathrm{B}(\alpha,\beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$$

(viz př. 11 kap. VII). Odtud $C'' = d\,\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}$ a (35) přejde na

$$z = d\,\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)} \int_0^{\zeta} \zeta^{\alpha-1}\,(1-\zeta)^{\beta-1}\,\mathrm{d}\zeta. \tag{36}$$

Čtenář si snadno sám ověří, že funkce

$$w = \frac{2V\mathrm{i}}{\pi}\arcsin(2\zeta - 1) \tag{37}$$

zobrazí konformně polorovinu $\operatorname{Im}\zeta > 0$ na polopás $-V < \operatorname{Im} w < V$, $\operatorname{Re} w < 0$, při čemž interval $(0, 1)$ reálné osy v rovině (ξ) přejde v interval $(-V\mathrm{i}, +V\mathrm{i})$ imaginární osy v rovině (w) (zobrazení (37) si odvodíme pomocí (22) § 86 a pomocných lineárních zobrazení).

Vyloučením ζ z rovnic (36) a (37) dostaneme konformní zobrazení horní poloroviny uvažovaného pole na levý polopás $-V < \operatorname{Im} w < V$ $\operatorname{Re} w < 0$. Při tom úsečka $(0, d)$ přejde v interval $(-V\mathrm{i}, V\mathrm{i})$ imaginární osy. Podle principu symetrie tatáž funkce zobrazí konformně celé pole na pás $-V < \operatorname{Im} w < V$ a je tedy komplexním potenciálem uvažovaného pole.

Stanovme si ještě velikost napětí pole v bodech blízkých vrcholu úhlu A_2. Je

$$E = \left|\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\right| = \frac{\left|\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}\zeta}\right|}{\left|\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\zeta}\right|} = \frac{2V}{\pi}\left|\frac{1}{\sqrt{\zeta(1-\zeta)}\;B(\alpha,\beta)\,d\,\zeta^{\alpha-1}\,(1-\zeta)^{\beta-1}}\right| \approx$$

$$\approx = \frac{2V}{d\pi B(\alpha,\beta)} \cdot \frac{1}{|\zeta|^{\alpha-\frac{1}{2}}},$$

neboť v blízkosti bodu $\zeta = 0$ je $1 - \zeta \approx 1$ a podle (36) v blízkosti 0 je $z \approx B(\alpha, \beta)\int_0^{\zeta} \zeta^{\alpha-1}\,\mathrm{d}\zeta = \frac{B(\alpha,\beta)\,d}{\alpha}\,\zeta$ a z toho

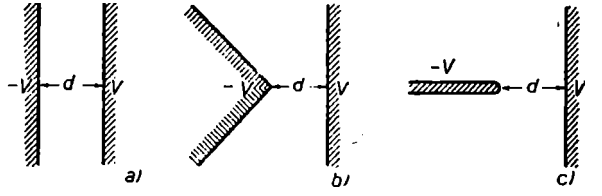
$$E = \frac{2V}{\pi B(\alpha,\beta)^{\frac{1}{2\alpha}}\,\alpha^{1-\frac{1}{2\alpha}}} \cdot \frac{1}{d^{\frac{1}{2\alpha}}|z|^{1-\frac{1}{2\alpha}}} = A\,\frac{V}{d^{\frac{1}{2\alpha}}|z|^{1-\frac{1}{2\alpha}}}, \tag{38}$$

kde A je konstanta.

Nechť je nyní v blízkosti vrcholu A_2 naší elektrody umístěno jisté dielektrikum, které chceme zkoumat na pevnost vůči probití. Budeme zvětšovat napětí $2V$ mezi elektrodami při konstantní vzdálenosti d. Pak podle (38) bude velikost E stoupat nade všechny meze a pro některé napětí dojde k probití dielektrika. Budeme-li považovat hodnotu $2V_0$, při které došlo k průboji, za konstantní (to můžeme, neboť poloha, v níž došlo k průboji, je určena bodem z), dostaneme z (38) závislost napětí, při němž došlo k průboji, na vzdálenosti elektrod:

$$2V_0 \approx cd^{\frac{1}{2\alpha}}, \tag{39}$$

kde C je konstanta.



Obr. 143.

Tak pro případ dvou rovnoběžných rovin (obr. 143a) je $\alpha = \frac{1}{2}$ a napětí

$$2V_0 \approx cd,$$

při němž dojde k probití, je úměrné vzdálenosti elektrod. Pro elektrodu ve tvaru pravého úhlu (obr. 143b) je $\alpha = \frac{3}{4}$ a

$$2V_0 \approx cd^{\frac{2}{3}}$$

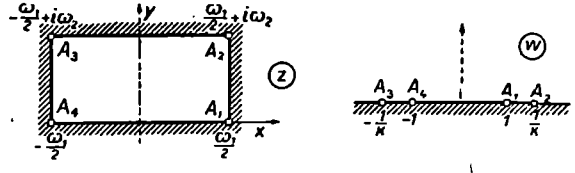
a pro dvě navzájem kolmé roviny (obr. 143c) $\alpha = 1$ a

$$2V_0 \approx c\sqrt{d}.$$

§ 89. Zobrazení rovnoběžníku. Pojem eliptického integrálu. Zkoumejme zobrazení poloroviny $\operatorname{Im} w > 0$ na rovnoběžník se stranami ω_1 a ω_2. Jeho zadání a body odpovídající jeho vrcholům jsou v tabulce:

A_k	$\frac{1}{2}\omega_1$	$\frac{1}{2}\omega_1 + i\omega_2$	$-\frac{1}{2}\omega_1 + i\omega_2$	$-\frac{1}{2}\omega_1$
α_k	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
a_k	1	$\varkappa$	a_3	a_4

V ní jsou $\varkappa$, a_3 a a_4 reálné konstanty vyhovující daným předpokladům (zřejmě $\varkappa > 1$). Protože jsme si určili jen vzor jediného vrcholu rovnoběžníka, můžeme požadovat, aby se body $w = 0$ a $w = \infty$ zobrazily do bodu $z = 0$ a do bodu $z = \mathrm{i}\omega_2$. Pak můžeme považovat naše zobrazení za symetrické pokračování zobrazení prvého kvadrantu



Obr. 144.

roviny z na pravou polovinu rovnoběžníka vzhledem k imaginární ose. Odtud plyne $a_3 = -\varkappa$ a $a_4 = -1$, t. j. funkce zprostředkující naše zobrazení má tvar

$$z = C' \int_0^w \frac{\mathrm{d}w}{\sqrt{(w^2 - 1)(w^2 - \varkappa^2)}} + C_1 = \\ = C \int_0^w \frac{\mathrm{d}w}{\sqrt{(1 - w^2)(1 - k^2 w^2)}}, \tag{40}$$

kde $C_1 = 0$, neboť body $w = 0$ a $z = 0$ si odpovídají navzájem a $k = \dfrac{1}{\varkappa}$ $(0 < k < 1)$ je konstanta. Integrál (40) se nedá vyjádřit pomocí elementárních funkcí a nazývá se *eliptický integrál prvního druhu.*

K určení konstant C a k použijeme vzájemného přiřazení bodu A_1 a $a_1 = 1$:

$$\tfrac{1}{2}\omega_1 = C \int_0^1 \frac{\mathrm{d}w}{\sqrt{(1 - w^2)(1 - k^2 w^2)}} \tag{41}$$

a bodu A_2 a $a_2 = \dfrac{1}{k}$:

$$\tfrac{1}{2}\omega_1 + \mathrm{i}\omega_2 = C\int_0 \frac{\mathrm{d}w}{\sqrt{(1 - w^2)\,(1 - k^2w^2)}} +$$

$$+ C\int_1^{\frac{1}{k}} \frac{\mathrm{d}w}{\sqrt{(1 - w^2)\,(1 - k^2w^2)}} =$$

$$= \tfrac{1}{2}\omega_1 + \mathrm{i}C\int_1^{\frac{1}{k}} \frac{\mathrm{d}w}{\sqrt{(w^2 - 1)\,(1 - k^2w^2)}}$$

(rozložili jsme integrál od 0 do $\frac{1}{k}$ na dva integrály od 0 do 1 a od 1 do $\frac{1}{k}$ a použili (41)). Odtud

$$\omega_2 = c\int_1^{\frac{1}{k}} \frac{\mathrm{d}w}{\sqrt{(w^2 - 1)\,(1 - k^2w^2)}}\,. \tag{42}$$

Vydělíme-li (42) a (41), zkrátí se konstanta C a dostaneme rovnici jen mezi k a $\frac{\omega_2}{\omega_1}$. Tedy k závisí jen od poměru stran rovnoběžníka. Konstanta C závisí na rozměrech rovnoběžníka. Z rovnice (41) plyne, že je reálná a kladná. Eliptický integrál

$$\int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(1 - t^2)\,(1 - t^2k^2)}}$$

přejde substitucí $t = \sin\varphi$ na integrál

$$\int \frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}}\,.$$

Pro posledně uvedený integrál ve tvaru

$$F(\alpha, \varphi) = \int_0^{\varphi} \frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}}\,, \tag{43}$$

kde $k = \sin\alpha$, jsou sestaveny podrobné tabulky.*) Úhel φ se nazývá *amplitudou* integrálu (43). Pro $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ nazývá integrál (43) *úplným eliptickým integrálem prvého druhu* a označujeme jej symbolem:

$$K = F(\alpha, \tfrac{1}{2}\pi) = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(1 - t^2)(1 - k^2 t^2)}} . \tag{44}$$

V připojené tabulce je několik hodnot úplného eliptického integrálu prvého druhu:**)

α	6°	7°	8°	9°	10°	11°
K	1,5751	1,5767	1,5785	1,5805	1,5828	1,5854

Veličina $k = \sin\alpha$ se nazývá *modulem eliptického integrálu* a veličina $k' = \sqrt{1 - k^2} = \cos\alpha$ se nazývá *doplňkem modulu* a integrál

$$K' = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{1 - k'^2 \sin^2\varphi}} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(1 - t^2)\,(1 - k'^2 t^2)}} = \tag{45}$$

$$= \int_1^{\frac{1}{k}} \frac{\mathrm{d}\tau}{\sqrt{(\tau^2 - 1)\,(1 - k^2\tau^2)}}$$

$\left(\text{kde je } \tau = \dfrac{1}{\sqrt{1 - k'^2 t^2}}\right)$ *doplňkem úplného eliptického integrálu prvého druhu.*

Pomocí těchto označení můžeme určit konstanty integrálu (40) z rovnic (41) a (42):

$$\omega_1 = 2CK, \quad \omega_2 = CK'; \quad \frac{K'}{K} = 2\,\frac{\omega_2}{\omega_1} . \tag{46}$$

*) E. Jahnke-F. Emde: Funktionentafeln mit Formeln und Kurven, Teubner Leipzig 1909, a další vydání, str. 46—68 nebo ruský překlad posledního vydání z r. 1945 Janke i Emde: Tablicy funkcij, GOSTĚCHIZDAT, Moskva 1948, str. 162—167. (Pozn. překl.)

**) Tamtéž — němec. vydání str. 68, rus. vyd. str. 177.

Veličina $e^{-\pi\frac{K'}{K}}$ se obyčejně označuje q, takže je

$$\ln q = -\pi\frac{K'}{K}.$$

Pro dekadický logaritmus $\log q$ jsou sestaveny tabulky této funkce v závislosti na α*). V připojené tabulce jsou pro ilustraci některé hodnoty:

α	6°	7°	8°	9°	10°	11°
$\log q$	$\bar{4}$,8367	4,9709	$\bar{3}$,0872	$\bar{3}$,5899	3,2819	$\bar{3}$,3611

Známe-li strany rovnoběžníka, můžeme určit $\frac{K'}{K}$ a odtud i $\log q$. Ze známé hodnoty $\log q$ určíme z tabulky α a podobně najdeme z tabulky i K. Známe-li K a ω_1, pak pomocí prvého ze vzorců (46) najdeme konstantu C.

Jako příklad hledejme zobrazení poloroviny $\operatorname{Im}\omega > 0$ na čtverec o straně 1 umístěný jako obdélník na obr. 144. Je $\omega_1 = \omega_2 = 1$ a odtud $\frac{K'}{K} = 2$ a $\ln q = -2\pi z - 6{,}283$. Přepočteme přirozené logaritmy na dekadické násobíce modulem $M \approx 0{,}4343$ a dostaneme $\log q \approx$ $\approx -2{,}729 = \bar{3}{,}271$. Odtud z druhé tabulky $\alpha \approx 10^0$ a z prvé $K \approx 1{,}583$. Dále: $C = \frac{\omega_1}{2K} \approx 0{,}316$, $k = \sin\alpha \approx 0{,}174$, $k^2 \approx 0{,}03$ a naše konformní zobrazení je zprostředkováno funkcí

$$z \approx 0{,}316 \int_0^w \frac{dw}{\sqrt{(1-w^2)\,(1-0{,}03\,w^2)}}. \qquad (47)$$

§ 90. Eliptické funkce Jacobiho. Funkce inversní k eliptickému integrálu

$$z = \int_0^w \frac{dw}{\sqrt{(1-w^2)\,(1-k^2w^2)}} \qquad (48)$$

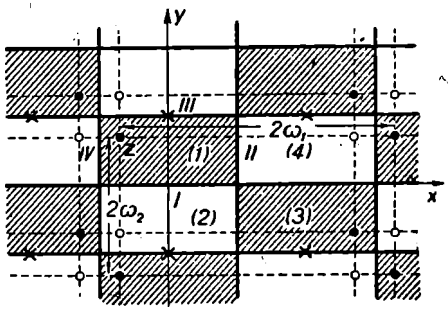
**) Na př. rus. vyd. str. 147—149. Význam symbolu je vyložen v textu naší knihy. (Pozn. překl.)

se označuje symbolem $w = \mathrm{sn}(z, k)$ nebo jednodušeji $w = \mathrm{sn}\, z$ a nazývá se *Jacobiho eliptickou funkcí* sn s modulem k.*) Z (40) plyne, že funkce

$$w = \mathrm{sn}\left(\frac{z}{C}, k\right) = \mathrm{sn}\,\frac{z}{C} \tag{49}$$

zobrazí konformně rovnoběžník obr. 144 na horní polorovinu. Při tom jsou konstanty C a k $(0 < k < 1)$ určeny stranami rovnoběžníka ω_1 a ω_2 podle vzorců (46).

Zvolíme rozměry rovnoběžníka tak, aby byla $C = 1$. Označíme I, II, III, IV strany tohoto rovnoběžníka. Podle principu symetrie můžeme symetricky pokračovat funkci $w = \mathrm{sn}\, z$ třeba přes stranu (I) a dostaneme zobrazení rovnoběžníka (2) na dolní polorovinu zprostředkované funkcí $w = \mathrm{sn}\, z$ (obr. 145). Prodloužíme-li toto zobrazení dále na př. přes stranu (II), vidíme, že $w = \mathrm{sn}\, z$ zobrazí rovnoběžník (3) znovu na horní polorovinu atd. (Šrafované rovnoběžníky obr. 145 se zobrazí na horní polorovinu, nešrafované na dolní polorovinu.)



Obr. 145.

Tak postupně prodloužíme funkci $w = \mathrm{sn}\, z$, definovanou ze začátku jen v rovnoběžníku (1), na celou rovinu (z). Přitom je naše funkce zřejmě jednoznačná, neboť oběhneme-li nějakou uzavřenou křivku a přijdeme-li znovu do rovnoběžníku na př. (1), bude nová hodnota $\mathrm{sn}\, z$ shodná se starou, neboť spolu souhlasí staré i nové zobrazení (1) na polorovinu (viz větu jednoznačnosti konformního zobrazení § 23).

---

*) Budeme-li psát integrál (48) ve tvaru $z = \int_0^{\varphi} \frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}}$, pak podle předcházejícího paragrafu bude φ amplitudou z a tedy $w = \mathrm{sn}\, z = \sin\varphi$. Proto se nazývá funkce sn někdy též sinus amplituda a funkce cn, resp. dn (viz dále), kosinus amplituda, resp. delta amplituda.

Dále je naše funkce všude regulární uvnitř všech rovnoběžníků i na jejich hranicích s výjimkou bodu $z = \omega_1 i$ a všech bodů, které z něho dostaneme podle principu symetrie (na obr. 145 jsou označeny x), kde má funkce póly, protože se tyto body zobrazí na $w = \infty$. Je tedy funkce snz *meromorfní*.

Dále jsou na obr. 145 označeny plnými kroužky body, kde funkce nabývá hodnoty snz, a bílými kroužky body, v nichž nabývá funkce hodnoty $\overline{\text{snz}}$. Z konstrukce těchto bodů plyne, že ve všech bodech $z + 2k_1\omega_1 + 2k_2 i\omega_2$, kde k_1 a k_2 jsou libovolná celá čísla, má funkce snz tutéž hodnotu:

$$\text{sn}(z + 2k_1\omega_1 + 2k_2 i\omega_2) = \text{snz}. \tag{50}$$

Jinak řečeno, to znamená, že funkce snz má *dvě periody* $T_1 = 2\omega_1$, $T_2 = 2\omega_2$; nazýváme ji proto *biperiodickou funkcí*. Biperiodičnost funkce snz nám dovoluje zkoumat ji pouze v rovnoběžníku se stranami $2\omega_1$ a $2\omega_2$ rovnoběžnými se souřadnými osami. Výsledky se přenesou snadno pomocí biperiodičnosti na celou rovinu.

Z výše uvedených úvah plyne ještě, že funkce snz je lichá, t. j.

$$\text{sn}(-z) = -\text{snz}, \tag{51}$$

a odtud $\text{sn}0 = 0$.

Uvedené vlastnosti připomínají jistou analogii s goniometrickými funkcemi. Z (48) pro $k = 0$ plyne $z = \arcsin w$ a tedy $\text{sn}(z, 0)$ je totožný s obyčejným sinem.

Definujme si ještě kromě snz dvě další *Jacobiho eliptické funkce* vztahy:

$$\text{cnz} = \sqrt{1 - \text{sn}^2 z}, \quad \text{dnz} = \sqrt{1 - k^2 \text{sn}^2 z}. \tag{52}$$

Pro $k = 0$ je cnz totožný s obyčejným kosinem a dnz degeneruje v 1.

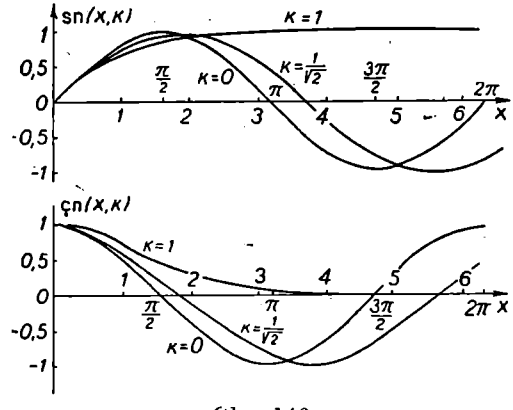
Uvedeme si některé vlastnosti Jacobiho eliptických funkcí. Ze vzorce (48) definujícího snz dostaneme podle pravidla o derivaci inversní funkce

$$\frac{\text{d snz}}{z} = \sqrt{(1 - \text{sn}^2 z)\,(1 - k^2 \text{sn}^2 z)} = \text{cnz} \,.\, \text{dnz}. \tag{53}$$

Dále, derivací vztahů (52) dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}\,\mathrm{cn}z}{\mathrm{d}z} = -\frac{\mathrm{sn}z\,.\,\mathrm{cn}z\,.\,\mathrm{dn}z}{\mathrm{cn}z} = -\,\mathrm{sn}z\,.\,\mathrm{dn}z;$$
$$\frac{\mathrm{d}\,\mathrm{sn}z}{\mathrm{d}z} = -\,k^2\,\mathrm{sn}z\,.\,\mathrm{cn}z. \tag{54}$$

Pro $k = 0$ (53) a (54) dávají známé vzorce pro derivaci goniometrických funkcí.



Obr. 146.

Uvedeme zde ještě bez důkazu*) *adiční theoremy* pro eliptické funkce analogické podobným vzorcům pro goniometrické funkce

$$\mathrm{sn}(z+w) = \frac{\mathrm{sn}z\,.\,\mathrm{cn}w\,.\,\mathrm{dn}w + \mathrm{sn}w\,.\,\mathrm{cn}z\,.\,\mathrm{dn}z}{1 - k^2\,\mathrm{sn}^2z\,.\,\mathrm{sn}^2w},$$
$$\mathrm{cn}(z+w) = \frac{\mathrm{cn}z\,\mathrm{cn}w - \mathrm{sn}z\,\mathrm{sn}w\,\mathrm{dn}z\,\mathrm{dn}w}{1 - k^2\,\mathrm{sn}^2z\,\mathrm{sn}^2w}, \tag{55}$$
$$\mathrm{dn}(z+w) = \frac{\mathrm{dn}z\,.\,\mathrm{dn}w - k^2\,\mathrm{sn}z\,.\,\mathrm{sn}w\,.\,\mathrm{cn}z\,.\,\mathrm{cn}w}{1 - k^2\,\mathrm{sn}^2z\,.\,\mathrm{sn}^2w}.$$

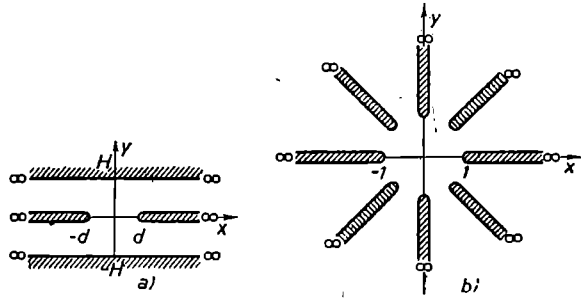
*) Odvození těchto vzorců najde čtenář v knihách: Privalov: Vveděnije v těoriju funkcij kompleksnogo pereměnnogo, GOSTĚCHIZDAT, Moskva, 1945, str. 305; N. J. Achijezev: Elementy těorii eliptičeskich funkcij, GOSTĚCHIZDAT, Moskva, 1948. [Nebo v polské knize: S. Saks i A. Zygmund: Funkcje analytyczne, Czytelnik Warszava 1948. Lavrentěv-Šabat: Metody funkcij kompleksnogo peremennogo, GOSTĚCHIZDAT, Moskva 1951, kap. VII. V této knize i výše uvedené knize polské nalezne čtenář podrobnější matematickou theorii, důkazy vět a doplnění látky k látce vyložené v naší knize. Pozn. překl.]

Pro $k = 0$ dávají prvé dva vzorce (55) známé vzorce pro goniometrické funkce.

Nakonec připojíme ještě na obr. 146 grafický průběh funkce $\mathrm{sn}(x, k)$ a $\mathrm{cn}(x, k)$ pro reálná x a $k = 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 1$.

ÚLOHY

1. Použijte principu symetrie a zobrazte na horní polorovinu oblasti z obr. 147.



Obr. 147.

2. Odvoďte vzorec pro zobrazení vnitřku jednotkové kružnice na mnohoúhelník:

$$w = C \int_0^z (z - a_1)^{\alpha_1 - 1} (z - a_2)^{\alpha_2 - 1} \dots (z - a_n)^{\alpha_n - 1} \, \mathrm{d}z + C',$$

kde α_k jsou úhly mnohoúhelníka měřené v π, a_k ($|a_k| = 1$) jsou body na jednotkové kružnici, odpovídající vrcholům mnohoúhelníka a C a C' konstanty.

3. Odvoďte vzorec pro zobrazení jednotkového kruhu na vnějšek mnohoúhelníka

$$w = C \int_0^z (z - a_1)^{\alpha_1 - 1} (z - a_2)^{\alpha_2 - 1} \dots (z - a_n)^{\alpha_n - 1} \frac{\mathrm{d}z}{z^2} + C',$$

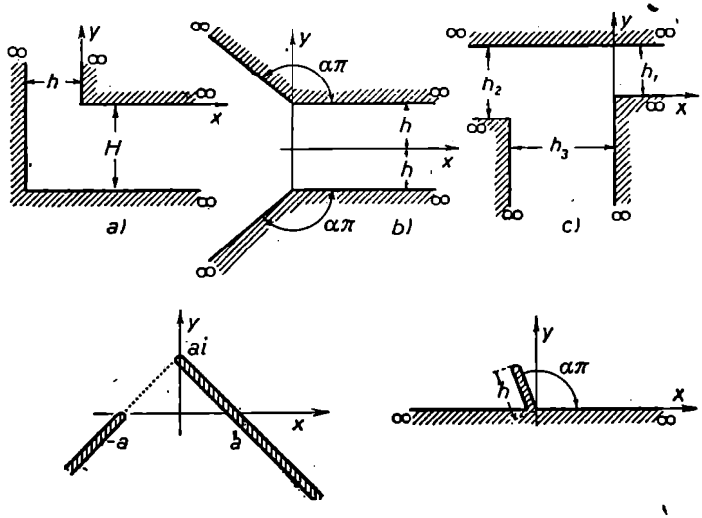
kde α_k jsou vnější úhly mohoúhelníka měřené v π a a_k, C, C' mají tentýž význam jako v předcházejícím příkladě. Předpokládejte přitom, že střed kružnice $z = 0$ se zobrazí do bodu $w = \infty$.

4. Najděte konformní zobrazení a) vnitřku paraboly $y^2 = 2px$, b) vnitřku pravé větve hyperboly $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, c) vnitřku elipsy $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, na horní polorovinu.

5. Najděte konformní zobrazení vnějšku

a) písmene „X", t. j. bodů úseček $(-e^{i\frac{1}{4}\pi}, e^{i\frac{1}{4}\pi})$, $(-e^{-i\frac{1}{4}\pi}, e^{-i\frac{1}{4}\pi})$;

b) písmene „Ψ", t. j. bodů intervalu $(0, -2i)$ na imaginární ose a na dolní půlkružnici $|z| = 1$;



Obr. 148.

c) písmene „Ж", t. j. bodů na úsečkách

$$(-i, i), \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i, -\frac{1}{\sqrt{2}} - i\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + i, \frac{1}{\sqrt{2}} - i\right)$$

na vnějšek jednotkové kružnice.

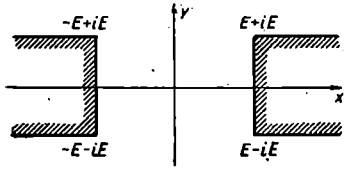
6. Najděte konformní zobrazení kruhu $|z| < 1$ s výřezem podél úseček $(-i, \frac{1}{2}i)$ $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, na vnitřek jednotkového kruhu $|w| < 1$.

7. Najděte konformní zobrazení horní poloroviny na mnohoúhelníky z obr. 148

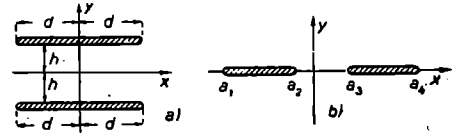
8. Dokažte, že eliptický integrál druhého druhu

$$E(z, k) = \int_0^z \sqrt{\frac{1 - k^2 z^2}{1 - z^2}}\, dz, \quad 0 < k < 1$$

zobrazí konformně rovinu (z) s výřezy podél polopřímek $y = 0$, $|x| > 1$ na oblast obr. 149.



Obr. 149.



Obr. 150.

9. Najděte konformní zobrazení dvojnásob souvislé oblasti obr. 150a na dvojnásob souvislou oblast obr. 150b. Konstanty a_k jsou dány.

10. Budiž oblast D rovina (z) s nekonečným počtem výřezů podél navzájem rovnoběžných úseček $-a \leqq x \leqq a$, $y = kh$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. Najděte: a) jedno-jednoznačné zobrazení oblasti D na rovinu (w) s nekonečným počtem výřezů podél intervalů reálné osy; b) jednoznačné (ale ne jedno-jednoznačné) zobrazení oblasti D na vnějšek jednotkového kruhu.

ŘEŠENÍ ÚLOH.

ÚVOD.

1. a) $2e^{i\frac{\pi}{3}}$, b) Bod z leží v obdélníku $0 \leq \operatorname{Re} z \leq 2$, $-1 \leq \operatorname{Im} z \leq 1$. $\varrho = 2\sin\frac{\alpha}{2}$ a $\varphi = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} + \nu\pi$, kde $\nu = 0$ nebo $\nu = -1$ určí se z požadavku aby bod z ležel v uvedeném obdélníku, t. j. $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$. **2.** Z druhé rovnice plyne $-z_3 = z_1 + z_2$ a tedy $|z_1 + z_2| = |z_3| = |z_1|$; t. j. body z_1, z_2, z_3 a $z_1 + z_2$ leží na téže kružnici a $\triangle z_1 z_2 (z_1 + z_2)$ je rovnostranný. Vektory z_1 a $z_1 + z_2$ tedy svírají úhel 60° a podobný výsledek dostaneme i pro vektory z_2 a $z_1 + z_2$. Z toho plyne: vektory z_1 a z_2 svírají spolu úhel 120° a jsou stejně dlouhé. Cyklickou záměnou dostaneme totéž pro úhel vektorů z_2, z_3 resp. z_3, z_1. Tvoří tedy z_1, z_2, z_3 vrcholy rovnostranného trojúhelníka vepsaného do kružnice o poloměru $|z_1|$. **3.** $z_4' = -z_1 + z_2 + z_3$, $z_4'' = z_1 - z_2 + z_3$, $z_4''' = z_1 + z_2 - z_3$. **4.** $z_c = \frac{m_1 z_1 + m_2 z_2 + \ldots + m_n z_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}$. **5.** $z_k = z_1 + (z_1 - z_0)\frac{e^{i\frac{2k\pi}{n}} - e^{i\frac{2\pi}{n}}}{e^{i\frac{2\pi}{n}} - 1}$. **6.** Vyjádřete v souřadnicích; součet čtverců úhlopříček rovnoběžníka je roven součtu čtverců všech jeho stran. **7.** $\cos^4\varphi - 6\cos^2\varphi \sin^2\varphi + \sin^4\varphi$. **8.** $\pm(2 + i)$; $2e^{\left(\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}\right)i}$; $\sqrt[8]{2}e^{\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{3}\right)i}$. **9.** $1 + i$, $1 + 2i$; $i \pm 2$. **10.** $1 - i$, i; $\lambda(1 - i)$, $\lambda(1 + i)$. **11.** a) Osa úsečky ab, b) přímka, c) lichoběžník, d) elipsa s ohnisky a a b pro $\alpha > |b - a|$, úsečka ab pro $\alpha = |b - a|$ a prázdná množina pro $\alpha < |b - a|$, e) vnitřek paraboly $y^2 = 1 - 2x$, f) Pravá polorovina s vyňatým kruhem $x^2 + y^2 - 2x - 1 \leq 0$. **12.** a) $\frac{x}{x^2 + y^2} = \alpha$ soustava kružnic dotýkajících se osy y, b) $\frac{2y}{x^2 + y^2 - 1} = \operatorname{tg}\alpha$ soustaya kružnic procházejících body ± 1, c) $(x - 1)^2 + y^2 = \alpha^2\{(x + 1)^2 + y^2\}$ soustava kružnic, d) Geometrické místo bodů mající od bodů ± 1 stálý součin vzdáleností — t. zv. Cassiniho ovály. Body ± 1 se nazývají ohniska. Pro $\alpha < 1$ se křivky rozpadají na dvě „vačky" okolo bodů ± 1, pro $\alpha = 1$ dostáváme Bernoulliho lemniskatu („brejle"), pro $\alpha > 1$ dostáváme uzavřené křivky mající podobu deformovaného oválu. Viz obr. 67. e) $z^2 + 2az + b = (z - z_1)(z - z_2)$, kde z_1, z_2 jsou kořeny trojčlenu, křivky tedy tvoří soustavu Cassiniho oválů s ohnisky v bodech z_1, z_2. **13.** Dosadíme

$x = \frac{z + \bar{z}}{2}$, $y = \frac{z - \bar{z}}{2i}$ a dostaneme $z\bar{z} + (1 + \frac{1}{2}i)z + (1 - \frac{1}{2}i)\bar{z} = 1$, $z^2 + \bar{z}^2 = 2$. **14.** $\xi = \frac{x}{x^2 + y^2}$, $\eta = \frac{y}{x^2 + y^2}$, $u = \frac{\xi}{\xi^2 + \eta^2}$, $v = \frac{\eta}{\xi^2 + \eta^2}$. **15.** a) $\alpha\xi + \beta\eta + \gamma(\xi^2 + \eta^2) = 0$ — kružnice procházející počátkem; pro $\gamma = 0$ přímka $\alpha\xi + \beta\eta = 0$, shodná s danou. b) $\alpha + \beta\xi + \gamma\eta + \delta(\xi^2 + \eta^2) = 0$ kružnice, pro $\delta = 0$ přímka. c) $\xi^2 - \eta^2 = (\xi^2 + \eta^2)^2$ čili $\left[\left(\xi - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \eta^2\right] \times \left[\left(\xi + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \eta^2\right] = \frac{1}{4}$ Bernoulliho lemniskata s ohnisky v bodech $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$. d) $\frac{\eta^3}{\xi^2 + \eta^2} = 2p\xi$ čili $\eta = \sqrt{\frac{2p\xi^3}{1 - 2p\xi}}$ kissoida.

KAPITOLA I.

1. Souřadnice bodu $Z: \xi = \frac{4R^2x}{4R^2 + r^2}$, $\eta = \frac{4R^2y}{4R^2 + r^2}$, $\zeta = \frac{2Rr^2}{4R^2 + r^2}$, kde $r = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$, R je poloměr koule, osy ξ a η souhlasí s osami x a y, osa ζ souhlasí se svislým průměrem koule. a) obrazy bodů z a $-z$ leží v průsečících poledníku a rovnoběžky, které procházejí obrazem jednoho z obou bodů. b) obrazy bodů z a $\bar{z}$ leží na téže rovnoběžce, která prochází obrazem jednoho z obou bodů, a to na polednících, které jsou souměrně položeny podle poledníku odpovídajícího reálné ose. **2.** a) Ne. b) Ano. **3.** a) Je $r_n = \left(\sqrt{\left(1 + \frac{x}{n}\right)^2 + \frac{y^2}{x^2}}\right)^n$, $\lim_{n\to\infty} \ln r_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}n \ln\left(1 + \frac{2x}{n} + \frac{x^2 + y^2}{n^2}\right) = \lim_{t\to 0} \frac{\ln[1 + 2xt + (x^2 + y^2)t^2]}{2t} =$ $= \lim_{t\to 0} \frac{2x + 2t(x^2 + y^2)}{2[1 + 2xt + (x^2 + y^2)t^2]} = x$ (kde jsme dosadili $t = \frac{1}{n}$ a použili L'Hospitalova pravidla), tedy $\lim_{n\to\infty} r_n = e^x$. Podobně $\lim_{n\to\infty} \varphi_n = \lim n \operatorname{arctg} \frac{\frac{y}{n}}{1 + \frac{x}{n}} = y$, takže konečně $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = e^x(\cos y + i \sin y) = e^z$. b) $\frac{2}{2 - i}$. **4.** a) $x = (\alpha + \beta)\cos t$, $y = (\alpha - \beta)\sin t$ elipsa s poloosami $|\alpha + \beta|$ a $|\alpha - \beta|$, b) $r = e^{\frac{\alpha}{\beta}\varphi}$, kde $a = \alpha + i\beta$, $z = re^{i\varphi}$ — logaritmická spirála. **5.** Je $\dot{z} = \dot{r}e^{i\varphi} +$

$+ r\dot{\varphi}\mathrm{i}e^{\mathrm{i}\varphi}$, $\ddot{z} = (\ddot{r} + r\dot{\varphi}^2)\, e^{\mathrm{i}\varphi} + \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r^2\dot{\varphi})\, \mathrm{i}e^{\mathrm{i}\varphi}$; koeficienty při $e^{\mathrm{i}\varphi}$ a $\mathrm{i}e^{\mathrm{i}\varphi}$ dají hledané veličiny. **6.** Hledaná rychlost je $v = \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \mathrm{i}|z|f'(z)$. **7.** Zobecněný Ohmův zákon dává $\left(R + \frac{1}{C\omega\mathrm{i}}\right)\mathcal{J} = \mathcal{E}$, komplexní proud $\mathcal{J} = I_0 e^{\mathrm{i}(\omega t + \varphi + \delta)}$, kde $I_0 = \frac{E_0}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{(C\omega)^2}}}$ a $\mathrm{tg}\delta = \frac{1}{RC\omega}$. **8.** $w = \sin 2\varphi$ — jednotková úsečka. **9.** Dokažte, že rovnoběžkám odpovídají v zobrazení opět rovnoběžky. **10.** Paraboly $u = \frac{v^2}{4\alpha^2} - \alpha^2$ a paraboly $u = \beta^2 - \frac{v^2}{4\beta^2}$ s vyjmutými vrcholy.

11. a) Kružnice dotýkající se souřadných os v počátku $u^2 + v^2 = \frac{1}{\alpha}u$, $u^2 + v^2 = -\frac{1}{\beta}v$. b) Kružnice $u^2 + v^2 - 2v\,\mathrm{cotg}\alpha = 1$. c) Elipsy $x = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\varphi$, $y = \frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right)\sin\varphi$ a hyperboly $\frac{x^2}{\cos^2\alpha} - \frac{y^2}{\sin^2\alpha} = 1$; ohniska všech křivek jsou v bodech ± 1. d) Lemniskata $\varrho = \sqrt{2|\cos 2\Theta|}$. **12.** Rovina s vyjmutou kladnou poloosou; $u = r^3\cos 3\varphi = \alpha$, $v = r^3\sin 3\varphi = \beta$. **13.** $f(z) = 1$ mezi parabolami $y = x^2$ a $y = 2x^2$, $f(z) = 0$ všude v rovině mimo uvedenou oblast. **14.** $w = \mathrm{tg}\varphi$ je všude spojitá s výjimkou přímek $\varphi = \pm\frac{\pi}{2}$. **15.** a **16.** Použijte Cauchy-Riemannových rovnic. **17.** a) Regulární pro $z \neq \infty$. b) Regulární pro $z \neq 0$. c) Není nikde regulární, je mnohoznačná. d) Není nikde regulární, třebaže je v bodě $z = 0$ diferencovatelná.

KAPITOLA II.

1. $\mathrm{d}u + \mathrm{i}\,\mathrm{d}v = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}\right)\mathrm{d}x + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial y}\right)\mathrm{d}y$; je-li $\mathrm{d}u + \mathrm{i}\,\mathrm{d}v = A(\mathrm{d}x + \mathrm{i}\,\mathrm{d}y)$, pak $A = \frac{\partial u}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{\mathrm{i}}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial y}\right)$; odkud plynou rovnice Cauchy-Riemannovy, opak se ověří přímo. **2.** $L = \int_C |f'(z)|\,|\mathrm{d}z|$, $S = \iint_D |f'(z)|^2\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$. **3.** $\left.\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\right|_{z_1} = \infty$, $\left.\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\right|_{z_2} = -\frac{1}{2}\mathrm{i}$. **4.** $S = \frac{8}{3}$, $L = 2\ln(1 + \sqrt{2})\, e^{1+\sqrt{2}}$. **5.** $L =$

$= 2\sqrt{2}\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}$ — dostáváme eliptický integrál, viz § 89. **6.** Z podmínky kolmosti gradientů dostaneme $\frac{v_y}{u_x} = -\frac{v_x}{u_y} = \lambda$, z druhé podmínky plyne $\lambda = \pm 1$. Případ $\lambda = -1$ vede k zobrazením měnícím orientaci, případ $\lambda = +1$ k zobrazením konformním. **7.** $w + 1 = 2i(z - i)$ čili $w = 1 + 2iz$, $|dw - \Delta w| = |z - i|^2$. **8.** Polopás s vyňatým půlkruhem, sestrojeným nad základnou polopásu jako nad průměrem. **9.** Čtvrtý kvadrant s vyňatým půlkruhem $|w - \frac{1}{2}| \leqq \frac{1}{2}$. **10.** x-ové souřadnice bodů sdružených současně podle obou kružnic jsou $\alpha = -\frac{1}{4}, \beta = -4$. Hledané zobrazení: $w = \frac{4z+1}{z+4}$, $R = 2$. **11.** $\frac{w-1}{w+1} = a\frac{z-1}{z+1}$, kde a je libovolná komplexní konstanta. **12.** $w = i\frac{1-z}{1+z}$. **13.** $w = \frac{1}{1-z}$. **14.** $w = 2i\frac{z-i}{z+i}$, $R = 2$. **15.** φ je argument bodu na kružnici $|w| = 1$, na který se zobrazí bod $z = \infty$. Přímkám $\operatorname{Im} z = \text{const}$ odpovídají kružnice dotýkající se kružnice $|w| = 1$ v bodě $e^{i\varphi}$, přímkám $\operatorname{Re} z = \text{const}$ kružnice protínající tutéž kružnici pod pravým úhlem v tomtéž bodě. **16.** $w = \frac{a_2 - a_3}{a_2 - a_1}\frac{z - a_1}{z - a_3}$. **17.** a, b, c a d reálné, $ad - bc > 0$.

KAPITOLA III.

1. $\sin(x + iy) = \cosh y \sin x + i \sinh y \cos x$; $\cos(x + iy) = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$; $\operatorname{tg}(x + iy) = \frac{\sin 2x + i \sinh 2y}{\cosh 2y + \cos 2x}$. **4.** Při oběhu kružnice obsahující body 0 a 1 ve svém vnitřku v kladném smyslu se změní argument výrazu pod odmocninou o 6π, a tedy hodnota odmocniny nabude své výchozí hodnoty $\sqrt{2}\, e^{\frac{7}{12}\pi}$. **5.** $\ln 3 + i\pi$. **6.** Funkce $\omega = z + \sqrt{z^2 - 1}$ zobrazí danou oblast na horní polorovinu. **7.** $w_1 = e^{-e(1+\pi i)}$, $w_2 = e^{-e(1-\pi i)}$. **8.** Kružnice $|z| = \text{const}$ a paprsky $\arg z = \text{const}$. **9.** $f(z_1) = f(z_2)$ plyne buď $z_1 = z_2$, nebo $z_1 + z_2 + 2 = 0$, v druhém případě $|z_2| \geqq 2 - |z_1|$, a tedy oba body nemohou ležet uvnitř jednotkového kruhu. **10.** Z $f(z_1) = f(z_2)$ plyne buď $z_1 = z_2$ nebo $z_1 z_2 = 1$. V druhém případě nemohou oba body ležet současně v horní polorovině. Rovina s výřezy podél polopřímek $-\infty < u < -1$, $1 < u < \infty$, $v = 0$. **11.** Pravá polorovina s výřezem podél polopřímky $1 < u < \infty$; b) kruh $|w| < 1$, soustava kružnic procházejících body $\pm i$ a soustava kružnic, podle nichž jsou tyto dva body sdruženy; c) rovina s výřezy podél polopřímek

$v = \pm\pi$, $-\infty < u < -1$; d) kruh $u^2 + v^2 < 2v$; e) kruh $|w| < 1$, kružnicím $|w| = \varrho$ odpovídají lemniskaty $(x^2 + y^2)\,[(4 - x)^2 + y^2] = 16\varrho^2$ a paprskům $\arg w = \varphi$ — hyperboly. **12.** a) Rovina s výřezy podél polopřímek $v = k\pi$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, $-\infty < u < 0$; b) horní polorovina s výřezy podél úseček $u = k\pi (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ $0 < v < h$. **13.** a) $\zeta = z^{\frac{\pi}{a}}$ zobrazí výseč na půlkruh, $\omega = \left(\frac{\xi + 1}{\zeta - 1}\right)^2$ na polorovinu, zbývá použít vzorce (23) kap. II.; b) $w = \frac{1}{\pi} \ln\left(\mathrm{i}\,\frac{1 + z}{1 - z}\right)$; c) substitucí $\zeta = \frac{7}{3}z$ dostaneme elipsu s ohnisky v bodech ± 1, zobrazením $\zeta = \frac{1}{2}\left(\omega + \frac{1}{\omega}\right)$ přejde tato elipsa ve kružnici $|\omega| = 3$; dosadíme ještě $\omega = 3w$ a dostaneme jednotkovou kružnici. Konečný výsledek: $w = \frac{1}{9}(z + \sqrt{z^2 - 9})$; d) $\omega = \sqrt{\zeta}$ zobrazí parabolu $\xi = \frac{\eta^2}{4\alpha^2} - \alpha^2$ na přímku $\mathrm{Im}\,\omega = \alpha$; vezmeme $\alpha = \sqrt{\frac{1}{2}p}$ a parabola bude $\eta^2 = 2p(\xi + \frac{1}{2}p)$; zobrazením $\zeta = z - \frac{1}{2}p$ přejde tato parabola v danou parabolu $y^2 = 2px$; zbývá jen dosadit $w = \omega - \mathrm{i}\sqrt{\frac{1}{2}p}$ a dostaneme konečný výsledek $w = \sqrt{z - \frac{1}{2}p} - \mathrm{i}\sqrt{\frac{1}{2}p}$. e) Použijeme vlastností zobrazení $z = \frac{1}{2}\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right)$, f) logaritmické spirály protínají polopřímky $\arg z = \mathrm{const}$ pod konstantním úhlem, $\zeta = \ln z$ převádí tyto polopřímky v rovnoběžky a v důsledku konformnosti zobrazení převádí danou oblast v jistý pás. Další zobrazení jsou zřejmá. **14.** a) $\zeta = \frac{1}{2}\pi z$, $\zeta_1 = \mathrm{e}^{\zeta}$, $\omega = \zeta_1^2$, $\omega_1 = \frac{1}{2}\left(\omega + \frac{1}{\omega}\right)$, dostaneme polorovinu s výřezy podél polopřímek $\mathrm{Re}\,\omega_1 < \cosh\pi$, $\mathrm{Re}\,\omega_1 > \cosh 2\pi$ $(\mathrm{Im}\,\omega_1 = 0)$, b) $\zeta = \frac{1}{2}\pi z$, $\zeta_1 = \mathrm{e}^{\zeta}$, $\zeta_2 = \frac{\zeta_1 - \mathrm{i}}{\zeta_1 + \mathrm{i}}$, $\omega = \zeta_2^2$ a dále jako sub a); c) $\zeta = \frac{1}{z}$ zobrazí danou oblast na vertikální pás s vodorovným výřezem, další viz př. 4, § 33; d) $\zeta = \frac{1}{z}$ zobrazí danou oblast na pás $-1 < \mathrm{Re}\,\zeta < 1$ s výřezem podél polopřímky $\mathrm{Re}\,\zeta = 0$ $\mathrm{Im}\,\zeta > \frac{1}{2}$; e) pomocí $\zeta = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ zobrazíme danou oblast na vnějšek úsečky $-d < \mathrm{Re}\,\zeta < d$, pak použijeme $\omega = \frac{1}{d}\zeta$ a zobrazení inversní k prvému a dostaneme vnějšek kruhu;

f) $\zeta = \dfrac{1+z}{1-z}$, $\zeta_1 = \zeta^4$, $\omega = \dfrac{1-\zeta_1}{1+\zeta_1}$ a dostaneme horní polorovinu s výřezem podél úsečky imaginární osy, dále viz př. 1 § 27; g) sled zobrazení je tento: pootočení, dilatace, $\omega = \zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}$, podobnost, $\omega_1 = \frac{1}{2}\left(\zeta_1 + \dfrac{1}{\zeta_1}\right)$ a dostaneme vnějšek úsečky. Další je zřejmé; h) $\omega = \sqrt{z}$ zobrazí danou oblast na polopás $0 < \mathrm{Im}\omega < 1$, $\mathrm{Re}\omega > -2$ a další viz př. 2 § 33; i) body ± 1 jsou sdruženy podle kružnice $(x - \sqrt{2})^2 + y^2 = 1$, pak aplikujeme $\zeta = \dfrac{z+1}{z-1}$, $\zeta_1 = \zeta^2$ a dále jako sub b); k) analogicky jako sub g).

KAPITOLA IV.

1. $r^2 = c_1 \sin 2\varphi$, $r^2 = c_2 \cos 2\varphi$, $E = \dfrac{2\mathrm{i}}{\bar{z}^3}$. **2.** $w = \ln \sinh \pi z + c$, $|\sinh \pi z| = \mathrm{const.}$ **3.** $V = \varphi\left(\dfrac{x^2+y^2}{2x}\right)$, $E_1 : E_2 = 1 : 2$. **5.** Hyperboly s ohnisky v bodech $\pm a$, kvartiky (křivky čtvrtého stupně) $y = \sqrt{1 + \dfrac{H^2}{x^2 + C^2}}$ (viz obr. 75). **6.** Náboj $2q$ v počátku a čtyřmi náboji $-q$ v bodech $\pm\sqrt{\pm \mathrm{i}}$. **8.** $\sigma = \dfrac{V}{2\pi^2}\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$. **9.** $w = 4\pi\mathrm{i}\,\mathrm{Ln}\dfrac{z - \mathrm{i}\sqrt{3}}{z + \mathrm{i}\sqrt{3}}$, v bodě $z = 2\mathrm{i} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ je hustota náboje $\sigma = \dfrac{\sqrt{3}}{2 + \sin\varphi}$. **10.** $w = \dfrac{\mathrm{i}}{\ln 2}\,\mathrm{Ln}\dfrac{4z+1}{z+4}$; na prvém válci $9a$ a $25a$; na druhém $2a$ a $18a$, kde $a = \dfrac{1}{60\pi \ln 2}$. **11.** $w = 100\mathrm{i}\left\{1 - \dfrac{\mathrm{Ln}(z + \sqrt{z^2-1})}{\mathrm{Ln}(2+\sqrt{3})}\right\}$.

12. $w = \dfrac{1}{\pi}\,\mathrm{Ln}\dfrac{\cosh\left(\dfrac{\pi}{\alpha}\,\mathrm{Ln}\dfrac{z}{a}\right) + 1}{\cosh\left(\dfrac{\pi}{\alpha}\,\mathrm{Ln}\dfrac{z}{a}\right) - 1} = \dfrac{2}{\pi}\,\mathrm{Ln}\,\mathrm{cotgh}\left(\dfrac{\pi}{2\alpha}\,\mathrm{Ln}\dfrac{z}{a}\right)$; $\mathrm{tg}\dfrac{\pi v}{2} = \dfrac{\sin\dfrac{\pi\varphi}{\alpha}}{\sinh\left(\dfrac{\pi}{\alpha}\ln\dfrac{r}{a}\right)}$.

13. $\dfrac{Q}{\pi}\,\mathrm{Ln}(z + \sqrt{z^2+1})$. **14.** $w = \dfrac{Q}{2\pi}\ln\left(1 + \dfrac{4}{z^4}\right)$, proudnice $\sin 4\varphi = c(r^4 + 4\sin^4\varphi)$. **15.** $w = \dfrac{2V_0}{\pi}\,\mathrm{Ln}\left(\dfrac{1-z^2}{1+z^2}\sqrt{z^2+1}\right) + \dfrac{V_0 \ln 2}{\pi}$. **16.** $w = \dfrac{Q}{2\pi}\ln(z^6 + a^6)$.

KAPITOLA V.

1. a) i; b) 2i; c) 2i. **2.** $4\pi i$. **3.** $i(\sinh 1 - \cosh 1)$. **4.** a) $e^{1-i} - 1$; b) $(e - 1) \times$ $\times (e^{-i} - 1)$. **5.** Délka oblouku křivky L. **6.** $\frac{1}{2i}$. **7.** $\pi \frac{\sqrt{2}}{2} i$. **8.** $-\frac{1}{2}\pi(2i - 1)e^i$. **9.** Funkce $|f(z)|$ nemá extrémy uvnitř oblasti; Cassiniho křivky s n ohnisky definované rovnicí $|P_n(z)| = \text{const}$, kde $P_n(z)$ je mnohočlen stupně n. **11.** $a + c = 0$. **13.** Dosadíme $x = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$, $y = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$, pak $u = \frac{\sin(z + \bar{z})}{\cos(z - \bar{z}) - \cos(z + \bar{z})} =$ $= \frac{1}{2}(\operatorname{cotg} z + \operatorname{cotg} \bar{z})$ a tedy $f(z) = \operatorname{cotg} z + iC$, okrajová podmínka dává $C = 0$. **14.** Poissonův vzorec dává $u = \frac{1}{2\pi} \int_\alpha^\beta \frac{(1 - r^2)\, d\psi}{1 - 2r\cos(\psi - \varphi) + r^2} =$ $= \frac{1}{\pi}\left[\operatorname{arctg} \frac{1 + r}{1 - t} \operatorname{tg} \frac{\beta - \varphi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{1 + r}{1 - r} \operatorname{tg} \frac{\alpha - \varphi}{2}\right]$. **17.** Použijeme (61).

KAPITOLA VI.

1. a) Polorovina $\operatorname{Re} z > 1$; b) jako v § 64 napíšeme řadu ve tvaru $\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{inz}$; v rovině $\zeta = e^{iz}$ bude jejím konvergenčním oborem mezikruží; v rovině (z) vodorovný pás. **2.** a) ∞; b) 1. **3.** a) $\sqrt[3]{i}\left(1 + \frac{z - i}{i}\right)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{i}\left\{1 + \frac{1}{3}i(z - i) - \right.$ $\left. - \frac{1}{2i^2} \cdot \frac{2}{3^2}(z - i)^2 + \frac{1}{3!i^3} \frac{2 \cdot 5}{3^3}(z - i)^3 - \frac{1}{4!\, i^4} \frac{2 \cdot 5 \cdot 8}{3^4}(z - i^4) + \ldots\right\}$, kde $\sqrt[3]{i}$ nabývá všech možných hodnot; b) $\operatorname{Ln}(i + zi) = i(\frac{1}{2}\pi + 2k\pi) + \frac{z - i}{i} - \frac{(z - i)^2}{2i^2} +$ $+ \frac{(z - i)^3}{3i^3} + \ldots$, kde $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ **4.** $f(z) = e^{\frac{\ln(1+z)}{z}}$; dosazením řady pro $\zeta = \frac{\ln(1 + z)}{z}$ do řady pro e^ζ dostaneme $f(z) = e\left(1 - \frac{1}{2}z + \frac{\pi}{24}z^2 - \ldots\right)$. **5.** $f(z)$ má zřejmě singularitu v bodě $z = 1$; je $f(z) = z^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (z^2)^{2^n} = z^2 +$ $+ f(z^2)$, a tedy singularita bude i v bodě $z^2 = 1$; dále $f(z) = z^2 + z^4 +$ $+ f(z^4)$, a tedy singularita bude i v bodě $z^4 = 1$ atd. **6.** a) dvě jednoznačné; b) jedna dvojznačná; c) jedna dvojznačná; d) dvě jednoznačné; e) jedna jednoznačná; f) nekonečně mnoho jednoznačných; g) jedna nekonečně mnoho-

značná. **7.** Dosadíme $t = \cos\varphi$ a rozložíme $f(z)$ v parciální zlomky: $-1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}ze^{-i\varphi}} + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}ze^{i\varphi}}$; každý z nich rozvineme v geometrickou řadu; dostaneme $f(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\varphi}{2^{n-1}} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos n\varphi}{2^{n-1}} z^n$, odkud $T_n(\cos\varphi) = \frac{1}{2^{n-1}} \cos n\varphi$. **8.** a) $\sum_{n=1}^{\infty} a^n \sin nt$; b) $-2 - 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n} \cos nt$. Návod: dosadíme $e^{it} = z$, obdržené řady rozvineme v Laurentovu řadu a odtud dostaneme hledaný výsledek. **9.** a) $-\frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} - \frac{5}{6z^3} - \ldots$, b) $\pm z\left(1 - \frac{1}{z}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1 - \frac{2}{z}\right)^{\frac{1}{2}} = \pm z\left(1 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \ldots\right)$, kde součinitele a_k dostaneme vynásobením řad; c) funkce nemá Laurentův rozvoj, neboť v okolí bodu $z = \infty$ nelze konstruovat regulární větev; d) rozvoj každé z větví je $\frac{b-a}{z} + \frac{b^2 - a^2}{2z^2} + \frac{b^3 - a^3}{3z^3} + \ldots + 2k\pi i$, $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots)$. **10.** $I_n(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!} (\frac{1}{2}t)^{n+2k}$. Rozvoj dostaneme substitucí $\zeta = \frac{1}{2}t\left(z - \frac{1}{z}\right)$ do řady pro e^{ζ} a srovnáním podle mocnin z. Ze vzorce pro koeficienty Laurentovy řady dostáváme: $J_n(t) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C e^{\frac{t}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right)} \cdot \frac{dz}{z^{n+1}}$; integrujeme-li podél $|z| = 1$ a dosadíme-li $z = e^{i\varphi}$, dostaneme $J_n(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} e^{it\sin\varphi} e^{-ni\varphi} i\, d\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(n\varphi - t\sin\varphi)\, d\varphi$, neboť $\int_0^{2\pi} \sin(n\varphi - \sin\varphi)\, d\varphi = 0$, o čemž se lehko přesvědčíme substitucí $\varphi = 2\pi - \Theta$. **11.** Bod $z = 1$ je singulární bod funkce. **12.** Prvá z funkcí je spojitá v bodě $x = 0$ spolu se všemi svými derivacemi, druhá má v bodě $z = 0$ podstatně singulární bod. **14.** a) podstatně singulární bod $z = 1$; póly prvého řádu v bodech $z = 2k\pi i$; bod $z = \infty$ je neisolovaný singulární bod (hromadný bod pólů); b) póly prvého řádu v bodech $z = -\frac{1}{4}\pi + k\pi$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3)$, kde $\sin z + \cos z = 0$; bod $z = \infty$ je neisolovaný singulární bod; c) v bodech $z = (2k + 1)\pi i$ póly prvého řádu; bod $z = \infty$ je neisolovaný singulární bod; d) podstatně singulární bod $z = \infty$. **15.** a) $a = -2$, použijeme Cauchyho residuové věty. **16.** a) $\left(\frac{1}{\cos z}\right)_{z=k\pi} = (-1)^k$; b) $z_k = e^{i\frac{2k+1}{n}\pi}$, $\operatorname{res} f(z_k) = -\frac{z_k}{n}$, $\operatorname{res} f(\infty) = 0$ pro $n \neq 1$, $\operatorname{res} f(\infty) =$

$= -1$ pro $n = 1$; c) $\operatorname{res} f(-1) = (-1)^{n+1}\binom{n+1}{2n}$, $\operatorname{res} f(\infty) = (-1)^n\binom{n+1}{2n}$; d) 0; e) 0; f) $\operatorname{res} f(-1) = e^{-1}$, $\operatorname{res} f(\infty) = -\left(1 - \frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3!} + \ldots\right) = -e^{-1}$; g) $e^b - e^a$. **17.** $Q = 0$, $\Gamma = 2\pi$, **18.** $(2n+1)\,q$.

KAPITOLA VII.

1. a) $\frac{\pi\sqrt{2}}{2}$; b) $\frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}$; c) $\frac{\pi}{\sqrt{2}} e^{\frac{a}{\sqrt{2}}}\left(\cos\frac{a}{\sqrt{2}} + \sin\frac{a}{\sqrt{2}}\right)$; d) $\frac{1}{2}\pi$; e) $\frac{1}{2}\pi\left\{1 - e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}}\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right\}$; f) $\frac{\pi\sin a\lambda}{\sin a\pi\sin\lambda}$; g) $\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$; h) $\frac{1}{4}\pi$; i) $\frac{1}{6}\pi^3$. **2.** $f(t) = 0$ pro $t < 0$, $f(t) = t$ pro $t \geqq 0$. **5.** a) $\operatorname{tg} z = \operatorname{cotg} z - 2\operatorname{cotg} 2z = 2z\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2\frac{1}{4}\pi^2 - z^2}$; b) $\frac{1}{\sin z} = \operatorname{cotg} z + \operatorname{tg}\frac{z}{2} = \frac{1}{z} + 2z\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{z^2 - k^2\pi^2}$; c) $4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k(2k-1)}{4z^2 - (2k-1)^2}$ [záměnou z na $\frac{1}{2} - z$ v b)]; d) $\frac{1}{e^z - 1} = -\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\operatorname{cotg}\frac{iz}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{z} + 2z\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{z^2 + 4k^2\pi^2}$. **6.** a) $e^z - 1 = 2ie^{\frac{1}{2}z}\sin\frac{z}{2i} = e^{\frac{1}{2}z}z\prod_{k=1}^{\infty}\left(1 + \frac{z^2}{4\pi^2k^2}\right)$; b) $\cos\pi z - \cos\pi z_0 = -2\sin\pi\frac{z+z_0}{2}\sin\pi\frac{z-z_0}{2} = -\frac{1}{2}\pi^2(z^2 - z_0^2)\prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{(z+z_0)^2}{4k^2}\right)\left(1 - \frac{(z-z_0)^2}{4k^2}\right)$; c) $\operatorname{cosh} z - \cos z = \frac{\sin 2\pi z}{2\sin\pi z} = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{4z^2}{(2k-1)^2}\right)$. **7.** $w = 2qi\,\operatorname{Ln}\operatorname{cotg}\frac{\pi z}{2d}$; použijeme rozvoje pro $\sin\pi z$ a $\cos\pi z$. **8.** $w(z) = \frac{Q}{\pi}\ln\sin\frac{\pi z}{2d}$. **9.** Dosadíme $x = \sqrt{t}$, integrál přejde na tvar $\frac{1}{2}\int_0^{\infty} e^{-t}t^{-\frac{1}{2}}\,dt = \frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})$. **10.** Integrováním funkce $f(\zeta) = \zeta^{z-1}e^{-\zeta}$ po obvodu čtvrtiny kruhu $|\zeta| = R$, $0 < \arg\zeta < \frac{1}{2}\pi$ a limitováním $R \to \infty$. a) $\frac{1}{n}\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\cos\frac{\pi}{2n}$; b) $\frac{1}{n}\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\sin\frac{\pi}{2n}$; c) $\frac{1}{n-1}\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\cos\frac{\pi}{2n}$. **11.** Do integrálu, který definuje B — funkci, dosadíme $t = \frac{\tau}{1+\tau}$ a dostaneme $B(p,q) = \int_0^{\infty}\frac{\tau^{p-1}}{(1+\tau)^{p+q}}\,d\tau$ (+). Do integrálu $\Gamma(p+q) = \int_0^{\infty}t^{p+q-1}e^{-t}\,dt$ zavedeme no-

vou proměnnou σ vztahem $t = (1 + \tau)\,\sigma$ a dostaneme $\dfrac{1}{(1+\tau)^{p+q}} = \dfrac{1}{\Gamma(p+q)} \times$

$\times \int_0^\infty \sigma^{p+q-1} e^{-(1+\tau)\sigma}\, d\sigma$. Dosadíme tento výraz do integrálu (+) a zaměníme po-

řádek integrace: $B(p, q) = \dfrac{1}{\Gamma(p+q)} \int_0^\infty \tau^{p-1}\, d\tau \int_0^\infty \sigma^{p+q-1} e^{-(1+\tau)\sigma}\, d\sigma = \dfrac{1}{\Gamma(p+q)} \times$

$\times \int_0^\infty \sigma^{q-1} e^{-\sigma}\, d\sigma \cdot \int_0^\infty (\tau\sigma)^{p-1} e^{-(\tau\sigma)}\, d(\tau\sigma) = \dfrac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$. **12.** a) $\frac{1}{2}B(p + \frac{1}{2}, q + \frac{1}{2}) =$

$= \dfrac{\Gamma(p + \frac{1}{2})\,\Gamma(q + \frac{1}{2})}{2\Gamma(p + q + 1)}$; b) $\dfrac{\pi}{2 \sin \dfrac{(p+1)\pi}{2}}$; c) $\dfrac{\Gamma^2(\frac{1}{4})}{4\sqrt{2\pi}}$; d) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{m+1}{n}} \dfrac{a^{-p}}{n} \times$

$\times \dfrac{\Gamma\left(\dfrac{m+1}{n}\right) \Gamma\left(p - \dfrac{m+1}{n}\right)}{\Gamma(p)}$.

KAPITOLA VIII.

1. a) Zobrazíme horní polorovinu obrazce na polorovinu $\zeta = e^{\frac{\pi z}{H}}$ a pomocí principu symetrie dostaneme zobrazení celého obrazce na rovinu s výřezy podél polopřímek $\left(-\infty, e^{-\frac{d\pi}{H}}\right)$ a $\left(e^{\frac{d\pi}{H}}, \infty\right)$. Zbývá aplikovat zobrazení $\omega = \dfrac{\zeta - \cosh \dfrac{d\pi}{H}}{\sinh \dfrac{d\pi}{H}}$ a $w = \omega + \sqrt{\omega^2 - 1}$; b) dosadíme $\zeta = \dfrac{1}{z}$, vezmeme jednu osminu obrazce — výseč $0 < \arg\zeta < \frac{1}{4}\pi$; aplikujeme zobrazení $\zeta_1 = \zeta^n$, $\omega = \zeta_1 + \sqrt{\zeta_1^2 - 1}$, $w = \sqrt[4]{\omega}$; dostaneme výseč $0 < \arg w < \frac{1}{4}\pi$, $|w| > 1$, při čemž uvedeným částím hranice odpovídají polopřímky. Z principu symetrie plyne, že takto konstruovaná funkce zobrazí danou oblast na vnějšek kruhu. Dostáváme

$w = \dfrac{1}{z} \sqrt[4]{1 - \sqrt{1 - z^7}}$ čili $z = \dfrac{w \sqrt[4]{2}}{\sqrt[4]{1 + w^8}}$. **4.** a) Jako v cvič. 13 d) kap. III zobrazíme parabolu na přímku. Uvnitř paraboly není toto zobrazení jedno-jednoznačné. Nicméně zprostředkuje jedno-jednoznačné zobrazení horní poloviny dané oblasti na polopás. Tento polopás zobrazíme na polorovinu a daná oblast se při tom zobrazí na rovinu s výřezem podél polopřímky. Další je zřejmé; b) jako

v cvič. 13 e) kap. III vezmeme funkci, která zobrazí hyperbolu na ramena jistého úhlu, horní polovina dané oblasti se při tom zobrazí na vnitřek úhlu s jistým výřezem. Další je zřejmé; c) jako v př. 13 c) kap. III vezmeme funkci, která zobrazí elipsu na jistou kružnici, horní polovina dané oblasti se při tom zobrazí na polovinu jistého mezikruží. Logaritmická funkce zobrazí toto mezikruží na jistý obdélník. Z principu symetrie plyne, že se pak i vnitřek elipsy zobrazí na jistý obdélník. Pak zbývá už jen aplikovat eliptickou funkci sn.

5. a) Rozdělit podél $y = x$ a umocnit dvěma. Další je zřejmé; b) $\zeta = \dfrac{z - \mathrm{i}}{z + \mathrm{i}}$, rozdělit podél imaginární osy. Další je zřejmé; c) rozříznout podél imaginární osy, umocnit dvěma a pak rozříznout podél reálné osy. Další je zřejmé. **6.** Rozříznout podél imaginární osy, umocnit dvěma a pak aplikovat zobrazení $\omega = \dfrac{\zeta - \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}\zeta}$, $\omega_1 = \sqrt{\omega}$, $\omega_2 = \frac{1}{2}\left(\omega_1 + \dfrac{1}{\omega_1}\right)$; dostaneme dolní polorovinu. Další je zřejmé. **7.** a) $z = A \displaystyle\int_0^w \frac{\sqrt{w}}{(w-1)(w+a)}\,\mathrm{d}w$, kde $a = \dfrac{H^2}{h^2}$, $A = \dfrac{H^2 + h^2}{\pi h \mathrm{i}}$. b) Použijeme principu symetrie a $z = A \displaystyle\int_0^w \frac{w^{-1-\alpha}}{w+1}\,\mathrm{d}w + B$, kde $A = \dfrac{h}{\pi}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi\alpha}$, $B = \mathrm{i}h$ zobrazí horní polovinu dané oblasti na polorovinu;

c) $z = A \displaystyle\int_0^w \frac{\sqrt{w}}{(w-1)(w-a)(w+b)}\,\mathrm{d}w$, kde $\dfrac{A\pi}{(a+1)(1+b)} = h_1$,

$\dfrac{A\pi\sqrt{a}}{(a-1)(a+b)} = h_2$, $\dfrac{A\pi\sqrt{b}}{(b+1)(a+b)} = h_3$; d) $z = r\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\pi}{4}} \displaystyle\int_0^w \frac{w(w-1)}{\sqrt{(w-k)^3}}\,\mathrm{d}w - a$.

(Argument konstanty před integrálem se stanoví z podmínky: pro $w = u > 1$ je úhel pootočení zobrazení $\arg \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}w} = -\frac{1}{4}\pi$.) Dále použijeme podmínky, že bodu $w = 1$ odpovídá bod $z = a\mathrm{i}$. Odtud $k = \frac{1}{4}$, $r = \dfrac{3a}{2\sqrt{2}}$;

e) $z = A \displaystyle\int_0^w \frac{(w+1)}{(w+a)^{\alpha}\, w^{1-\alpha}}\,\mathrm{d}w + a$, kde a je reálná konstanta. Konstanty A a a se vyčíslí stejně jako v d) pomocí dvojic odpovídajících si bodů. **9.** Provedeme pomocný výřez podél imaginární osy, pravou polovinu zobrazíme na horní polorovinu pomocí Christoffelova-Schwarzova vzorce a použijeme principu symetrie. **10.** a) Rozříznout podél imaginární osy a použít př. 2 § 83 a principu

symetrie; b) pás $0 < y < h$ zobrazíme pomocí $\zeta = e^{\frac{2\pi z}{h}}$ na rovinu s výřezem podél kladné reálné poloosy; daným úsečkám odpovídají úsečky $\left(e^{\frac{-2\pi a}{h}}, e^{\frac{2\pi a}{h}}\right)$ na horním a dolním okraji výřezu. Pak aplikujeme $\omega = A\zeta + B$, kde konstanty A a B určíme tak, aby tyto úsečky přešly v jednotkové

$$\left(A = \frac{1}{\sin\frac{2\pi a}{h}},\ B = -\operatorname{cotgh}\frac{2\pi a}{h}\right).$$

Pak ještě použijeme $w = \frac{1}{2}\left(\omega + \frac{1}{\omega}\right)$. Použijeme-li na konec ještě principu symetrie, dostaneme konečně hledané mnohoznačné zobrazení.

REJSTŘÍK

Abelova věta 202
Algebra fundamentální věta 278
— komplexních čísel 10, 19
— vektorová 9
Amplituda eliptického integrálu 332
Analytická funkce 96, 100, 103, 105, 110—115, 127
— — bod rozvětvení 76, 78, 79, 82, 96, 100, 215
— — přirozená hranice 214
— — regulární element 214
— — úplná 213
— — věta o jednoznačnosti 209
— — větev viz větev
— pokračování 210—215
Apollonius 64
— kružnice 64, 142
— věta 64
Argument komplexního čísla 13
— — — hlavní hodnota 14
— — — jednoznačná větev 13—15, 81
— kosinus 102
— kotangens 102
— sinus 102
— tangens 102
— zobrazení 51
Arkus kosinus 101
— kotangens 101
— sinus 101
— tangens 101

Biperiodická funkce 335
Bod komplexní roviny 10
— konečný 25
— nekonečný vzdálený 25
— nulový (funkce) 208
— proudění — kritický 148
— — rozvětvení 149
— — sjednocení 149, 240, 241
— rozvětvení (funkce) viz Riemannova plocha
— sdružený v inversi 18, 19, 63
— — — — invariance 63
— singulární 163, 207, 215
— — isolovaný 223
— — nepodstatný (pól) 224, 225, až 230, 233
— — odstranitelný 223, 224, 225, 233
Bod singulární podstatný 224, 230—233, 234
— vnější (oblasti) 26

Cauchy - Riemannovy rovnice 43—45
Celistvá funkce 247
— — transcendentní 243
Cirkulace 117, 118, 133, 165
Cyklické konstanty 126, 134
Cyklometrické funkce 100, 101

Čaplyginovy podmínky 151
— vzorec 165, 239

Delta amplituda 335
Derivace 31, 43
— geometrická interpretace 31
— odhad 178
Diagram proudový 34
Diferenciál 55—57
Diferencovatelná funkce 43, 51, 57
Dilatace roviny 37, 52, 53
Dipol 131, 135
Dirichletův problém 182—187
— — Greenova funkce 185
— — Greenův vzorec 185
— — pro polorovinu 188
Divergence 116, 118
Doplněk modulu eliptického integrálu 332

Ekvipotenciální křivky 121, 190
Elektrostatické pole 111, 116, 120—132, 190—194
— — bodového náboje (rovinné) 113 121, 129
— — deskových elektrod 326—329
— — dipolu 131
— — dvojžilného vedení 142
— — dvou bodových nábojů 130
— — dvou různě nabitých kruhových válců 140
— — ekvipotenciální křivky 121, 190
— — homogenně nabité křivky 122
— — homogenně nabité oblasti 122
— — homogenně nabité přímky 112
— — intensita 111, 128
— — komplexní potenciál 120—123, 127—132

elektrostatické pole kondensátoru na okrajích 322 až 326
— — soustavy bodových nábojů 114, 130, 131
Element regulární (funkce) 214
Elementární funkce 74—109
Eliptické funkce 333—337
— integrál viz integrál
Eulerova funkce $\Gamma(z)$ 287—295
— konstanta 289
— vzorec 14
Exponenciální funkce 92—96
— — obecná 102—105
— tvar komplexního čísla 15

Fourierova řada viz řady
Fresnelův integrál 255
Frullaniův integrál 254
Fundamentální věta algebry 278
Funkce komplexní proměnné 35
— — — analytická viz analytická funkce
— — — arg z 14, 15, 41, 42
— — — — spojitost 41, 42
— — — Arg z 13—15
— — — biperiodická 335
— — — celistvá 242
— — — transcendentní 243
— — — cyklometrické 100, 101
— — — diferencovatelná 41, 51, 57
— — — elementární 74—109
— — — eliptické 333—337
— — — exponenciální 92—96
— — — — obecná 102—105
— — — goniometrické 98—100, 318, 279—285
— — — — Eulerův vzorec 14
— — — Greenova 185
— — — harmonická viz harmonická funkce
— — — hyperbolické 101
— — — hyperbolometrické 102
— — — inversní 35
— — — Jacobiho 333—337
— — — jednoznačná 14, 35
— — — jedno-jednoznačná 35
— — — lineární 38
— — — lomená 57—60, 61—69
— — — logaritmická 96—98
— — — — integrální vyjádření 170
— — — meromorfní 243
— — — mnohoznačná 35
— — — ohraničená 42, 179, 182, 234
funkce komplexní proměnné periodická 93, 98
— — — primitivní 167
— — — proudová 133, 190
— — — racionální lomená 243
— — — regulární (vlastnosti) 46, 160, 162, 174, 176—180, 205—210
— — — silová 123—127, 190
— — — složená 36
— — — spojitá (vlastnosti) 41—42
— — — větev viz větev
— — — z^n 77—78
Funkce (komplexní) reálné proměnné 30—32
— — — — derivace 31
— — — — geometrická interpretace 31
— — — — hladká 32
— — — — hodograf 31
— — — — limita 30
— — — — po úsecích hladká 32
— — — — spojitost 32

Gaussův vzorec 176, 177
— věta 116
Geometrická řada viz řady
Gradient 111
Greenův vzorec 185
— funkce 185
Goniometrické funkce 98—100, 279 až 285, 318
— — Eulerův vzorec 14

Harmonická funkce 180—182, 190
— — derivace 182
— — sdružená 180
— — věta o extrémech 182
— — věta Liouvilleova 182
— — věta o střední hodnotě 182
Hladká funkce 32
— — po úsecích hladká 32
Hodograf 31
Hranice přirozená (funkce) 214
— oblasti 26
Hyperbolické funkce 101
Hyperbolometrické funkce 102

Christofelův - Schwarzův integrál 309 až 315

Imaginární část 12
— jednotka 12
— osa 12
— ryze 12

Impedance 33
— kapacity 34
— ohmického odporu 34
— samoindukce 34
Integrál Cauchyho 158, 172—174
— — věta 160, 163, 172—174
— — — druhý tvar 162
— — — pro vícenásobně souvislé oblasti 163
— eliptický prvého druhu 330
— — — — úplný 333
— — — — modul 332
— — — — — doplněk 332
— Fresnelův 255
— Frullaniův 254
— Christofelův - Schwarzův 309—315
— neurčitý 166, 167
— Poissonův 188, 189, 192—194, 256
— residuová věta 164
— Schwarzův 189, 194
— sinus 252
— typu Cauchyho 174
— věta o střední hodnotě 177, 182
— vzorec Gaussův 176, 177
— vzorec Newton-Leibnizův 169
Intensita 111, 128
Invariance sdružených bodů 61—64
— nekonečně malých kružnic 51
Inverse 19, 58, 61—64
Inversní funkce 35
— zobrazení 35

Jacobiho funkce 333—337
Jakobián 52, 53

Kartézská souřadnicová síť 54
Kondensátor Rogovského 326
— — výpočet pole na okrajích 322 až 326
Konformní zobrazení viz zobrazení
Konformně ekvivalentní síť 54
Konservatismus úhlů 51
Konstanta cyklická 126, 134
— Eulerova 289
Konvergence nekonečného součinu 284
— posloupnosti 27, 28
— řady 197
— stejnoměrná 198, 218
Komplexní číslo 9
— — argument viz argument
— — exponenciální tvar 15
— — imaginární část 12
— — jako vektor 10, 11
— — kartézský tvar 11, 13
komplexní číslo modul 13
— — operace 10—21
— — polární tvar 13
— — reálná část 12
— kmit 32—34
— potenciál v elektrostatice viz elektrostatické pole
— — ekvipotenciální křivky 121, 190
— — v hydromechanice viz proudění kapaliny
— — teplené proudění viz tepelné proudění
Kosinus amplituda 335
— hyperbolický 101
— obyčejný 98
Kotangens hyperbolický 101
— obyčejný 98
Koule komplexních čísel 25
Křídlo — Čaplyginovy podmínky 151
— — vzorec 165, 239
— profil 92, 151
— prohnutí 82
— theorie 90—92, 151
— tloušťka 92
— Žukovskij 92
— — profil 90—92, 151
— — věta o vztlaku 240
Křivka ekvipotenciální 121, 190
— hladká 32
— po úsecích hladká 32
— proudnice 115, 133
Kružnice Apolloniovy 64

Laplaceův operátor 180
— transformace 273
Laurentova řada viz řady
Limita funkce 30, 39, 40
— posloupnosti 27, 28
Lineární funkce 38
— — lomená 57—60, 61—69
Logaritmická funkce 96—98
— — integrální vyjádření 170
— residuum 274, 275

Methoda zrcadlení 155
Meromorfní funkce 243
Mittag - Lefflerova věta 284
Množina všech komplexních čísel 10
Modul eliptického integrálu 332
— — — doplněk 332
— komplexního čísla 13
— zobrazení 50, 51
Moivreův vzorec 20

Náboj úhrnný 124, 164
Nevířivé pole 119
Newton - Leibnizův vzorec 169

Oblast 26
— existenční 241
— — přirozená hranice 241
— hranice 26
— jednoduše souvislá 27
— polygonální 309
— stupeň souvislosti 27
— uzavřená 26
— vnější bod 26
— výřez 26, 27
Obvod RCL 33
Obtékání nekonečné křivky 144—147
— — — úplné 147—152, 236—242
Odpor komplexní 33
— — úplný 33
Ohmův zákon 33
— — zevšeobecnění 33
Ohraničená funkce 42, 179, 182, 234
— oblast 26
— posloupnost 28
Okolí 27
— ε-okolí 27
Osa imaginární 12
— reálná 12
Otočení roviny 37

Periodická funkce viz funkce
Plocha Riemannova viz Riemannova plocha
Poissonův integrál 188, 248
Pól 224, 225—230, 233
Polární tvar komplexního čísla 13
— souřadnicová síť 54
Pole viz vektorové pole
Poloměr konvergence 204
Polygonální oblast 309
Posloupnost 27
— konvergentní 28
— limita 27, 28
— ohraničená 28
Postupné proudění 114, 134
Posunutí roviny 37
Potenciál viz potenciál komplexní
Potenciální pole 117, 120
Potenční řada 202—205
Primitivní funkce 167
Princip argumentu 277
— spojitého pokračování 298
— symetrie 299
— zachování oblastí 72
Profil Žukovského 90—92, 151
Projekce stereografická 24
Proudění kapaliny 111, 117, 147—152, 190, 227—229
— — bod kritický 148
— — — sjednocení 149, 240, 241
— — — rozvětvení 149
— — bodový nor 115
— — — zdroj 115, 135, 227
— — dipol 135
— — obtékání nekonečné křivky 144 až 147
— — postupné 114, 134
— — potenciál 134
— — potenciální funkce 133, 190
— — proudnice 115, 133
— — proudová funkce 133, 190
— — úplné obtékání 147—152, 236 až 242
— — vír 119
— — vířivé 115, 119, 135, 227
Přirozená hranice 214
Přírůstek argumentu 41
— funkce 41
Pseudorovinné pole 112

Racionální lomená funkce 243
Reálná část 12
— jednotka 12
— osa 12
Regulární element (funkce) 214
— funkce viz funkce
Residuum 163, 229, 234, 235, 289
— logaritmické 274, 275
— věta 164
Riemannova plocha 74—76, 78, 81, 82, 85, 95, 99, 215
— — body rozvětvení 76, 78, 79, 82, 85, 96, 100, 215
— — elementárních funkcí 74—76, 78, 95, 96, 100
— — reálné analogon 76—77
Rogovského kondensátor 326
Rotace 119
Rovina komplexních čísel 10, 25
— — — dilatace 37
— — — otevřená (konečná) 25
— — — otočení 37
— — — posunutí 37
— — — uzavřená (úplná) 25
Rovinné vektorové pole viz vektorové pole
Rovnice Cauchy-Riemannovy 43—45

Řada 197—199
— Fourierova 221—223
— geometrická 203
— konvergentní 197
— Laurentova 217
— — Cauchyho odhad pro koeficienty 219
— potenční 202—205
— — poloměr konvergence 204
— stejnoměrně konvergentní 198, 218
— Taylorova 205
— věta Abelova 202
— — Weierstrassova 200

Schwarzův integrál 309—315, 189, 194
Silová funkce 123, 127, 190
Sinus amplituda 335
— hyperbolický 101
— integrál 252
— obyčejný 98
Síť souřadnicová kartézská 54
— — konformně ekvivalentní 54
— — polární 54
Solenoidální pole 117, 123
Součin nekonečný 284—287
— konvergence 284
Souvislost viz oblast
Spojitá funkce viz funkce
Stacionární pole 112
— řešení 33
Stereografická projekce 24

Tangens hyperbolický 101
— *obyčejný* 98
Taylorova řada viz řada
Tepelná proudění 111, 119, 136, 152, 190
— — bodový zdroj 116
— — mezi excentrickými válci kruhovými 143
— — tepelný tok 111
— — vnitřní tepelná vodivost 119
Theorie křídla viz křídlo
Tok vektorového pole 116, 117, 133, 165

Úhel mezi přímkami v bodě ∞ 59
Ustálené řešení 33

Vektorové pole 111, 190—194
— — cirkulace 117, 118, 133, 165
— — cyklické konstanty silové funkce 126, 134
vektorové pole divergence 116, 118
— — ekvipotenciální křivky 121, 190
— — elektrostatické viz název
— — intensita 111, 128
— — nevířivé 119
— — potenciál viz komplexní potenciál
— — potenciální 117, 120
— — — funkce 121, 190
— — prstencové 137, 140—144
— — pseudorovinné 112
— — rotace 119
— — rovinné 111, 116—120
— — silová funkce 123—127, 190
— — solenoidální 117, 123
— — stacionální 112
— — tok 116, 117, 133, 165
— — úhrnný náboj 124, 164
— — v hydrodynamice viz proudění
— — v pásu 136, 137—140
— — ve vedení tepla viz tepelné proudění
— — věta Gaussova 116
— — vír 119
— — vířivé 115, 119, 135, 227

Věta Abelova 202
— Apolloniova 64
— Cauchyho (*integrální*) 160, 163, 172—174
— — pro vícenásob souvislé oblasti 163
— — druhý tvar 162
— Cauchy-Reimannova 45
— fundamentální (algebry) 278
— Gaussova 116, 176, 177
— Liouvilleova 179, 182, 234
— Mittag-Leflerova 282
— o existenci konformního zobrazení 69
— o jednoznačnosti analytické funkce 209
— — — konformního zobrazení 69
— o maximu modulu 177, 182
— o přirazení hranic 71—72
— o residuích 164
— o střední hodnotě 177, 182
— Rouchéova 277, 278
— Weierstrassova 200, 230, 285
Větev funkce 13—15, 78—81, 85
— regulární 78, 213
Vír 119
Vířivé pole 115, 119, 135, 227
Výřez 26, 27

Vzorec Čaplyginův 165, 239
— Eulerův 14
— Gaussův 176, 177
— Greenův 185
— Hankelův 295
— Moivreův 20
— Newton-Leibnizův 169

Zobrazení inversní 35
— jedno-jednoznačné 35
— lineární 38
— — lomené 57—60, 61—69
— roviny komplexních čísel na kouli 24
— vzájemně jednoznačné 35
— superposice 36
Zobrazení konformní 49—54, 69—72
— — I. typu 52
— — II. typu 52
— — argument zobrazení 51
— — existence a jednoznačnost 69
— — formulace základních úloh 136 až 137
— — hlavní lineární část 56
— — invariance nekonečně malých kružnic 51
— — Jakobián 12, 53
— — konformně ekvivalentní sítě 54
— — konservatismus úhlů 51
— — modul 50, 51
— — obecné principy 69—72
— — okrajové podmínky 71
— — plošná dilatace 52, 53
— — princip symetrie 229
— — — zachování oblastí 72
— — přiřazení hranic 71—72
— — úhel pootočení 50, 51
— — úlohy 85—92
Zobrazení konformní (základní úlohy)
— — excentrického mezikruží na kruhové mezikruží 143
— — kruhu na kruh 67—68
— — kruhu na rovinu s výřezem podél úsečky 83
— — obdélníku na polorovinu 329
— — pásu na polorovinu 94
— — pásu na kruh s výřezem podél poloměru 94
Zobrazení konformní pásu na rovinu s výřezem podél polopřímky 94
— — pásu s výřezem podél polopřímky na polorovinu 107, 319
— — pásu s výřezem podél úsečky na polorovinu s výřezem podél úsečky 107, 139
— — pásu s dvěma výřezy podél úseček na polorovinu 304
— — polokruhu na polorovinu 87
— — polomezikruží na obdélník 97
— — polopásu na polokruh 94
— — polopásu na polorovinu 106, 317
— — polopásu na rovinu s výřezem podél polopřímky 99, 200
— — poloroviny na kruh 66—67
— — poloroviny s výřezem podél úsečky na polorovinu 86, 144, 318
— — polygonu na polorovinu 309 až 315
— — profilů Žukovského 90—92, 151
— — roviny s výřezem podél polopřímky na pás 97
— — roviny s dvěma výřezy podél polopřímek na pás 107, 138
— — roviny s dvěma výřezy podél polopřímek na polorovinu 87
— — srpku na pás 105
— — vnějšku kruhu na vnějšek úsečky 84
— — vnějšku „mlýnského kola“ na vnějšek kruhu 304
— — vnějšku paraboly na polorovinu 81, 145
— — vnějšku písmene „T“ na polorovinu 302
— — výseče roviny na rovinu s výřezem podél polopřímky 104
— — výseče pravoúhlé na polorovinu 105

Žukovský 92
— funkce 90—92, 82—85
— profil 90—92, 151
— věta o vztlaku 236—242

OBSAH

Předmluva k českému vydání 3
Předmluva 4
Úvod
§ 1. Komplexní čísla 9
§ 2. Jednoduché operace 10
§ 3. Násobení a dělení 16
§ 4. Umocňování a odmocňování 19
Úlohy 22

Kapitola I. **Základní pojmy theorie funkcí komplexní proměnné.**

§ 5. Zobrazení komplexních čísel roviny na kouli 24
§ 6. Oblasti a jejich hranice 26
§ 7. Limita posloupnosti 27
§ 8. Komplexní funkce reálného argumentu 30
§ 9. Vyjádření kmitů v komplexním tvaru 32
§ 10. Funkce komplexní proměnné 44
§ 11. Příklady 36
§ 12. Limita funkce 39
§ 13. Spojitost 41
§ 14. Cauchy-Riemannovy diferenciální rovnice 43
Úlohy 46

Kapitola II. **Konformní zobrazení.**

§ 15. Konformní zobrazení 49
§ 16. Konformní zobrazení oblastí 53
§ 17. Diferenciál a jeho geometrická interpretace 55
§ 18. Lineární lomené zobrazení 58
§ 19. Zobrazení kružnic 60
§ 20. Invariance sdružených bodů 61
§ 21. Určení zobrazení zprostředkovaného lineární lomenou funkcí . 64
§ 22. Speciální případy 66
§ 23. Obecné principy theorie konformního zobrazení . . . 69
Úlohy 72

Kapitola III. **Elementární funkce.**

§ 24. Funkce $w = z^n$ a její Riemannova plocha . . . 74

§ 25. Pojem regulární větve funkce. Funkce $w = \sqrt[n]{z}$. . . . 78
§ 26. Funkce $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ a její Riemannova plocha . . . 82
§ 27. Příklady 85
§ 28. Profil Žukovského 90
§ 29. Exponenciální funkce e^z a její Riemannova plocha . . . 92
§ 30. Logaritmická funkce 96
§ 31. Goniometrické a hyperbolické funkce 98
§ 32. Obecná exponenciální funkce 102
§ 33. Příklady 105
Úlohy 109

Kapitola IV. **Aplikace na theorii rovinného pole.**

§ 34. Rovinné vektorové pole 111
§ 35. Příklady rovinných polí 112
§ 36. Vlastnosti rovinných vektorových polí 116
§ 37. Potenciální a silová funkce 120
§ 38. Komplexní potenciál v elektrostatice 127
§ 39. Komplexní potenciál v hydromechanice a theorii vedení tepla 132
§ 40. Methoda konformního zobrazení 136
§ 41. Pole v pásu 137
§ 42. Prstencové pole 140
§ 43. Úloha o obtékání nekonečné křivky 144
§ 44. Úloha o úplném obtékání. Podmínky Čaplyginovy . . . 147
§ 45. Jiné methody 152
Úlohy 156

Kapitola V. **Harmonické funkce. Vyjádření regulárních funkcí pomocí integrálů.**

§ 46. Integrál funkce komplexní proměnné 158
§ 47. Cauchyho integrální věta 159
§ 48. Residuová věta. Vzorec Čaplyginův 163
§ 49. Neurčitý integrál 166
§ 50. Integrování mocnin $(z - a)$ 169
§ 51. Integrální věta Cauchyho 172
§ 52. Existence derivací vyšších řádů 174
§ 53. Vlastnosti regulárních funkcí 176
§ 54. Harmonické funkce 180
§ 55. Problém Dirichletův 182
§ 56. Integrál Poissonův a Schwarzův 187
§ 57. Použití v theorii pole 190
Úlohy 194

Kapitola VI. **Vyjádření regulárních funkcí pomocí řad.**

§ 58. Řady v komplexním oboru 197
§ 59. Věta Weierstrassova 199
§ 60. Potenční řady 202
§ 61. Vyjádření regulárních funkcí pomocí Taylorovy řady . . 205
§ 62. Nulové body regulární funkce. Věta o jednoznačnosti . . 208
§ 63. Analytické pokračování. Pojem analytické funkce . . 210
§ 64. Laurentovy řady 215
§ 65. Isolované singulární body 223
§ 66. Odstranitelné singulární body 224
§ 67. Póly 225
§ 68. Podstatně singulární body 230
§ 69. Rozvoj funkce v okolí nekonečně vzdáleného bodu . . . 233
§ 70. Žukovského věta o vztlaku 236
§ 71. Jednodušší třídy analytických funkcí 242
Úlohy 244

Kapitola VII. **Použití theorie residuí.**

§ 72. Výpočet integrálů typu $\int_0^{2\pi} R(\sin x, \cos x)\,dx$ 247
§ 73. Integrály typu $\int_{-\infty}^{\infty} R(x) \begin{Bmatrix} \sin \\ \cos \end{Bmatrix} \alpha x\,dx$ 249
§ 74. Ostatní integrály 255
§ 75. Integrály mnohoznačných funkcí 262
§ 76. Vyjádření funkcí pomocí integrálů 269
§ 77. Logaritmické residuum. Princip argumentu 274
§ 78. Rozklad funkce cotgz v nekonečný součet zlomků. Mittag-Lefflerova věta 279
§ 79. Rozklad sinz v nekonečný součin. Věta Weierstrassova . . 283
§ 80. Eulerova funkce $\Gamma(z)$ 287
§ 81. Vyjádření Γ-funkce pomocí integrálu 291
Úlohy 295

Kapitola VIII. **Zobrazování polygonálních oblastí.**

§ 82. Princip symetrie 298
§ 83. Příklady 302
§ 84. Integrál Christoffela-Schwarze 309
§ 85. Singulární případ. 315
§ 86. Příklady 317

§ 87. Výpočet pole na okrajích kondensátoru. Kondensátor Rogovského 322
§ 88. Pole deskových elektrod 326
§ 89. Zobrazení rovnoběžníku. Pojem eliptického integrálu . . 329
§ 90. Eliptické funkce Jacobiho 333
Úlohy 337
Řešení úloh 340
Rejstřík 352

KRUH

svazek 44.

B. A. Fuks — B. V. Šabat

FUNKCE KOMPLEXNÍ PROMĚNNÉ

Vydalo Přírodovědecké vydavatelství, Praha 1953.

Hlavní redaktor Dr Milan Skalník, odborná redaktorka Zora Knichalová, technický redaktor František Končický, jazyková redaktorka Jarmila Coufalová. Z nové sazby písmem Extended vytiskly Pražské tiskárny, n. p., provozovna 05 (Prometheus), Praha VIII — 1. vydání, náklad 3300 výtisků (1—3300) — 30103/2 — 49898/51/14/III/1 — 221 — Sazba 24. 6. 1952, tisk 23. 3. 1953 — — 22,75 plánovacích archů, 15,50 autorských archů, 15,86 vydavatelských archů 364 stran, 150 obrazců — Papír 222-17, formát 61 × 86, 80 g.

Cena brož. 200 Kčs

DT 363/4